目　录

1 漫步的起点

分维数是 1977 年由 Benoit Mandelbrot 在《分形：形成、机率和维数》(Fractals: Form、Chance and Dimension)[1]一书中创造的一个新的科技英语单词。我则是从美国新泽西州图书俱乐部的科学图书馆送给我的一本小册子上知道这本书的。图书馆评论员在关于本书的说明中曾提到 Mandelbrot 在书中讨论了大不列颠海岸线长度的问题。当时我不知道何谓分形，但是我确实记得 60 年代浏览《科学》杂志时曾看到过 Mandelbrot 有关这一问题的文章。早在这篇文章中，Mandelbrot 就已经把注意力集中到 L. F. Richardson 的早期工作中了。Richardson 曾经指出诸如"大不列颠海岸线有多长"这样的简单问题，但人们除了能给出如何估算的方法性描述外并没有别的答案[2]。例如，如果象图 1.1 那样画出大不列巅海岸线，我们就可以通过下述方法估算其长度：用步长 λ 沿着海岸线步测一周，可得到一个多边形，该多边形的周长就是海岸线长度的一种近似。图 1.2 所示为用三种边长依次为 λ_1、λ_2、λ_3 的多边形周长近似表示的大不列颠海岸线长度。为得到海岸线周长的无标度近似值，在图 1.2 中对周长的估计值进行了标准化，即用多边形的周长除以岛的最大投影尺寸。

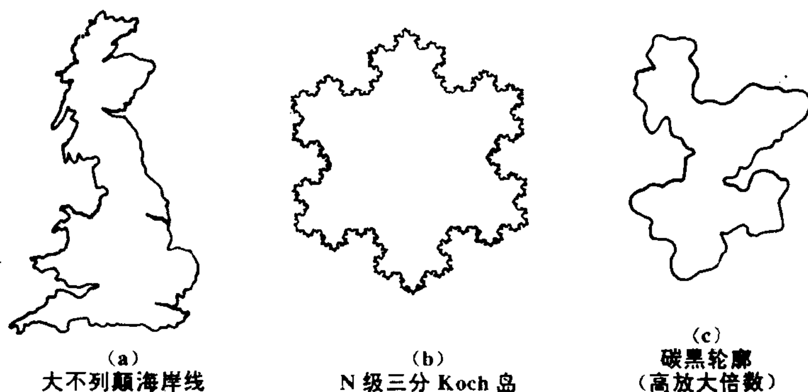


图 1.1 Richardson 指出，当用无穷小的码尺去测量海岸线的长度时，会得出海岸线是无限长的令人困惑的结论。而 Mandelbrot 把这一结论与周长为无限的曲线结构(如 N 级三分 Koch 岛，Mandelbrot 用分维数刻划其结构)联系起来了，比较碳黑聚集体和大不列颠海岸线及 Koch 岛可知，Mandelbrot 的分维数可以用来描述碳黑轮廓的构造

图 1.2 的下部为在双对数坐标纸上画出的海岸线的三个估计值。显然三点在一条直线上。如果把直线延长，我们可以得到这样的结论：当所用码尺越来越小时，大不列颠海岸线的长度趋于无穷大。Richardson 证明这一结果是测量任何海岸线长度时所固有的，他还指出，对任何海岸线长度的任何估计都必须指明其估算方法[3]。

阅读 Mandelbrot 早期关于不定长海岸线的文章时的模糊记忆，唤起了我对他的分形著作的兴趣。因此，我向图书俱乐部订购了这本书。不过，在收到该书之前，我并没有对分形过多考虑，当我打开棕色包裹时，我全然不知这本书会给我的职业范围带来什么样的改变。第一次浏览这本著作时，我首次看到了 N 级 Kock 岛。这一有趣的数学曲线，如图 1.1(b)所示，它的一个奇妙性质就是具有无限大的周长而包含有限的面积。看到 Koch 岛时，我的脑海似乎浮现了图 1.1(c)所示的碳黑轮廓的形状。多年来，我一直致力于描述工业上广泛应用的碳黑颗粒形状及尺寸的研究，从 60 年代到 70 年代，用于此类微细粒子观察的电子显微镜和扫描电镜的放大倍数和分辨率都得到了稳步提高。

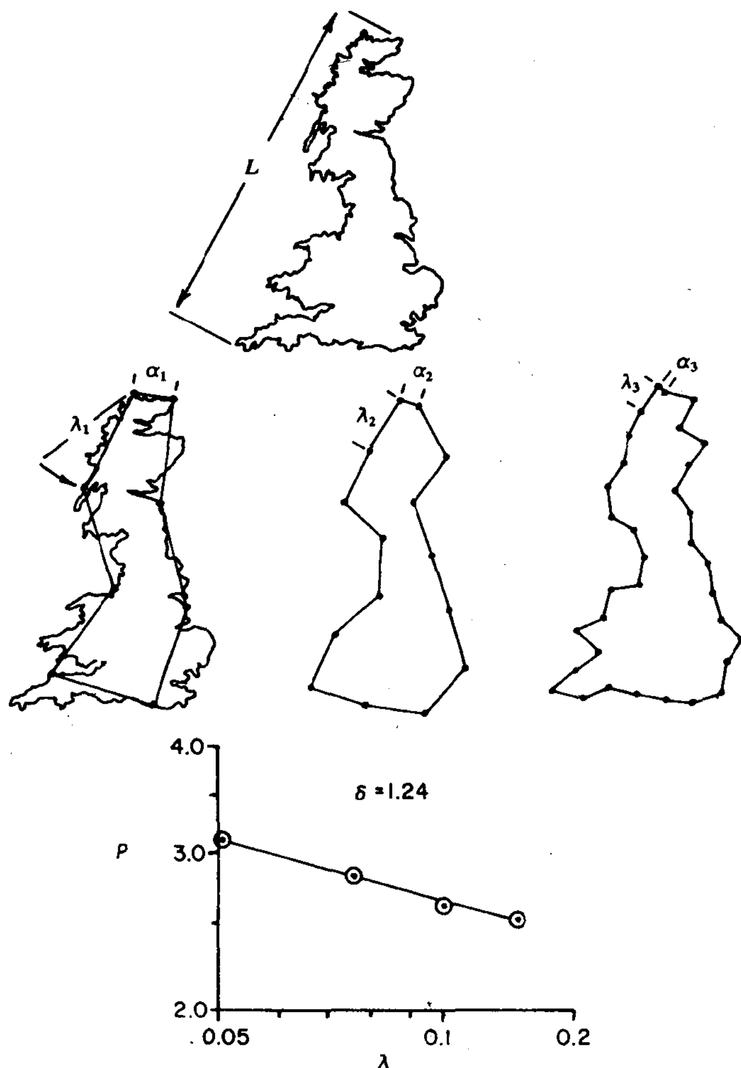


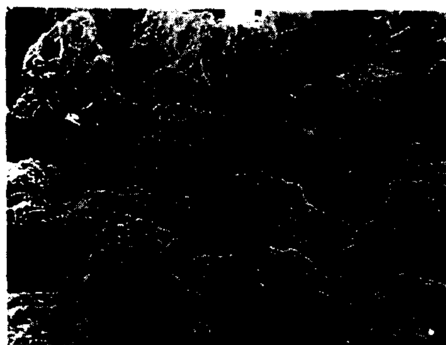
图 1.2 在构造测量曲折边界分维数的行走程序时，得到了一系列边长为 λ 的多边形。用 $\ln P \sim \ln\lambda$ 作图可得到一条斜率为 m 的直线，如果边界曲线可以用分维数描述，则

$$\delta = 1 + |m|。$$

λ 为多边形边长，相对于最大投影尺寸的标准化值；P 为边长为 λ 的多边形周长，相对最大投影尺寸的标准化值；δ 为边界曲线的分维数；L 为岛的最大投影尺寸。

每当用电子显微镜观察碳黑微粒时，科学家们既为在高放大倍数下所获得的信息所

激动，但又被这样一个事实所迷惑，那就是用放大倍数更高的新设备观察时总可以看到更详细的细节，而且似乎永无止境。实际上，用一系列递增的放大倍数测量轮廓周长的研究表明，如果可以在无穷大的放大倍数下测量，所有碳黑微粒都具有无限的周长！图1.3是放大倍数增大时某一海绵铁微粒的照片。这一实际结果表明，每次提高放大倍数，都可以获得大量的细节，微粒的复杂结构似乎没有尽头。



(a)放大220倍



(b)放大1100倍



(c)放大5500倍

图 1.3 如果微细颗粒的结构随着放大倍数的增大而变得更为复杂，那么就可以用分维数来描述其结构

Mandelbrot 在讨论 N 级 Koch 岛时指出，Koch 岛具有无穷周长，而且在不同放大倍数下观察是一样的，因为它的结构具有自相似性。这使我回想起自己试图在一系列放大倍数下获得碳黑微粒周长有限估计值时的经验。从被测碳黑微粒与 Koch 岛的肉眼比较可知，任何用于描述 Koch 岛边界的方法也许都能用于描述曲折的碳黑微粒的轮廓。这种想法，触发了我阅读 Mandelbrot 专著的强烈愿望，并使我急于获得一组描述微粒边界的分维数数据，这些数据最终导致了我的第一篇关于微粒边界分维数的科学论文的发表[4]。在这本书的后面，将介绍这篇论文中的有关经验。然而，在我们能够解释首次应用分维数描述微细边界所遇到的各种问题之前，有必要了解与分维数概念有关的背景知识和随机行走理论。

在理解 Mandelbrot 专著的过程中，我遇到了不少障碍，因为我从未学过数学中的集合论，而理解 Mandelbrot 的许多论述关键在于用无穷多点的交叉集合描述几何图形的能力。学生时代，我曾在 George Gamow 著的《一、二、三无穷》上(One、Two、Three、Infinity)[5]一书中了解过一点康托集的概念，并大略浏览过 Vilenkin 的《集合的故事》(Stories About sets)[6]一书，但这两本书都是初级读物。现在我发现自己已被无数的康

托集包围了。在Mandelbrot专著的第100页，我曾想象自己在一个魔梯上上下走动，这个魔梯有无数个阶梯，但结果却可用有限次攀登来表示（见图1.4）。

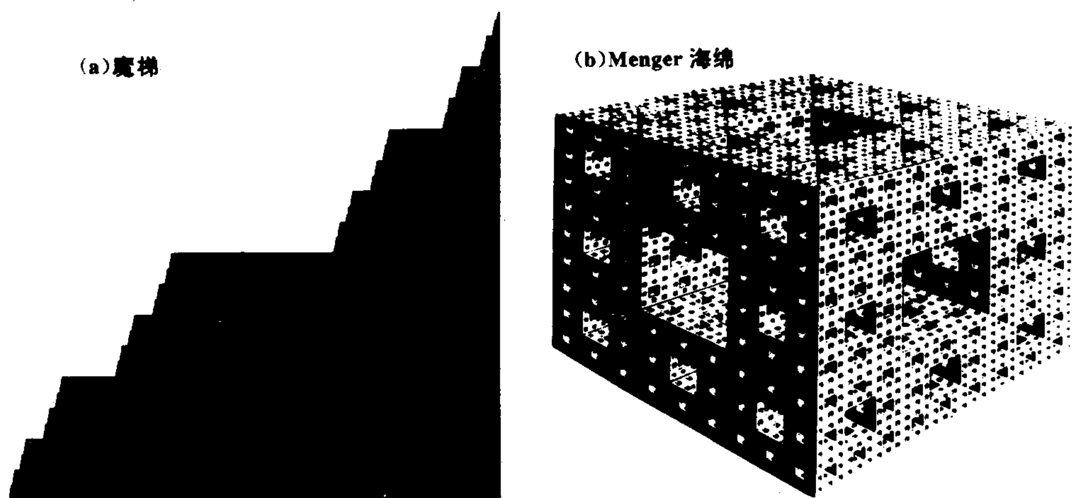


图1.4　离开几何论的基础去掌握分形几何，就像试图站在有无数阶梯的魔梯上或试图探讨具有无数个尺寸变化无限的孔洞的Menger海绵一样。魔梯的结构提示我们可以用这类边界的分维数描述晶体的物理化学活性，Menger海绵则提示我们可以用分维数描述诸如像催化剂和阻化剂这样的各种体系的物理行为

Mandelbrot专著中那些与我要描述的微细粒子如此相似的图形，吸引我走进康托集的迷宫，穿过Menger海绵，最终得到了一些重要结论。从本质上说，Mandelbrot引入应用数学的主要思想在于，粗糙模糊的体系通常可以用从经典的维数概念扩展而来的分维数加以描述，这里分维数可反映由包含分数在内整个维数所覆盖的空间体系的粗糙程度。这一思想可以通过研究图1.5所示的一组曲线来说明。数学上的一个重要分支是拓扑学，它是研究几何体某些性质的一门学科，这些性质在物体连续变形时保持不变。简单地说，拓扑学家认为图1.5中的一系列曲线并无二样。假如把每条曲线都画在一张橡皮条上，那么我们可以通过拉伸和挤压使橡皮条变形，直到每条曲线都相互重合。其实，拓扑几何的一种通俗定义就是："橡皮条几何"（Rubber sheet geometry）[7]。从拓扑学的观点看，图1.5中所有曲线的维数均为1。这些曲线是画在2维空间（平面）上的。Mandelbrot建议能够用一个介于1～2之间的分维数描述这些曲线的弯曲程度和充填空间的能力。分维数与拓扑维数之间的差就反映了曲线的弯曲程度。

图1.5中曲线的分维数是通过构造步长法测得的，这将在后面作介绍[8,9]。从图1.5的数据可知，曲线的分维数与其在2维空间中的形态具有很直观的联系。按照分维数的概念，一个粗糙不平的表面可以用一个介于2～3之间的维数来描述，分维数反映了它充满空间的程度。因此，一个维数为2.4的海绵将比维数为2.3的海绵更有效地充满空间，而且具有更大的比表面积。

自从事分形理论研究以来，我在许多地方做过有关微细颗粒体系的分维数的报告，在报告之后的提问期间，显然有很多人拒绝接受分维数的概念，因为他们的思想方法还束缚在1维、2维和3维等经典的维数框框中。

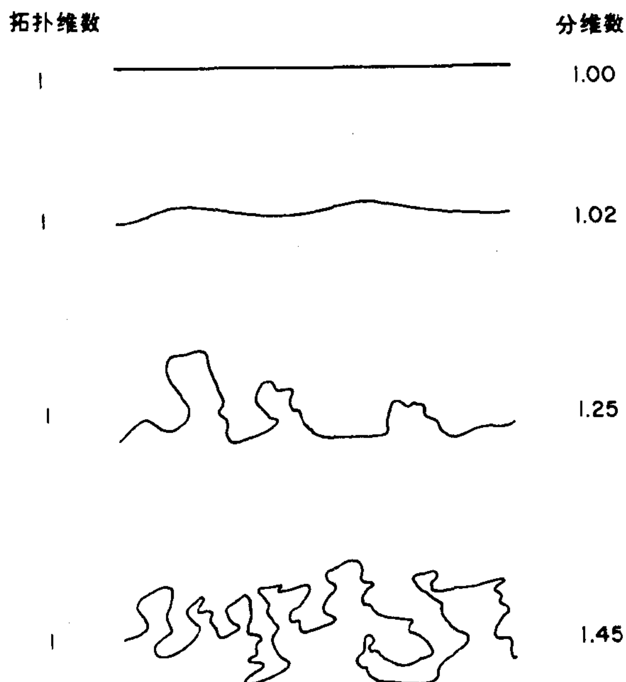


图 1.5 通过将拓扑维数加上一个与体系的不规则程度有关的分维数以扩展古典的维数概念

Mandelbrot 在最初讨论粗糙体系时就预计到了这种困难，并强调指出，经典维数观点本身事实上是一种可操作的观点（Operational Perspective）。因此，他在其专著中从不同角度讨论了一只羊毛球的维数。他指出，对于一只距羊毛球很远的苍蝇来说，羊毛球就象一个零维的点；当苍蝇向羊毛球移动到一定距离时，羊毛球可以看成一个 2 维的目标；当苍蝇进一步靠近时，羊毛球就是一个很大的 3 维物体了。如果我们想象苍蝇小到足以能够进入羊毛球内部，那么苍蝇关于"羊毛球"的概念就会消失，因为它会发现自己是在一个具有复杂结构的网状组织中飞行。

当我读到 Mandelbrot 阐述经典维数理论的可操作性时，我想起了中学时期用 1 维、2 维、3 维描述日常物体的争论。作为一名学生，我永远也不能承认一小段绳子是 1 维的，在我看来，无论绳子多么细，它总是 3 维的。如果老师告诉过我称一段绳子是 1 维的，一张纸是 2 维的只是为了理解方便的原因，那么，就不会有关于维数理论概念的长时间争论了。正是由于这样的原因，一个数学家认为一片纸是一个无限薄的两维结构，而化学家用纸作为过滤介质时则认为纸具有 3 维网状结构。物体维数的确定完全取决于人们处理物体的方式（抽象思维或具体操作）。用整数维数概念描述空间物体只是为了方便，而并非反映事物的基本属性。同理，描述物体粗糙度的分维数只是维数结构的一组可操作定义的有益推广。

物体的分维数很象加拿大家庭平均大小的人为描述。当我们说加拿大每个家庭平均有 2.2 个孩子时，人们并不会去追究 0.2 个孩子是怎么回事，相反认为这是对家庭大小的有益的数学描述。

同样，分维数也是物体结构的有用描述。我们可以通过研究能用分维数有效描述的不同物体来理解分维数的重要性。因此，通过图 1.5 中的曲线组，我们可把分维数与直观的曲折程度联系起来，而这种经验恰是对 2 维空间中的边界进行分维数直观描述的基础。

从某一角度看是曲折的边界，从另一角度看则会成为光滑的，反之亦然。明白这一点在研究分维数时是非常重要的。因此，当引用某一分维数的时候，必须记住，在实际工作中，该分维数总是和观察时给定的分辨率相关。对于任何给定的分维数，都需要标明分辨率的界限。这本是一件很讨厌的事，因而一般讨论问题时往往不提分辨率界限。但这种口头上的方便不应使人们误认为用于描述体系曲折程度的分维数与观察倍数无关。

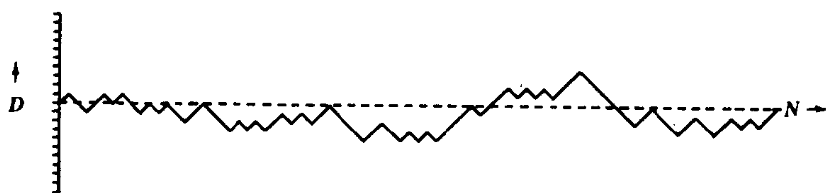
例如，如果图 1.3 的曲线是由光滑的尼龙丝制成的，那么对于一只正在飞近的苍蝇来说，尼龙丝的结构是曲折的；如果苍蝇能够停在曲线上观察它脚下的点，它将发现曲线是一个光滑结构，而且其表面可以认为是一个传统的 2 维平面。按照 Mandelbrot 的术语，任何可以用传统的光滑表面和光滑连续曲线表征的边界称为欧几里得边界，因为这些系统可以用欧氏几何予以描述[10]。

自有关微细粒边界曲折程度的第一篇文章发表以来，我已用分形理论处理了许多种微细颗粒问题，并应邀在许多地方做过学术报告[11,12,13]。由于这些文章和报告，朋友们都敦促我写一本分形专著。起先我觉得很勉强，因为我不认为自己能够写出一本系统的分形理论专著，而且这样的书已由 Mandelbrot 完成了。然而，我又想给初涉分形的学者介绍使用整数维和分数维的历史经验，因为这些经验看来在应用科学的教学中是有些用处的。因此我想或许我能写一本分形漫谈的专著，来介绍分形理论的各种有趣应用，希望它能引起大家对分形的兴趣。

Mandelbrot 在他的书中告诉我们，他是在研究沿着电话线传播的信号以后，才建立起分形的完整概念的。他所研究的问题可以通过概括在图 1.6 中的信息来理解。在图 1.6（a）中，直线上的点代表了在一段时间内收到的声音信号。



(a)传播线路中的声音信号



(b)沿着参考直线的波动

图 1.6　Mandelbrot 认为，在一条直线上随机堆积的稀疏点总可以用 Cantor 集理论描述，与这些稀疏点的性质相应的分维数介于 0～1 之间。图中 N 为总步数；D 为离开路灯柱的距离。

当研究诸如图 1.6 所示的这种信号时，Mandelbrot 说，在时间坐标轴上信号的明显聚集（Mandelbrot 认为这种聚集是随机事件）使他想起了 Feller 在概率论的书中所写的 1 维随机行走时横越参考线的点的集簇问题[14]。

简单的 1 维随机行走的基本情况如图 1.6 所示。传统上，随机行走理论是这样介绍给物理学的学生的，即设想一个醉汉从一个路灯柱开始盲目地曲折行走。我们将在第 5 章讨论醉汉的 2 维曲折行走问题。现在且看他在 1 维空间中离开路灯柱如何行走。对于 1 维行走，我们必须规定醉汉是在某一槽沟中离开路灯柱的。醉汉被假定只在向着路灯柱或离开路灯柱的两个方向上迈步。简单随机行走的基本性质是，醉汉下一步要走的方

向与已经达到的位置无关。因此，即使他已经在远离路灯柱方向上走了 20 步，但他下一步往朝着或离开路灯柱方向走的概率是一样的。对于最简单的随机行走，我们还假设醉汉的步长总是一定的。图 1.6 (b) 是用计算机模拟的醉汉在 1 维空间中走过的一系列步子。图中纵坐标 D 是距路灯柱的距离，横坐标 N 是总步数。当锯齿形折线与时间轴相交时，我们知道此时醉汉回到了路灯柱下，但这只是他探索路灯柱周围空间过程中的短暂时刻。你将看到，即使在图 1.6 (b) 所示的短暂的 1 维行走中，醉汉开始行走时往往要先在路灯柱下徘徊一小段时间才远离路灯柱，然后又回到路灯柱附近。Mandelbrot 之所以认为在电话线中传播的声音信号可以用随机行走理论建模，正是因为路灯柱附近这组数据的提醒。据此 Mandelbrot 还意识到声音信号沿时间轴的随机排列（如图 1.6 (a)），可以用经典数学中关于某一直线上排列的点集加以研究，当然这样的直线是由无数个不连续的点构成的。

直线上稀疏点的排列密度可以用 G. Cantor (1845～1908) 建立的称为 Cantor 集理论的数学方法描述[15,16]。Mandelbrot 已经指出，这种方法和描述某一直线上随机分布的稀疏点密度的分维数（介于 0～1 之间）方法是等价的。

在后面的章节中研究物理学中的分维数时，我们将讨论分维数是 0～1 的物理意义。现在可以先把它看作是由通过时间轴的 1 维随机行走而产生的离散点集就行了。而这已使 Mandelbrot 意识到可以通过几何学 Cantor 集理论获得描述粗糙体系结构的分维数。

虽然是 1 维随机行走最先促进了分形几何的发展，但 Mandelbrot 却从研究 2 维空间中的布朗运动入手介绍分形几何的概念。从显微镜观察可知，布朗运动是悬浮在液体中的微细颗粒的无规则折线运动，这是 1827 年由英国生物学家 R. Brown 首先看到的。我们现在知道，微细颗粒作布朗运动是由于受到介质分子的多重碰撞。细粒子在任何时刻所受的力都是不平衡的，正是这种非平衡力推动微细颗粒沿着随机方向运动。因为分子碰撞是一种随机现象，其产生的合力在大小和方向上都时刻处于变化之中，所以，微细颗粒的运动是一种随机行走过程。

Perrin 对布朗运动作过详细研究。他曾在显微镜下观察半径为 0.53μm 的胶体颗粒，每 30s 记录一次位置，所得结果如图 1.7 所示。如果观察的时间为无限长，那么胶体颗粒的折线运动将覆盖 2 维平面的任何一点，因此尽管颗粒运动轨迹的拓扑维数为 1，但其分维数却近似为 2[17]。

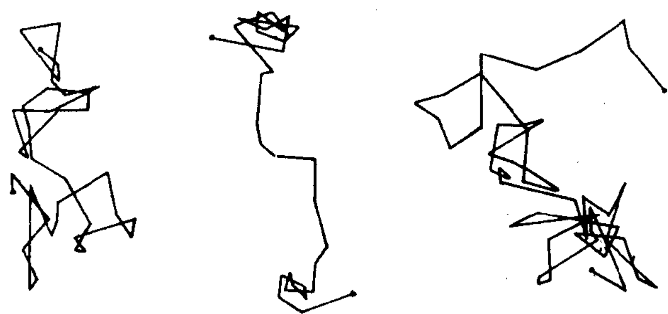


图 1.7 Perrin 研究的胶体颗粒的布朗运动（直径为 1.06μm 的胶体颗粒的两种典型轨迹，每 30s 记录一次胶粒位置，参考坐标为边长 3.2μm 的格子）[18]

在 Mandelbrot 的专著中，能够用分维数描述的体系与用 1～N 维空间中的随机行走模拟所得的这些体系的模型之间存在密切联系，从而得出这样一个结论：即对描述自然

体系的分维数的任何理解不仅需要集合论和拓扑学的知识，而且需要对随机行走理论的了解。另外，对那些受过传统数学教育，但想在研究应用科学时使用分维理论的人来说，要理解 Mandelbrot 专著中的随机行走还是有困难的，因为随机行走理论很少出现在 70 年代前的教科书中。因此，在考虑编写关于应用科学中分形理论的应用专著时，这本书不得不包括介绍随机行走理论基本概念的章节。

在决定编写一本“随机”探讨分维数的专著后，下一步就必须确定这种探讨的起点。

从理论上看，恰当的做法是把研究离散点在 0～1 维空间中的充填作为探讨分维理论的起点，然后研究 N 维空间中的粗糙体系。但是，直线上点的维数的研究难以作出直观的解释，因此，我决定把用分维数描述微细颗粒的边界作为我们在不熟悉的维数领域进行“漫步”的起点。

在每一章最后，我都将为下一章的内容安排找出一个也许是似是而非的理由，但是读者必须注意，这种选择完全是出于作者的一闪之念，而不是出于任何逻辑上的推断。

我希望学生们不单是那些有希望成为应用分形理论描述物理体系的“高手”，而且还能够被引导到贯穿分形体系的曲折道路上来。因此我觉得有必要对数学概念和操作方法作出或多或少更详细的介绍。当然如果本书是专为实际工作者所写的话，就不必这样做了。有经验的科学家可以跳过那些解释性的细节，而不必象文科学生那样进行冗长的“漫步”。读者还须注意的是，和其它类似的书籍一样，一本书中有一些似乎和分形这一主题无关的细节，我请求读者对这些细节保持耐心，因为我敢担保，如果您继续往下读，您会发现这些似乎不切题的细节实际上是为探索分维数的更深领域奠定了重要基础。

参考文献

[1] B.B. Mandelbrot, “Fractals: Form, Chance and Dimension,” Freeman, San Francisco, 1977.
[2] B.B. Mandelbrot, “How Long is the Coast of Britain, Statistical Self Similarity and Fractional Dimension,” *Science*, 155 (1967) 636-638.
[3] The work carried out by Richardson on the indeterminacy of coastlines was found in his posthumous papers. The most accessible discussion of Richardson’s work is in the publications of Mandelbrot, [1, 2].
[4] B.H. Kaye, “Specification of the Ruggedness and/or Texture of a Fineparticle Profile by its Fractal Dimension,” *Powder Technol.*, 21 (1978) 1-16.
[5] G. Gamow, “One Two Three Infinity,” Bantam Books. New York , 1965.
[6] N.Y. Vilenkin, “Stories About Sets,” Academic Press, New York, 1969.
[7] I. Stewart, “Concepts of Modern Mathematics,” Pelican Books, Middlesex, England, 1975. A readable introduction to geometric set theory and topology for those unfamiliar with these subjects.
[8] B.H. Kaye, “Direct Characterization of Fineparticles,” Wiley, 1981.
[9] B.H. Kaye, “Application of Recent Advances in Fineparticle Science and Technology to Mineral Processing,” paper presented at the Symposium “Challenges in Mineral Sciences,” 23rd Annual Meeting of the Metallurgical Society, C.I.M., Quebec City, August 19-22, 1984; *Part. Charact.*, 2 (1985) 91-94.
[10] Euclid was a Greek mathematician born in 325 B.C., who wrote the first surviving textbook on geometry. The traditional geometry of triangles and continuous curves is described as Euclidean geometry. There are several non-Euclidean geometries which are based on different assumptions to those made by Euclid when setting up his system. In this book, the term Euclidean is used to describe traditional geometric figures and boundaries, as distinct from the geometry of rugged curves which have no differential functions or which are indeterminate, which in this book is described as fractal geometry.

[11] B.H. Kaye, "The Description of Two Dimensional Rugged Boundaries in Fineparticle Science by Means of Fractal Dimensions," *Powder Technol.*, 46 (1986) 245-254.

[12] B.H. Kaye, "Fractal Description of Fineparticle Systems," Particle Characterization in Technology, Vol. 1, in K. Beddow (Ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, 1984, Ch. 5.

[13] B.H. Kaye, "Fractal Description of Fineparticle Systems in *N*-Dimensional Space", paper presented at the 3rd European Symposium on Particle Characterization, Nurenberg, May 9-11, 1984.

[14] W. Feller, "An Introduction to Probability Theory and its Applications," Vol. 1, Wiley, New York, 1950; see reference 1, p. 86.

[15] J.W. Dauben, "George Cantor and the Origins of Trans Finite Set Theory," *Sci. Am.*, June (1983) 122-131.

[16] J.W. Dauben, "George Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite," Harvard University Press, Harvard, 1979.

[17] In his book Mandelbrot uses the concept that the ultimate fractal dimension of an infinitely long Brownian motion is 2. The writer feels that, although this is strictly true mathematically, to help keep the physics of the situation in mind it is useful to write the fact that the fractal dimension tends to 2 with infinite time in the form

$$\lim_{t \to \infty} \delta \to 2.$$

This helps to distinguish between a true two dimensional system and one which when "unwound" has a topological dimension of 1, but the coverage of which approaches 2 after infinite time.

[18] B.B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature," Freeman, San Francisco, 1983, p 13 (revised edition of reference 1).

2 微细颗粒边界的分形描述

2.1 一个有名的碳黑轮廓的分维数

图 2.1 的碳黑轮廓在科学界颇有名气，因为许多试图用分形描述微细粒体系的人都通过该轮廓查核他们测量分维数的方法[1,2]。这一碳黑照片是由 A. Madalia 首先拍摄的，也是他让我进入了描述微细粒碳黑尺寸分布和结构这一有趣课题[3]。图 2.1 是碳黑轮廓的原始电镜照片，不难看出，其中的大颗粒是由众多微细粒结合而成的。碳黑凝聚体的一个有趣特征是任何凝聚体中看得见的球形粒子都是一样大的，但不同的碳黑具有不同大小的球形粒子[3]。



图 2.1 Medalia 摄得的碳黑聚集体的高分辨率电镜照片，该图已被许多人用于研究曲折微细颗粒轮廓的分形描述的可能性[1,2,3]

在科技文章中，通常把凝聚（Agglomerate）和聚集（Aggregate）混为一体，因此，Medalia 博士称图 2.1 所示的体系为“准球粒聚集体”（Aggregate of quasi-spheres）。在本书中，我们将经常遇到由细颗粒组成的体系，因此，必须明确凝聚和聚集的含义。为建立一个合理的术语，我曾查阅过这两个词的拉丁词根。如果某一物体是由较小的子单

元粘接在一起组成的，而且在处理过程中这些子单元不会分开，那么就称该物体为凝聚体，因为“凝聚”在拉丁语中的意思是“形成球”(Made into globe or a ball)。如果子单元只是松散地结合在一起，而且在水中搅拌或进行任何加工时会分散，则称之为聚集体，因为“聚集”在拉丁语中的意思是“像绵羊群一样聚在一起”(To bring together like a flock of sheep)。因此聚集体只是子单元的松散集合体。读者在阅读科技文章时，理应细心理解凝聚和聚集的含义。

碳黑是天然气在缺氧条件下燃烧制得的，因此是在火焰中形成的。这种火焰中形成的碳用一块冷却金属板收集。在美国，每年生产的碳黑就达 908t，其中有 3/4 用于橡胶工业，橡胶中加入碳黑为的是增加橡胶的强度。碳黑还在制造墨水、擦光剂、油漆及复写纸等工业中用作颜料。从事碳黑工作的人往往非常注意描述物料的术语，对一般的外行而言，碳黑似乎只是油烟的商品名字。然而，油烟是任何石油和煤不完全燃烧产生的黑色沉积物的总称。由于碳质燃料在特殊设备中的不完全燃烧，油烟往往含有许多致癌物质。碳黑是由天然气制得的，它不含任何高分子碳化合物。而正是这些含碳高分子物质在不完全燃烧时才会产生致癌物质。80 年代初期，人们就曾讨论过工业用碳黑的安全问题。然而，试验表明，天燃气受控燃烧制得的碳黑表面不存在有害物质，而油烟，如柴油燃烧所产生的油烟则含有有害物质（见本章油烟结构的讨论）。

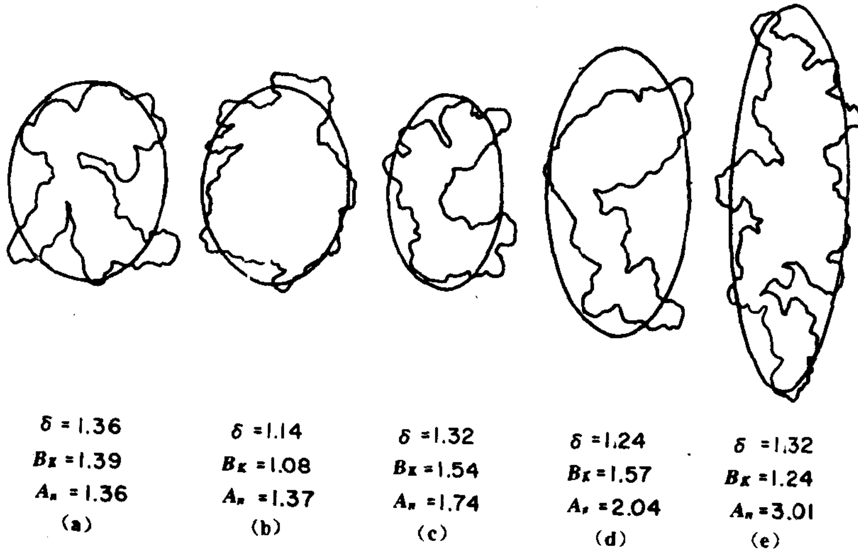


图 2.2 Medalia 通过碳黑凝聚体和与该凝聚体有相同力学性质的等效椭圆的比较来描述碳黑凝聚体的形状。他根据等效椭圆定义了两形状因子：不均匀度 A_n（定义为椭圆的长短轴之比）及笨拙度 B_K（定义为等效椭圆的面积与碳黑轮廓面积之比）。A_n 在数值上接近于轮廓的纵横比（即轮廓的最大投影长度与宽度之比）。分维数亦可用来描述上述碳黑的轮廓形状。在码尺尺度 $\lambda=0.08\sim0.32$（已用轮廓最大投影尺寸标准化）时，所得的分维数已列于每一图后。δ 为分维数；A_n 为不均匀度；B_K 为笨拙度

图 2.2 是 Medalia 拍摄的一些碳黑照片，Medalia 用计算椭圆尺寸的方法来描述这些细颗粒的形状，这些细颗粒与相同断面形状的金属薄片具有相同的力学性质[3,4]。计算完椭圆尺寸后，Medalia 定义了不均匀度 A_n 和笨拙度 B_K 两个形状因子，其中 A_n 表示椭圆

长轴与短轴之比，B_K 表示椭圆面积与颗粒断面面积之比。Medalia 对 5 种不同断面进行了计算，结果如图 2.2 所示。从图 2.2 的数据可知，图（d）的 B_K 值最大，而图（e）的 A_n 值最大。关心工厂和矿山的可吸入粉尘所带来的危害的卫生学家们通过实验认为，长轴与短轴比为 3 是划分纤维状粉尘和块状粉尘的有用判据。在讨论细颗粒的形状时，通常把长度和宽度的比称为纵横比（Aspect ratio）[5]。图 2.2 所示断面的纵横比在数值上与 A_n 几乎是相等的，而且我们可以看出图（e）是纤维状颗粒。

从理论上说，用等效椭圆代替断面不规则的实际碳黑是为了简化对颗粒结构的描述，因为前者可以用对连续曲线的微分运算或人们熟悉的欧几里得几何进行分析。

把曲折的轮廓线转换成可处理的欧几里得曲线的另一种方法是构造一个包含轮廓线的“凸壳”（Convex hull）。图 2.2 中 5 个轮廓线的凸壳如图 2.3 所示。凸壳是沿着断面特征轮廓所画的最短曲线，而且它处处是凸的。从便于实验的角度来看，凸壳减少了问题的复杂性，但仍包含原断面的显著特征，举例来说，假如让具有这样轮廓线的物体落入粘性流体中，凸壳的形状可大致确定流体在物体周围的流动特征，并进而确定该物体在粘性流体中的下沉速度。再如，对一堆刚刚堆起来的粉状物料来说，其最初的堆积特征可能与凸壳和结构而不是弯曲轮廓的细节有关。

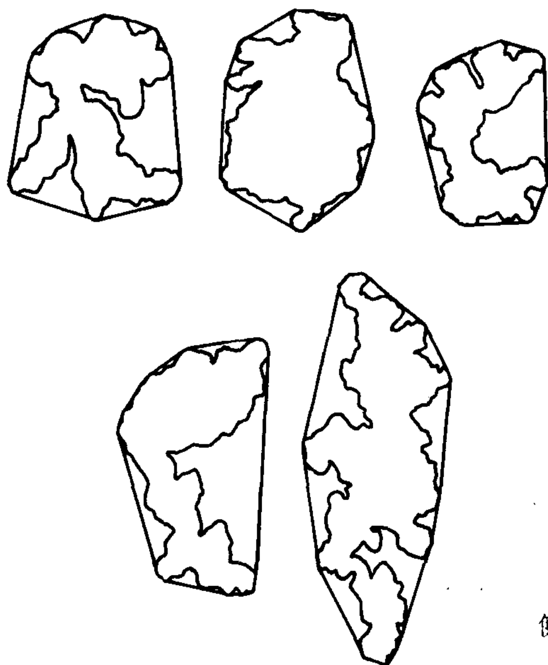


图 2.3　用凸壳取代原来的曲折轮廓线，以便用微分运算及古典几何学理论予以分析

尽管等效椭圆和凸壳这些欧几里得曲线是非常有用的，但在碳黑外形的各种研究中，当我们试图简化它们的结构，以便用数学方法来描述它们时还得非常小心。我觉得，用欧几里得等效轮廓代替复杂轮廓是“球形鸡综合症”（Spherical chichen syndrome）的前兆。这种“疾病”对科学家们时有影响，它使人们从实际研究转移到过分简化的模型的研究中去了。“球形鸡综合症”这一名称来自于一个物理学家的传奇故事，他曾受命去研究一个充满小鸡的小屋所产生的热量。据说该研究的目的是考查小鸡产生和消耗的热量，从而确定冬天为使小鸡成长而需安装什么样的空调器。研究开始了 6 个月后，人们问物

理学家是否解决了这个问题。“没有”，他说，“不过，我正在用计算机进行模拟实验，以确定一个球形小鸡表面损失的热量。”对计算机来说，模拟真正的羽毛、腿和翅膀简直是不可思议的，因此科学家使用了一个在计算机上可以处理的模型（球）来代替真实的小鸡。对一个正在研究实际问题的研究生来说，最有害的诱惑之一是宁可改变问题的结构，以适应现有的方法，而不是提出新方法去解决要研究的实际问题。

如果 Mandelbrot 建立的分维数概念能用于碳黑曲折结构的描述，我们就可以避免用等效欧几里得曲线代替实际结构的“球形鸡”模型。在探讨用分形描述碳黑断面以前，必须解决的一个主要问题是如何计算如图 2.1 和图 2.2 这类断面的分维数，这在 Mandelbrot 的书中并没有详细介绍。当我首次考虑“分形与微细粒子”时，唯一能想到的办法是 Richardson 用于测量海岸线长度的分步测量技术，我们把这种方法称为构造步长技术 (Structured walk technique)。有些科学家也将其称为“码尺法”(Yard stick method)，这缘于 Richardson 和 Mandelbrot 用码尺估计海岸线长度的讨论。在米制时代，码尺已不常见，因此构造步长看来是一个较好的名字。在早期的文献中，我曾把构造步长技术称为随机步长技术。这并不是一个好名字，我和我的合作者都已不再延用了。为测量对称的、有裂缝的或有凸出部分的不同颗粒，构造步长法已衍生出许多种变化，最简单的构造步长法是内转式 (Inswing) 步长法．测量曲折边界的其它构造步长法将在本章后面作介绍。

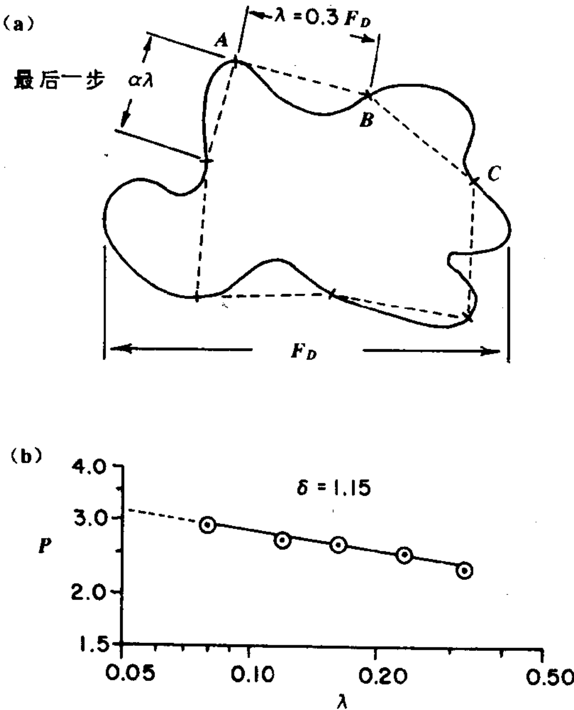


图 2.4 随机画得的曲折轮廓线可以用内转式构造步长法测量而得到一个多边形，多边形的周长可用于估计断面的周长。(a) 用等效多边形估计断面周长的测量过程；(b) 用一组递减的 λ 估计断面周长得到的 Richardson 直线，P 为周长估计值；λ 为步长，P 和 λ 都已用最大 Feret 直径标准化；F_D 为断面的最大 Feret 直径；δ 为分维数

测量实际碳黑轮廓之前，我们将从图 2.4 所示的随机画成的简单图形入手，介绍分维数的求法。图中描述了研究复杂轮廓的实验过程，即用一副圆规顺序截取放大后的轮廓线，可以得到一个边长为 λ 的多边形。过程开始时先把圆规的一个脚固定在 A 点，然后从轮廓的外侧向内转动圆规直到与轮廓线交于 B，连接 AB 两点，并把圆规的脚移至 B 点，接着再转动圆规使之与轮廓交于 C，这样重复下去直至几乎回到起点。在用内转式步长法研究曲线轮廓线时，经常遇到的问题是如何结束测量。一个简单合理的方法是把最

后一点与起点连起来，封闭多边形所需的这条短线段被看成是λ的α倍。所得多边形即可用于估计分辨率为λ时的断面周长P_E。

在形成分形几何的概念时，必须明确无量纲数（Dimensionless number）的含义，物理量都是有量纲的，两点间的距离具有长度的量纲，而面积的量纲为长度乘以长度。科学界已统一用符号〔L〕来表示长度的量纲。利用这个符号，科学家认为“面积的量纲是长度乘以长度”，即

$$〔面积〕=〔长度〕\times〔长度〕=〔L〕^2$$

当我们说“从多伦多（Toronto）到苏得贝利（Sudbury）的距离是从马克地也（Mactier）到苏得贝利的两倍”时，我们并不会去关心它们的实际距离，“两倍”是无量纲的。同理，我们通过比较无量纲数可以进行面积相对大小的描述，例如“一个面积比另一个面积大三倍”。可见，用一个物体的量除以另一个物体的量，可以得到两个可直接比较物体的无量纲描述。当我们用构造步长法测量不同尺寸的轮廓线得到的数据作图时，有必要把周长估计值和步长除以某一参考长度而转换成无量纲形式。由于某种原因（本章后面将予讨论），测量曲折轮廓时的一个有用参考长度是断面的最大投影尺寸（见图 2.4）。

把诸如“断面周长”这样的变量除以参考长度而转变成无量纲形式的过程在数学上称之为变量标准化。初学者会遇到的一个问题是，在数学中普通的词汇都具有特殊的含义，例如，一个学生物的生手也许会把“变量标准化”理解得面目全非。在拉丁语中，单词“Norma”的意思是规则，同时它还是建筑师用的直尺的名称，这种直尺可确保墙和梁相互垂直。在数学上，标准化（Normalization）是指任何能把变量转变成无量纲形式的规则。

把周长和码尺转换成无量纲形式后，我们就可以把微细碳黑的结构和大不列颠岛的形状进行比较，以讨论它们的轮廓形状的一般特征，而不用担心使用的单位是 km（千米）还是 μm（微米）。然而，正如本章后面要讨论的，如果在对断面周长进行标准化时使用了不适当的参考长度，那么一些有趣的结构特征可能会被忽略。

由于历史的原因，颗粒学中把任意方向上断面投影的最大值称为最大 Feret 直径[5]。在讨论图 2.1 所示的断面时，我首先选择了最大 Feret 直径的 0.32 倍作为码尺，然后选择了一系列λ构造多边形，最小的$\lambda=0.08$。这一系列实验得到的数据示于图 2.4（b）中。由图可知，数据点都分布在一条斜率为 0.15 的直线上。按照 Mandelbrot 的理论，在分辨率为$\lambda=0.08\sim0.32$倍标准化单位时，该轮廓线的分维数值为 1.15。这样，我们的第一次试探就找到了不规则轮廓线的分维数，这实在令人高兴！在对真实体系的实验研究中，很少有人从得到的第一组数据就能证明其假设（本例中的假设就是不规则轮廓线可用分维数予以描述）的合理性，而我们成功了！

我的第一篇有关分维数方面的论文发表于 1977 年 9 月在英国塞尔佛得（Salford）举行的颗粒粒度分析会议[6]。当我把图 2.4 的数据展示给与会者时，人们都感到十分激动，因为研究微细颗粒的专家从此可以用全新的数学方法去描述复杂的边界曲线了。

在用构造步长法测量曲折边界的分维数取得成功后，我们又测量了图 2.1 碳黑断面轮廓的分维数，在$\lambda=0.08\sim0.32$倍标准化单位时，其分维数值为 1.32（如图 2.10）。在

同样的 λ 范围内，还测得了图 2.2 中 5 个断面轮廓的分维数，其值已给于图中。不难看出，分维数值的大小与断面轮廓的曲折程度相一致。不过，要注意的是分维数并不反映断面的总体形状，轮廓线（c）和（e）具有相同的曲折程度，但总体形状显然不同，它们的长短轴比分别为 1.7 和 3.0。

为纪念 L. F. Richardson，人们把研究曲折断面周长所得到的双对数曲线（图 2.4（b））称为 Richardson 曲线。

2.2 外推法预测物理现象的不可靠性

人们看到如图 2.4（b）所示的直线时，很自然就会提出这样的问题，如果用比当初实验的 λ 更大或更小的尺度去研究曲折轮廓线，结果将会怎样呢?这种预测变量扩展条件下所可能发生的现象的技术叫外推法。外推法是建立在下述假设基础上的：即实验建立的关系在外推范围内仍然成立。也就是说，对图 2.4 进行补充实验时，得到的数据应在延长的虚线上。前已述及，可以用图 2.4（b）的方法进行无穷尽的测量，结果表明，当测量尺度为无限小时，周长是无穷大的。但是如果在 λ 较大的相反方向外推，就会得到与断面结构不符的错误结论。

为理解 Richardson 曲线中用较大尺度，例如 λ 大于最大 Feret 直径的 0.3 倍测量断面轮廓的困难，我们可考查一下用内转式步长法研究一系列结构不同的椭圆的数据。不过，在对不同椭圆进行测量之前，我们先看一下用内转式步长法测量圆周长可能得到的结果。既然几何学和数学物理中遇到的无量纲常数 π，是圆周长与直径之比，我们就可以期望用内转式步长法得到 π 值。用这种方法研究圆似乎是无意义的，但是，我们可以通过考证无量纲数 π 的历史，学到许多有关研究曲折轮廓线的知识。

谁也不能断定古代的工程技术人员是在什么时候意识到精确测得的圆周长除以直径会得到一个常数的。由于无法通过理论计算得到 π 的准确值，π 值的确定一直强烈地吸引着许多科学家和工程师们。即使到现在，人们还在用大型计算机求取具有更多位小数的 π 值，以期某一天能得到这个似乎带有无止无尽位小数的 π 的准确值。数学家认为 π 是一个无理数，但这不意味着它是一个没有“理智”的数（可理解为没有定值的数，尽管它可能会使某些试图求出其准确值的人失去理智——译者注)。为理解单词“无理性”(Irration）的数学用意，我们有必要知道，在拉丁语中“Ratio”的意思是“理解和推断事物的能力；计算和想象数据的能力。”在日常用语中，一个“理性的”(Ration）人是思想控制行为的，而“无理性的”(Irrational）人是指不讲道理、变幻莫测的。

在数学上，无理数是指无法通过计算得到的数。在后面的章节中，我们将看到，尽管无法算出 π 的准确值，但我们可以在数轴上标出它的位置。

英语单词 Ratio 源于拉丁语，原意为定量思考和准确计算，在数学中，它表示一个数除以另一个数的特定运算。例如，我们已经定义了微细颗粒的纵横比等于颗粒断面的长度除以宽度。希腊语中用于表示“推理能力和计算能力”的词是“Logos”，用于表示数的词是“Arithmos”，希腊科学家把拉丁数学家所谓的“Ratio”称作“Logo arithmos”，该词在引进英语时稍稍做了点变化，被写成了“Logarithm”(对数)。“Logarithm”是指

用两个数的比表示的数。Richardson 的曲线中所用的对数坐标就是把图上的每一个数换算成对某一个量的比值，而这个量在坐标轴上则变为 1。苏格兰科学家J. Napier（1550—1617）用“对数”（Logarithm）表示“比例数”（Ratio numbers），他发明了一种用比例数进行乘除运算的方法，并计算出了第一张对数表，这些对数表在电子计算器诞生之前曾被世世代代的学生所使用[7]。

最早从事 π 值理论计算的科学家之一是希腊的 Archimedes（287—212 B. C）[8,9]他在圆内和圆外画了一系列多边形，如图 2.5（a）所示。这些多边形的周长可以用边长乘以边数的方法求得，然后把周长估计值用圆的直径标准化。多边形的边数越多，其周长值作为圆周长的近似程度越好，这可以从周长近似值随边数变化的趋势中看出，见图 2.5（b）。

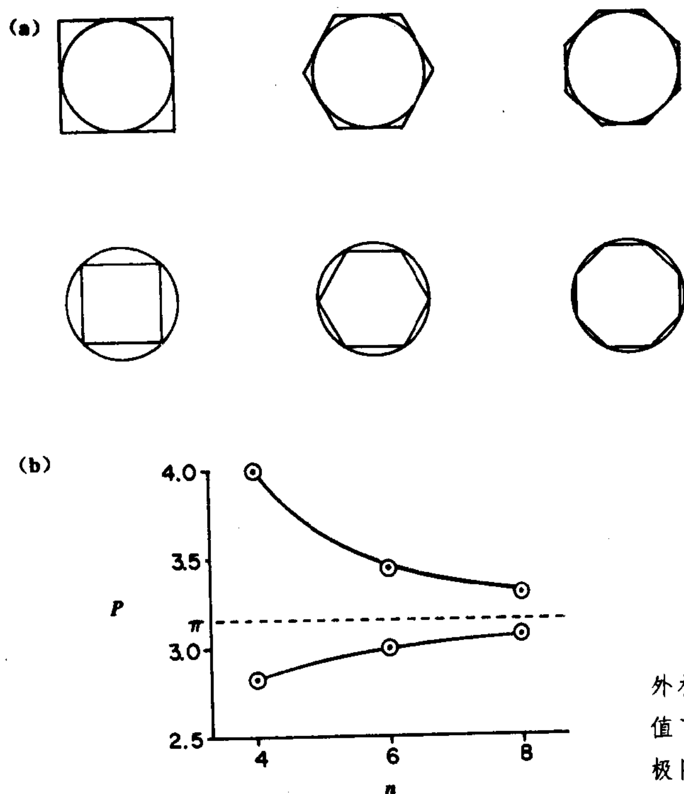


图 2.5 Archimedes 用在圆内和圆外构造一系列多边形的方法估计 π 值，π 值可以通过多边形边数增加时周长值的极限来估计。P 为多边形的周长，n 为多边形的边数

可以看出，圆的内接多边形和外切多边形的周长值都收敛于已知的 π 值。构造边数大于 8 的多边形是一个很复杂的过程。读者稍加考虑就会知道，用于研究曲折边界的构造步长法就是对 Archimedes 测量圆周长这一方法的改进，从而避免了必须构造具有确定边数的多边形的麻烦。因此，如果我们用经直径标准化的步长去测量圆周长，或用同样的方法测量大不列颠海岸线及图 2.4 所示的曲折轮廓线时，我们最终需要一个较短的边来使多边形得以封闭（如图 2.6 所示）。就像我们在图 2.4 中所做过的那样，我们可用下式估计周长

$$P=n\lambda+\alpha\lambda$$

如果用估计的周长值与步长作 Richardson 曲线，可得图 2.6（b）。由图可知，如果用构造步长法测量圆周所得的数据作一曲线，该曲线将随 λ 的减小变得与 λ 轴平行，而且

以有限周长 3.14（标准化单位）为渐近线，即任意圆的已知 π 值。词典中渐近线的定义为“一条给定曲线可以无限靠近但永远达不到的直线”。

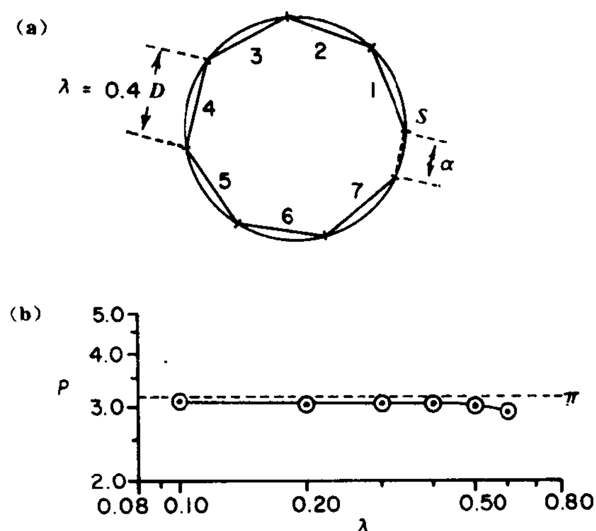


图 2.6　研究曲折断面周长值的构造步长法是 Archimedes 估计 π 值方法的改进形式。(a) 典型的构造步长法可得到的多边形周长 $P=n\lambda+\alpha\lambda$；(b) 估计 P 值的 Richardson 曲线，圆周长用直径的倍数表示；P 为圆周长估计值；λ 为步长；P 和 λ 均用圆直径进行标准化

我们可以利用图 2.6 的信息，看一下怎样才能告诉一个机器人如何区别欧几里得曲线和分形边界，这一点是很重要的，因为对任何工业中的微细颗粒，其边界分形结构的理论计算最后都不得不通过能够区分颗粒形状的智能计算机来完成。利用图 2.6 的数据，可以把欧几里得曲线定义为：λ 值逐渐减小时，由周长估计算得到的数据连成的直线平行于 λ 轴，且在高分辨率（即 λ 很小）时其周长为一确定值的曲线叫做欧几里得曲线。这一定义似乎没有必要搞得这么复杂，不过要注意，许多对人脑来说显而易见的东西却包含着大量我们并不记得的识别模式。据说，有个天生就是瞎子的人，在中年时移植了一双眼睛，但他一直不会用新移植的眼睛来看东西，例如，他一直不能马上看出三角形和正方形的区别。为区分它们，他必须先用一只手按住其中的一个角，然后数出剩余角的个数。机器人是个傻子，教它们区别三角形和正方形是非常困难的，为此，我们必须提供一些“数角”的实验方法。在高分辩率下用构造步长法测得边界周长这一事实本身，就为机器人提供了一个区别曲折边界和欧几里得边界的简单而精巧的方法。

当我们用构造步长法研究比圆复杂的欧几里得图形时，会得到一些很有趣的结论。图 2.7 是用构造步长法研究一系列椭圆的结果，它来自于 Laurentian 大学一个学生的实验。从中可发现这样一个有趣的事实：在低分辨率（即 λ 较大）时，细长椭圆显示出分形特征。因为椭圆是欧几里得曲线，因此，在低分辨率下得到的分维数是一个虚构维数。这主要是由于细长图形内不适于构造多边形，从而用较大步长测得的周长值较小的缘故，这可以从图 2.7 中的数据看出。用较低分辨率去研究纵横比较大的曲折断面时，会从 Richardson 曲线中得到一个错误维数，这一事实是以色列 Hebrew 大学的 D. Avnir 博士首先指出的。我们能认识到作出图 2.7 的那个学生实际得到的椭圆维数 1.23 是虚构维数，这一点是十分有益的。它表明，如果人们过于想得到某一结论，这将不利于他的实验。他是如此地希望得到期望的结果，以致于不顾物理意义的接受实验数据。在 Avnir 博士有关虚构分维的危险性的最初演讲中，他把在低分辨率时研究椭圆（该椭圆的纵横比为 3.0）的

结果（图 2.7）称为“分形野兔”（Fractal rabbits），该词来源于这样一个事实，即错误分维数可以出现在任何地方，就像白色兔子从魔术师的帽子中跑出来一样[10,11]。

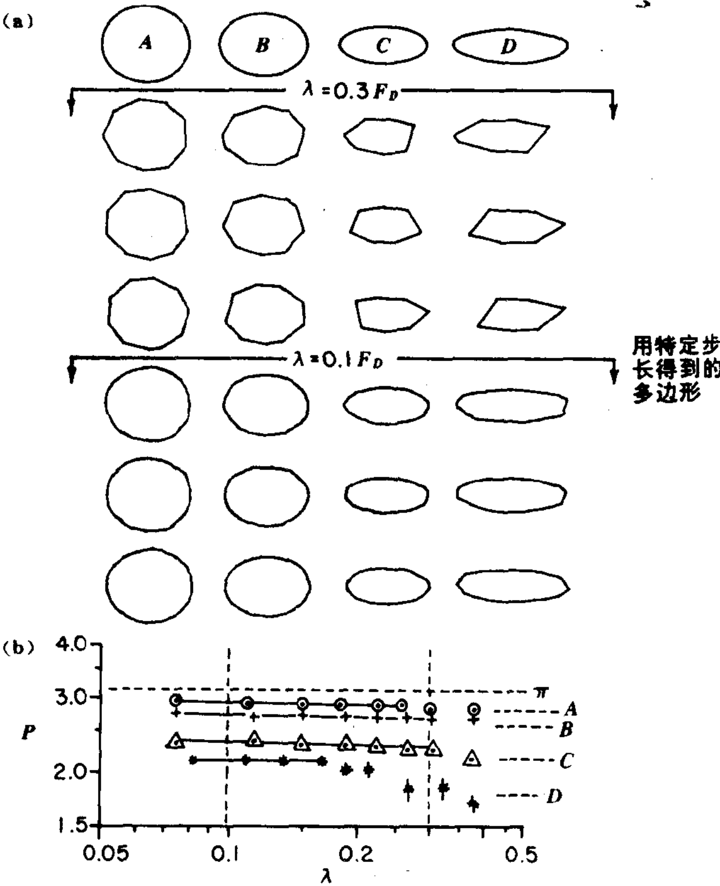


图 2.7　由于在细长图形内不适于构造边长较大的多边形，因而在低分辨率下用构造步长法研究细长椭圆时，会发现虚构分形

经过多年的研究，我已证明，在研究曲折断面轮廓时，最好把最低分辨率限制在最大 Feret 直径的 0.3 倍之内。如果你确实想使用较大的 λ，就必须经常检查从曲线中得到的结论的物理意义。同时我还发现，在处理纵横比大于 3 的图形时，必须仔细对待从 Richardson 曲线中得到的低值分维数[11]。

图 2.7 中数据的一个有趣特征是，在符合欧几里得几何特征的数值范围内，光滑图形的标准化周长介于圆的 3.14 和无限细长椭圆的 2 之间。因此，我们可以给椭圆定义一个与圆的 π 类似的形状因子 π'，它反映了任一给定椭圆的细长程度。这样，一个纵横比为 3 的椭圆可以用无量纲常数 π' 来描述，它的标准化周长为 2.4。对于图 2.7 中的所有图形，我们还可以注意到，当 $\lambda=0.1$ 个标准化单位时，π' 值的精度已经在 2%以内，在颗粒学中，人们往往要在给定的粒群中观察数以百计的粒子外形，2%以内的形状等级误差通常是可以接受的。Laurentian 大学正在用计算机实验，以期通过欧几里得图形和曲折图形的周长来计算常数 π'，进而判断细长断面的形状。

2.3　织构分形的发现

在前面的讨论中，我们已经探讨了在图 2.4 数据线两端进行试验的危险性。在其中

一个方向试验会得到无穷大，而在另一端讨论时则把我们引向虚构的"分形野兔"。我们还可以给出有关 Richardson 曲线中，哪些地方不能用大步长对断面进行研究的实际标准：现在让我们来看一下，当用很小的步长去研究实际断面轮廓时，究竟会发现什么样的结果。在用分形几何描述曲线边界的早期实验中，我们曾构造了图 2.8 所示的图形[5,12]，它与图 2.1 和图 2.2 的碳黑聚集体类似，只不过每个单元都是一个完美的圆。通过碳黑外形的观察，我们曾设想，如果用比单元粒子直径小得多的 λ 进行测量，应能发现聚集体的边界是欧几里得曲线，因为在高分辨率下，聚集体边界似乎应由圆构成，而不像在低分辨率下所看到的复杂曲线。人们必须记住，从总体上看这个图，一个人可以同时看到复杂的聚集体和图形的组成粒子。而输入构造步长技术程序的计算机在某一时刻只能"看见"它的"手指"为 λ 时所能"感觉"到的东西。对于较大的 λ，它可以看到曲折的外形，而 λ 较小时，它看到的是一连串的圆，只有我们给计算机设置复杂的记忆功能，它才能在同一时刻看到人所能看到的聚集体和圆。

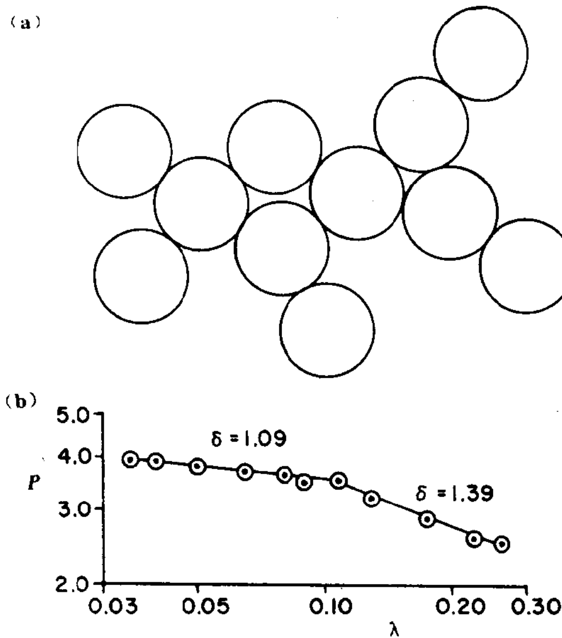


图 2.8　构造步长法研究由一系列圆组成的人造断面，得到的是两个分形斜率而不是起初理论上认为的分形加欧几里得斜率。(a) 人造聚集体外形；(b) 人造聚集体的 Richardson 曲线。P 为估计周长；λ 为步长；P 和 λ 均用断面的最大Feret直径标准化

图 2.8（b）是构造步长法测量人造圆形聚集体得到的数据。由图可知，实验点可以用所示的两条直线连起来，但没有一段能表明聚集体边界是欧几里得曲线。

起初，当我们期待看到斜率为 1 的欧几里得边界时，我们都对第二段数据线的斜率为 1.09 感到奇怪。然而，我们很快意识到，在步长为 0.03～0.12 个标准化单位时，对边界的研究只是找到这些圆在人造聚集体中的堆积方式，如果我们想发现欧几里得边界，就必须使用更大分辨率的步长。大家知道，在颗粒学术语中，1.09 的数据线斜率对应着聚集体的织构（Texture），而不是它的构造（Structure）。

在颗粒学中，单词织构（Texture）和构造（Structure）的区别可用图 2.9 予以说明，该图是图 2.2 中的碳黑聚集体之一。当画成图 2.2 时，聚集体中的两个小孔被忽略了，因为研究分维数时，这些孔并不是我们感兴趣的。拓扑学家在描述断面结构时则要考虑其内部孔的个数。对拓扑学家来说，一只杯子和一个圆环具有同一形状，它们都属于亏格

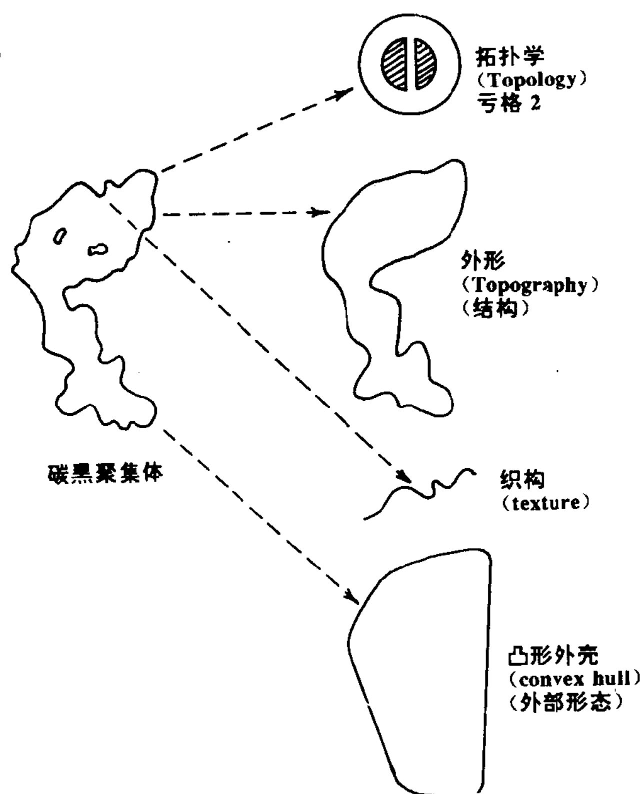


图 2.9 在颗粒学中，单词 Topology、Texture 和 Topography 的特殊含义

1，通俗点说，也就是两个物体的结构中都有一个孔。图 2.9 中的断面在拓扑学上称为亏格 2，有时图形的整体外形或结构可用其形态来描述。研究形状和结构时所用的单词“形态”(Morphology) 来源于希腊语中的单词“Morpheus”，原为梦神的名字，而梦神在人们的梦中制造出各种奇异的形状，从这一希腊语单词还产生了另一个英语单词“吗啡”(Morphine)，这是一种使服用者产生奇妙幻觉的药物。分维数，作为图形的外部特征，即聚集体总体构造的表征，被定义为构造分形 (Structural fractal)，并用符号 δ_S 表示。用步长 $\lambda=0.12\sim0.28$ 个标准化单位（相对最大 Feret 直径）测量时，图 2.8 所示聚集体的构造分维数 $\delta_S=1.39$。在图 2.9 中，断面的织构特征可用从边界上抽取出来的曲线表示，这种用于描述聚集体织构的分维数定义为织构分形 (Textural fractal)。

由于某些细颗粒在所有能获得的观察倍数下都表现出分形结构，颗粒学专家在确定细颗粒尺寸时就会遇到困难。因此，当我们观察图 2.9 所示的碳黑，并想确定其外形尺寸时，却无法找到与尺寸有关的外形结构的明显特征。确定颗粒尺寸的方法包括计算具有相同面积或相同周长的圆，而不规则图形的尺寸则可用等效圆直径表示。现在可以看出，对一个具有分形边界的细颗粒，通过测定图形的周长来确定其尺寸是注定要失败的，因为每次都要用更高放大倍数去观察细颗粒，而使得周长和等效尺寸随之增大。当我们研究三分 Koch 岛时，我们会发现，由于 Koch 岛具有有限大的面积和无限大的边界周长，其尺寸应该用某个建立在面积而不是周长基础上的量来表示。因此，从哲学意义上说，用与面积有关的量去描述任一图形的尺寸是比较正确的，因为即使图形的周长无限大，它的面积总是有限的。

同样，如果我们从 3 维空间去研究微细颗粒，也会碰到类似的问题，这是因为对具

有表面分形结构的细颗粒来说，用任何方法测得的颗粒大小都是不确定的。在3维空间中，具有分形结构的体系的体积是有限的，即使它的表面积为无限大。有趣的是，经过多年的研究，那些试图建立颗粒尺寸标准的科学家已经认识到，任何细颗粒的基本参考值应为它的体积，而不是它的外表参数或特征。尽管这些科学家们没有用分形几何的语言来表述他们的结论，但他们确实在实验中发现，即使当颗粒边界和结构由于分形特征是天生不确定时，颗粒的体积却是一个定量。

图2.10是构造步长法深入研究图2.1中碳黑断面结构的结果。由图可知，也存在表征织构维数1.10和构造维数1.32的两条数据线。

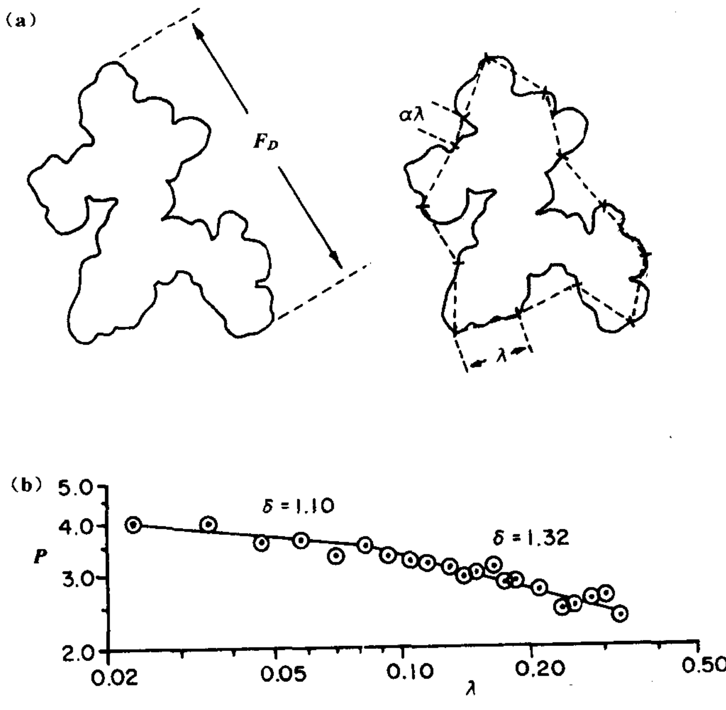


图2.10 用不同放大倍数详细研究图2.1的碳黑轮廓可以求得边界复杂程度的织构分维和构造分维。P为周长估计值；λ为步长。P和λ均已用断面的最大Feret直径标准化

研究曲折边界的分形结构时，所用的分辨率是计算边界分维数的关键因素，Laurentian大学研究细颗粒边界的构造步长法最初都是通过圆规手工完成的。显然这样的工作缓慢而乏味，人们当然想设法限制Richardson曲线中数据点的个数。在发现碳黑的织构分维和构造分维之前，我们曾在$\lambda=0.02\sim0.32$个标准化单位的较小范围内进行了一些早期实验。如果仅仅得到该范围内的几个数据点，那么人们就会很自然地忽略织构分维和构造分维的不同。因此，在我们对图2.1碳黑的早期研究中，我们从少量数据得到的分维数1.18实际上是两个不同分维数的平均值[13]。Flook发明了被称作"分解——膨胀"(Erosion－dilation)的自动图象分析技术（这将在2.4节作介绍），这使他能够更有信心地研究断面轮廓。他指出，我们报导的分维1.18是进一步研究得到的织构分维和构造分维的近似平均值[1]。由于数据点稀少，建立在初步研究基础上的试验结果往往不能辨别研究对象的细节，正如我们在本章后面可看到的那样。现在用于细颗粒断面边界分维数测量的高效计算机系统，减小了我们在研究图2.1碳黑时遇到的"细节遗漏"的危险性。

为帮助读者建立对具有不同分维数的曲线的直观印象，图1.5曾画出了一系列不同

曲折程度的曲线。为同样目的，Laurentian 大学的学生们构造了一些具有不同构造分维数的人造聚集体，这些聚集体及其构造分维数如图 2.11 所示。

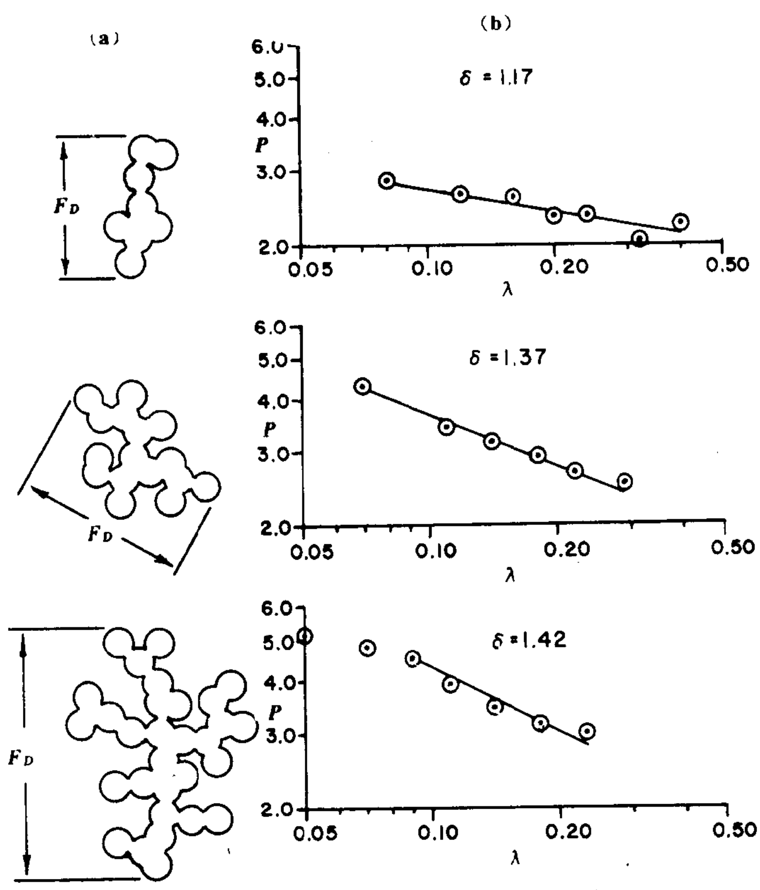


图 2.11　从对一系列人造球体聚集体的研究，看描述聚集体的织构分维和构造分维的物理意义。(a) 不同分维数的人造聚集体；(b) 圆以不同方式堆积时的织构维数

图 2.12 是构造步长法研究玻璃球人造聚集体的数据，这些人造聚集体被用于模拟柴油燃烧产生的烟尘。该人造聚集体是用球在同一平面上构造出来的。很多碳黑和烟尘聚集体都呈片状结构，就同雪片一样，因此，该烟尘模型不会使读者感到太人工化。由图 2.12 可以看出，Richardson 曲线可分成明显不同的三段，利用这些数据可以求得其构造维数为 1.22，织构维数为 1.15。该图还表明，当 λ 小于 0.04 个标准化单位时，聚集体边界是欧几里得曲线[14]。

在关于变量标准化以使周长和直径能表示成无量纲式形的讨论中，我们发现，虽然最大 Feret 直径是一个有用的标准化参考长度，就象在图中使用直径计算无量纲常数 π 一样，但其它的一些标准化操作有时也可使用。例如，在研究由等尺寸粒子构成的聚集体时，用组成粒子的尺寸作为标准化长度有时是很有用的。为此，在图 2.12 的上方坐标中标出了用球径标准化的步长（记作 λ'）。有趣的是，当我们所用的步长稍稍小于球径时，就可以得到织构分维。图 2.12 中这方面的数据将在第 3 章关于细颗粒边界分形描述的用途时讨论。

研究物体的分形性质时，区分理想分形和自然分形是很必要的。为说明这两类分形边界的区别，我们不妨更详细地讨论一下三分 Koch 岛的结构。这种岛的几何形状已在第 1 章的图 1.1 作过简单介绍。图 2.13 则是从等边三角形构造 Koch 岛的方法。需要注意的

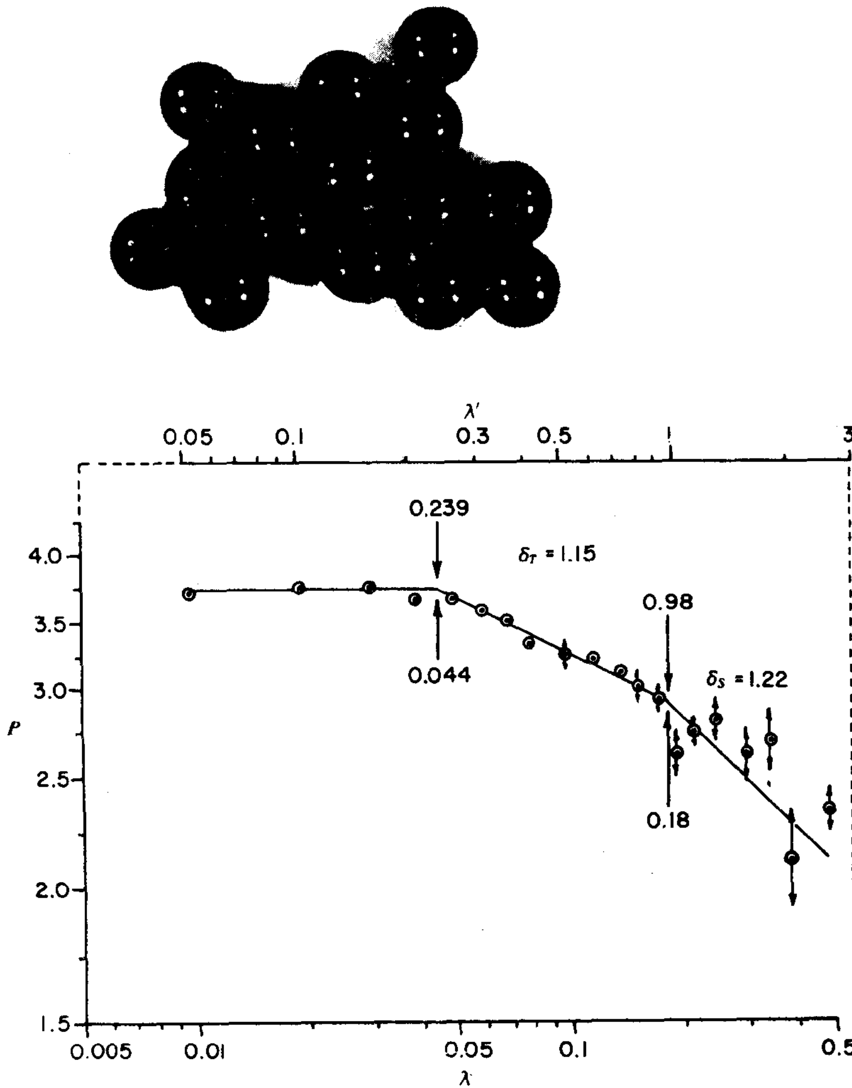


图 2.12 模拟的烟尘在三种不同分辨率下显示出三种不同边界。$\lambda=0.18\sim0.4$ 时，构造维数 $\delta_S=1.22$；$\lambda=0.044\sim0.18$ 时，织构维数 $\delta_T=1.15$；λ 小于 0.044 时，为欧几里得边界。P 为估计周长；λ 为步长。P 和 λ 均用最大 Feret 直径标准化。λ' 为步长，用组成聚集体的球形粒子的直径进行标准化，每个数据点都是给定步长的 5 个不同多边形的平均值，各个多边形是在周边不同点上构造出来的，数据点上的箭头表示给定步长时 5 个不同估计值的范围

是在图中我们已经给等边三角形和大卫王之星（Star of David，即六角星）取了新的数学名字，它们被分别称作第 1、第 2 级 Koch 岛。从等边三角形到六角形的几何构造首先包括把三角形的边分成三等分，然后把中间一份去掉，留下的缺口用一个以原三角形边长为 1/3 为边长的“帐蓬”（Tent）封闭，这种几何构造使三角形每边长增大 4/3 倍。在六角星的每条边上重复这一过程可以构造出三级 Koch 岛。

数学家把进行计算或几何构造的方法都称算法（Algorithm），因此，一个数学家会这样说：“n 级 Koch 岛的构造算法如图 2.13 所示。”当一般的读者浏览计算机方面的书籍首次见到 Algorithm 这个词时，往往会认为它和对数（Logarithm）有联系，其实这两个词风马牛不相及。Algorithm 这个词来源于英国人对阿拉伯著名数学家 Al－Kawarizmi（780—850A. D）名字的发音。Al－Kawarizmi 写了一本叫“Ilm Al－jabr wa'l Muqabalah”的书，从字面上翻译，这个题目叫“移项与相约的科学（The science of Transposition and Cancellation）”。在这本书中，Al－Kawarizmi 发明了我们现在所谓的代数（Algebra）这一数学分支，代数这个词是从书名中间的阿拉伯词“Aljabr”讹用过来的。

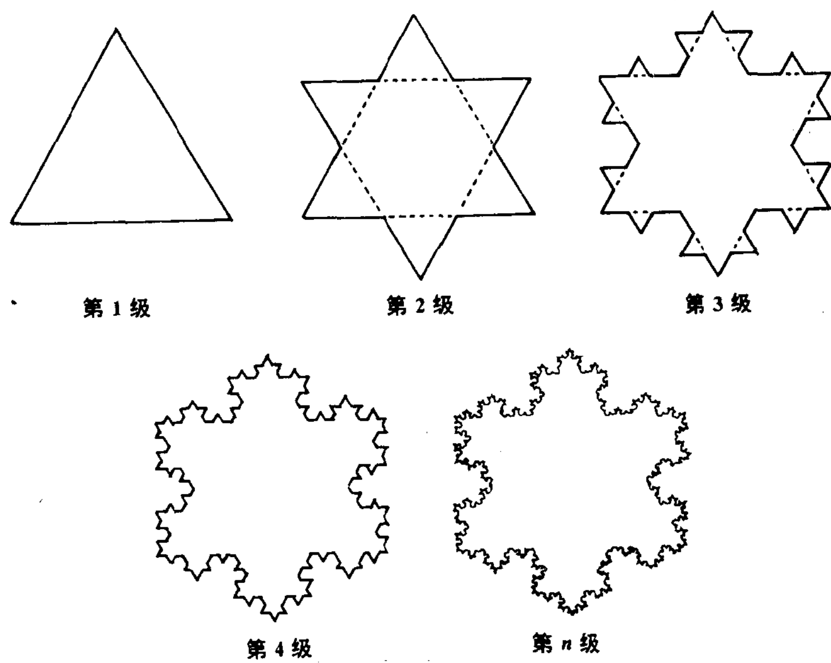


图 2.13 N 级 Koch 岛的构造过程，Koch 岛具有无限周长和有限面积

不喜欢代数的学生会认为现代代数课本还是用阿拉伯语写的呢！为纪念 Al－Kawarizmi 对数学的贡献，数学家们就把任何进行计算或几何构造的方法称作算法（Algorithm）。

如果我们增大 Koch 岛周长的构造过程一直进行下去，直到不耐烦为止，我们最后就会得到熟知的 n 级三分 Koch 岛。Vileikin 把这一数学图形描述成是“处处带刺”(Prickly all over）的。它处处不可微分而且在无限大的周长下包含着有限的面积。Mandelbrot 在他的书中讨论了画周长无限的图形（例如 n 级 Koch 岛）时所遇到的问题，也介绍了他的一些作法。三分 Koch 岛的周边从定义上来说是理想的分形曲线。如果人们取其中的一部分并在显微镜下观察，那么放大部分将和原来的整体完全一样。这就意味着如果我们仅观察理想分形边界的一部分，我们并不能从边界的曲折程度判断图象的放大倍数。因为在每个放大倍数下看到的图象是一模一样的。理想分形边界这种在不同放大倍数下“看上去一模一样”的性质在数学上称为自相似性。因此，理想分形曲线的一个重要性质就是任意放大倍数下的自相似性。

理想分形曲线自相似性的物理意义可以通过图 2.14 的数据来说明。用构造步长法对图 2.13 中的不同 Koch 岛进行研究，可以看出，当 Koch 岛的级数趋近 n 时，Richardson 曲线中的分形区增大，最后变成一条无限长的直线，其斜率与分维数 $\delta=1.26$ 有关（n 级三分 Koch 岛的该分维数值是 Mandelbrot 定义的，注意到在三分 Koch 岛的每一级构造中，周长增大到原来的 4/3，而 $\ln\frac{4}{3}=1.26$）。因此，理想图形自相似性的物理意义是，在任意分辨率下这类图的 Richardson 曲线总是只有一个斜率。现在我们可以这样来陈述自然分形与理想分形的重要区别，即自然分形只有在特定分辨率下才能被用于描述某一实际边界，任何自然边界在不同分辨率时可能是不同的分形边界和（或）欧几里得边界[15]。虽然这一结论是对曲线边界而言的，但对任何复杂表面和其它分形体系都成立。一个理想的分形表面在任何放大倍数下看起来都是一样的。

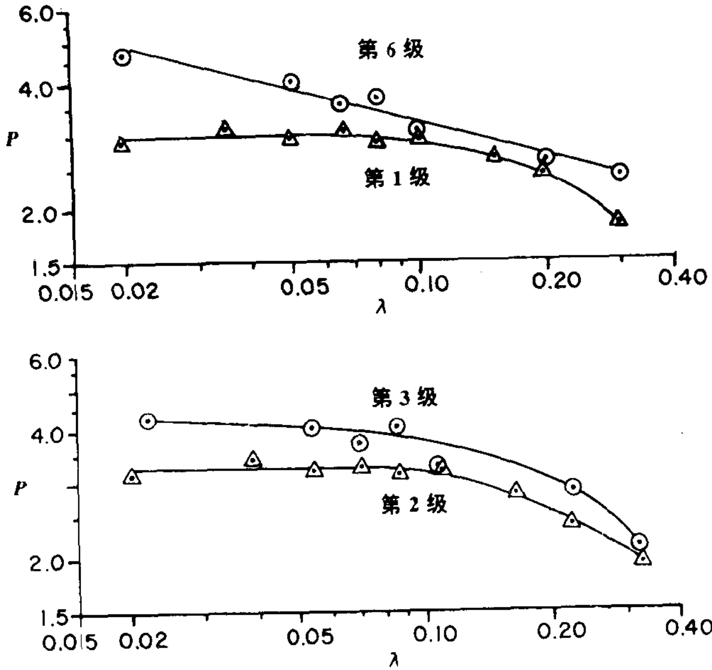


图 2.14　用构造步长法对不同级数的三分 Koch 岛进行研究，可以看出自然分形和理想分形的区别

Mandelbrot 在提出分维数概念的原始论文中指出，对任何自然边界的分形描述都受到观察上的限制。因此，在讨论自然海岸线的曲折程度时，他指出，当我们开始使用小于几百米的测量单位时，海岸线的整个概念就消失了。我的故乡（英国 Hull）座落在一个海湾上，那里潮夕的涨落就达 7.5m（米），海岸线的长度取决于进行测量的时间。波浪的起伏和潮夕的涨落使得海岸线的概念在测量码尺小于几百米时变得不确定了。同理，在能分辨出几个埃的电子显微镜下观察时，碳黑边界的整个概念也将消失。埃（Å）作为测量单位，在被纳米（nm）取代以前，已经用了很多年了，它是以瑞典物理学家 A. J. Ångstrom（1814－1874）的名字命名的，虽然它在现代科学中已不再使用，但在许多早年的科技书刊中屡见不鲜，所以人们有必要熟悉其大小。记住下述关系是很有用的：

$$1\text{Å}=10^{-1}\text{nm}=10^{-4}\mu\text{m}=10^{-10}\text{m}$$

当分辨率为 1nm 时，我们可以看见碳黑边缘的碳原子层，而边界本身则变得模糊不清。在这样高的分辨率下，究竟是什么构成了碳黑边界已不再清晰（关于模糊边界的测量将在 2.4 节叙述）。

在心理学中，有一个用来测试精神病人个性的 Rorschach 试验，它是瑞士精神病学家 H. Rorchach[16]于 1920 年发明的。在进行该试验时，大夫给被试验者提供一个随便做成的彩色墨水瓶，让病人说出看到墨水瓶时的感觉。据说，在这种试验中，有时候病人的反映更多的是关于大夫而不是病人自己的事！Mandelbrot 书中的许多图片就象 Rorscharch 的墨水瓶一样吸引许多科学家进入分数维领域。理想分形体系的计算机图象激励着观察者去认识自己那些有可能用分形进行有效研究的科学领域。当我第一次看到图 2.13 所示的一系列构造 Koch 岛的图片时，不仅 n 级 Koch 岛提醒我把分维数应用于碳黑研究，而且第 1 级、第 2 级、第 3 级和第 4 级这些中间图片还提醒我，或许能够用分维数来研究化学溶液中形成的晶体和破碎的岩石。

图 2.14 是构造步长法研究图 2.13 各种不同 Koch 岛的结果，从中可以看出自然分形的范围对科学家来说是个何等重要的信息。显然，显示出分形特征的数据线的长度随着 Koch 岛级数的增加而增加。从第 3 级 Koch 岛开始，岛的形状看起来像晶体聚集体，而当步长大约等于构造第 3 级晶体所用的子三角形的尺寸时，图 2.13 中分形斜率的范围显示出欧几里得曲线的特征。如果把图 2.13 想象成晶体，那么，当被研究的晶体聚集体的微晶粒尺寸减小时，描述晶体轮廓的自然分形范围将增大。因此，研究沉积法形成的晶体时，用于描述晶体聚集体的复杂结构的分维数可以用来表征该聚集体的形状，而且分维数的范围还反映了聚集体中微晶尺寸的信息（见第 3 章关于重晶石晶体的讨论）。

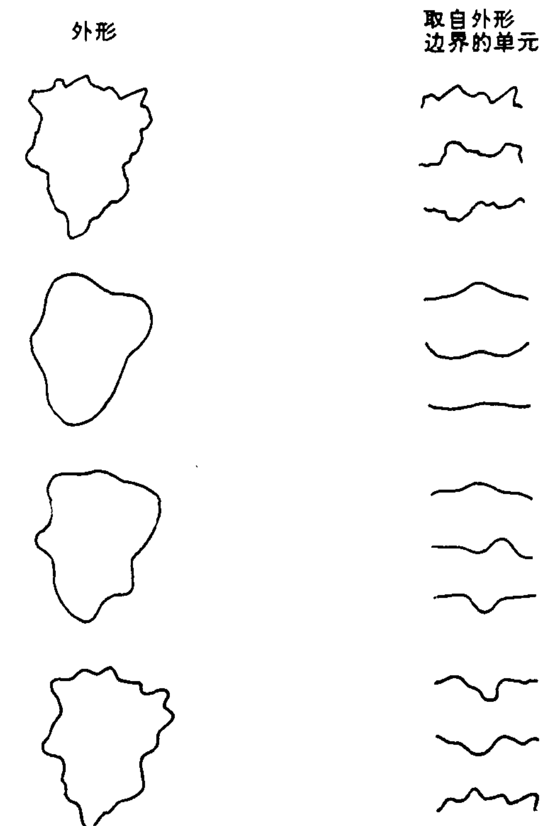


图 2.15 Flook 首先描述的一系列图形可用于说明自然界分形的统计自相似性的物理意义[17]

Mandelbrot 已经注意到，自然边界并不是在任意放大倍数下都呈现出自相似性。因此，他给分形结构下了一个不太严格的定义，以用于描述自然边界。他认为众多自然边界可以是统计自相似的，而不必严格自相似。我们可以通过观察 Flook 首先描述的图 2.15 中的一系列图形[1]，来探讨这一定义对曲折细颗粒边界的物理意义。当颗粒学研究采矿工业中破碎后的岩石时就会遇到这类复杂图形。对这类复杂细颗粒的描述是 Mandelbrot 分形理论的一个重要应用。统计自相似的意思是，虽然任一部分的放大结构并不严格自相似，但边界上的任何部分和其它部分看起来却是相近的。我们从图 2.15 的封闭曲线中取出了一些小单元，并放在相应曲线的旁边，可以看出，平均说来（或从统计意义上说），这些小单元看上去是一样的。用地理学的术语来说，自相似性意味着，如果我们看一条海岸线，它并不是在所有的绘图比例下都呈现出严格的数学自相似性，但任何部分的结构平均来说和其它部分是一样的。因此，如果我们站在一个统计自相似的海岸

线上，我们虽然知道自己正处于这个岛上，但并不能通过观察海岸线的结构来确定自己在岛上的确切位置，这就是所谓的统计自相似，本书在以后讨论各种分形体系时会多次涉及。

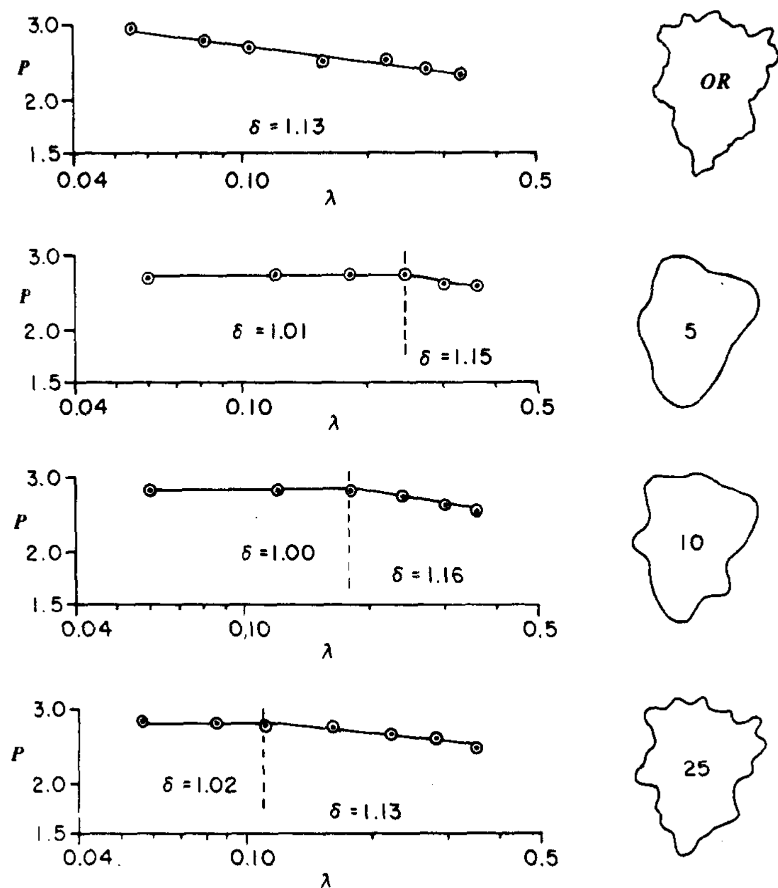


图 2.16 Flook 图形的构造步长法研究表明用分形理论描述系统结构时，其适应范围的重要性[15]

图 2.16 给出了用构造步长法研究图 2.15 的 Flook 曲线的结果。可以看出，各边界的构造分维基本上是一样的，肉眼看起来逐渐弯曲的边界实际上意味着显示出分形特征的分辨率范围的增大，这几乎对所有的边界都一样。图 2.15 提示我们，虽然一般说来，一条曲线的视觉弯曲程度反映了分维数的物理意义，但同等重要的是要认识到：边界的定量描述是一个很复杂的问题，它不仅包括用于描述体系的分维数大小，还包括分维数能作为描述参数的适用范围。一条曲线的分维数反映了它充填空间的能力。

织构分维的发现有助于我们更深入地研究分维数，实际上，构造分维和织构分维的差别已经帮助我们从操作上区分了自然分形和理想分形。我们还分析了研究者起初易犯的错误。在下一节，我们将稍详细地介绍测定复杂颗粒边界分维数的实验过程。

2.4 确定微细粒边界特性的实验方法

在讨论图 2.1 所示的有名的碳黑外形的描述过程时，我们曾考察过由于缺乏边界结构的详细数据，人们是怎样不经意地用织构维数和构造维数的平均值来表征碳黑边界的。同样，如果人们把整个边界的数据平均起来，有时就会忽略一些重要信息，这可以从有

关大不列颠海岸线的测量中得到说明。如果我们用一条平行于最大 Feret 直径的直线把大不列颠岛分成两半，对两段海岸线各自测量的结果列于图 2.17 中。从中可以看出，两部分海岸线可以用两个分维数描述，大不列颠西部海岸线比东部海岸线具有更高的曲折程度。这是一个重要的信息，两个不同的分维数值正好能和两部分海岸线所受的不同浸蚀力联系起来。而且还反映了这样一个事实，即大不列颠西部比东部更为丛峦叠障。整个大不列颠海岸线的实测维数为 $\delta=1.25$，这一分维数值正好介于西部海岸线较高值和东部海岸线的较低值之间。对于任一自动工作的仪器来说，要区别对待整个边界中不同的分形域是很困难的。正因为如此，当我们用计算机去测量细颗粒时，必须十分小心。不过，一个给定的颗粒群往往具有相似的整体特性。因此，人们常常可以在用计算机对数以千计的粒群进行详细测量前先用肉眼检查颗粒的轮廓，从而为计算机的工作提供一般性指导。

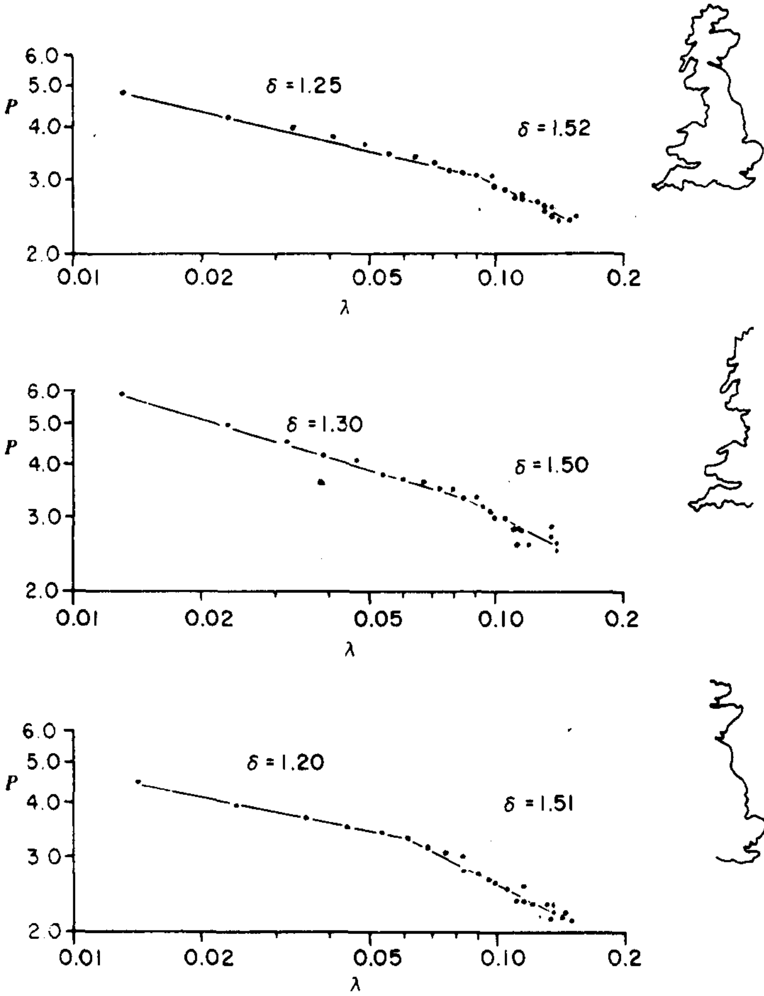


图 2.17 分维数测量技术应用于曲折边界总体，有时会忽略部分边界的重要信息。这可以从研究大不列颠海岸线时看出，大不列颠西侧海岸具有比东侧更曲折的结构。P 为估计周长；λ 为步长，P 和 λ 均已用岛的最大投影长度标准化；δ 为分维数

在有关细颗粒轮廓的早期研究中，我们逐渐意识到，出现在细颗粒轮廓上的裂纹或轮廓本身的对称性都将导致解释 Richardson 曲线的困难。由深裂纹引起的问题可以从图 2.18 看出。图中所示的细颗粒是润滑油中的碎砾。颗粒学专家可以在润滑油中看见累积的细颗粒，并通过这些粒子的形状和尺寸预测机械磨损情况及润滑油的性能。由于历史

的原因，人们把从润滑油中分离磨蚀性粒子的实验研究及其后的尺寸和形状描述称为 Ferrography 法[18,19]。该法利用高梯度磁场回收油中的微细磁性颗粒。这种技术通常能回收大部分磨蚀性细粒，因为即使是塑料碎片和碳质粉尘，在金属颗粒的作用下，也会具有能被磁场回收的有效磁性。这种技术最初是在考查复杂的喷气机械的磨损时发展起来的，但现在已应用于其它许多领域。例如，它已用于研究人体关节中的液体以及研究镶入损坏关节中的金属或陶瓷片的磨损情况[20]。早年，人们从含有金属取代物的关节中取出液体，通过研究液体中金属碎片的形状而发现：外科医生在给金属取代物钻孔以便将其安装到人体关节上时，由于没除净所产生的碎屑而导致额外的关节磨损。现在新的清洗这种钻屑的工艺已解决了这一问题[20]。

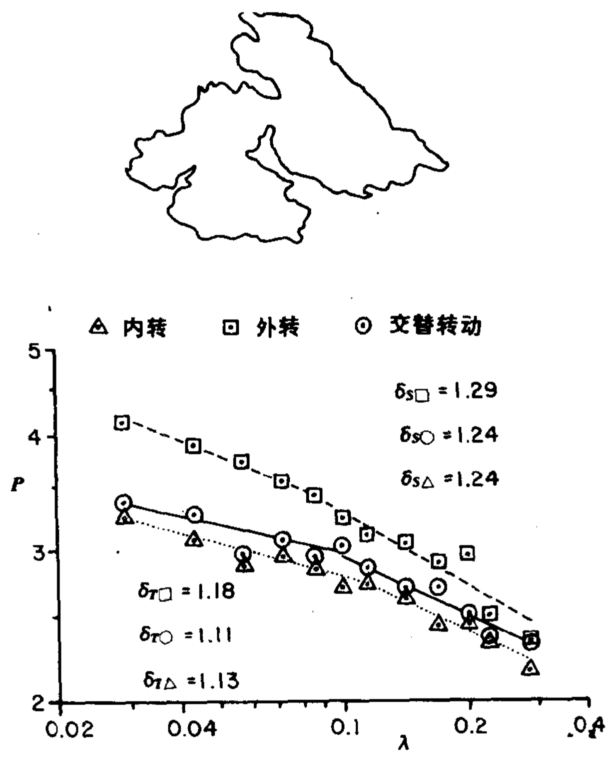


图 2.18　轮廓中深裂纹的存在有时会破坏 Richardson 曲线的线性关系，更为精确的方法可改进某一构造步长法的研究结果。P 为估计周长；λ 为步长；P 和 λ 均已用岛的最大投影长度标准化；δ 为分维数

图 2.18 所示的磨蚀粒子中含有两条深深的裂纹，几乎切断粒子。当用构造步长法研究这类轮廓时，人们必须把步长减小到可以与裂纹最窄宽度相比较的程度，才能进行深入考查。这就导致在 λ 接近裂纹最窄宽度时周长值出现跳跃。周长值的这一跳跃常常解释成 Richardson 直线上数据点的分散，当与其它数据进行平均计算时，从裂纹处得到的数据使得分维数与其它稍有变化的研究方法所得的结果有所不同。图 2.18 为三种不同的构造步长法研究磨蚀粒子周长的数据，这三种方法是：

(1) 内转构造步长法。使用这种方法时，圆规总是从轮廓外侧向内转动，直到第一次和轮廓相遇。

(2) 外转构造步长法。使用这种方法时，圆规总是从轮廓内侧开始向外转动，直到和轮廓相交。

(3) 交替转动构造步长法。使用这种方法时，圆规的向内和向外转动是交替进行的。

从图 2.18 的数据可以看出，交替法测得的分维数介于内转法和外转法之间。我们还

要再次强调的是，轮廓线的自动检测常常使用的机器系统并不能分辨轮廓边界中的裂纹。这三种构造步长法的共同使用，再加上对各种方法得到的结果的比较，可以指导机器去发现轮廓中的裂纹。

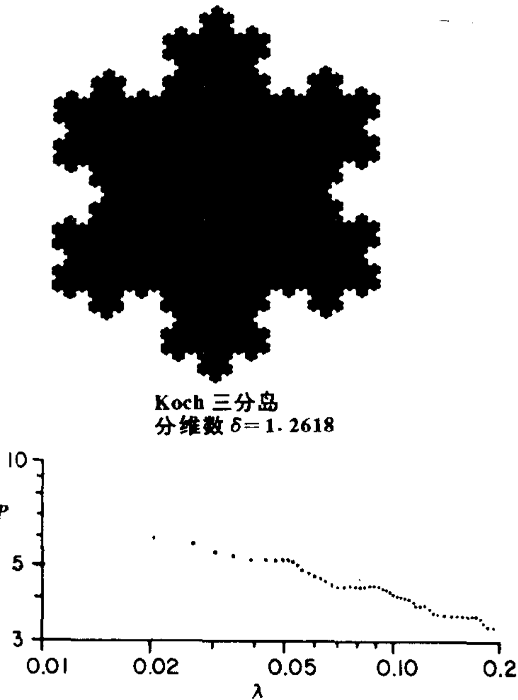


图 2.19 研究对称曲折边界时，Richardson 曲线上的数据出现了周期性波动，这可以认为或是一种错误，或是一种研究对称轮廓的方法。[21]。P 为估计周长；λ 为步长；P 和 λ 均已用岛的最大投影尺寸标准化；δ 为分维数

当早期的一些研究者们试图通过 Koch 三分岛边界分维数的测量来检查其实验方法时，他们测量几何体分维数的努力陷入了困境。实验数据出现了较大的离散性。对这种离散性的深入研究揭示了数据波动的周期性，如 Flook 曾报导[21]的图 2.19 所示。现在已经知道，这一周期性是由于 Koch 岛具有与初始六角星的六点对称性相关的对称结构。图 2.20 是外转和交替构造步长法研究 Koch 岛的结果。可以看出，交替法抑制了轮廓的对称性的影响。另外图 2.20 所示的信息类型可用于编程让机器检测任何对称性的曲折轮廓。

用圆规手工操作的构造步长法在曲折颗粒外形的研究初期是十分有用的。任何对分形感兴趣的人都应该用圆规亲自测几个边界，因为它会帮助你建立边界曲折度的正确物理意义。不过，每个用圆规手工测过曲折轮廓分维数的人都渴望有自动方法进行这一工作。我们现在将讨论一些计算分维数的自动过程。这种技术将会在其它 2 维边界的研究中得到应用，但我们将通过熟悉的图 2.1 的碳黑的研究来介绍自动测量方法的思路。

在前面有关估计不规则轮廓周长的讨论中，我们已经叙述过构造等边多边形的问题。其实用等边多边形研究曲折轮廓并没有多大优点，假如人们在使用不等边多边形时对每一边长的确定能不含偏见，研究边界时构造不规则多边形的客观方法是，在断面上画一组平行线，并把平行线与轮廓线的交点作为多边形的顶点边起来。这一构造过程如图 2.21 所示。如果直线的间距为 λ，我们可以利用著名的 Pythagoras 定理计算多边形的边长（Pythagoras 是公元前 582－497 年间的希腊数学家）

$$d_n^2 = (X_{n+1} - X_n)^2 + (Y_{n+1} - Y_n)^2$$

用上述方程去计算多边形的边长似乎是没有必要的，因为我们可以直接用尺子量出

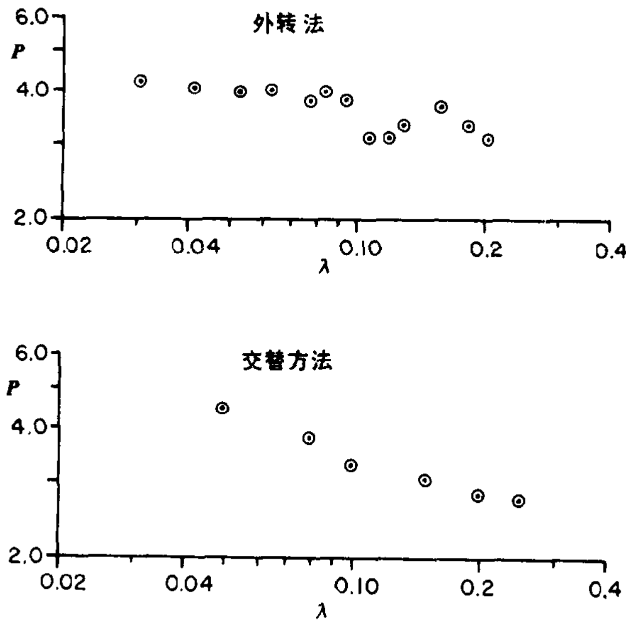


图 2.20 不同的构造步长法可用于探测或抑制轮廓对称性的影响，正如研究 n 级三分 Koch 岛得到的结果所示。P 为估计周长；λ 为步长；P 和 λ 均已用岛的最大投影尺寸标准化；δ 为分维数

边长。不过，用 Pythagoras 定理计算边长的重要意义在于，市场上许多用于测量细颗粒边界分维数的图象分析仪都是用一个 TV 摄像机把图象转换到图 2.21 所示的直线组上的，这些自动图象系统能把代表图象的直线端点存贮在它的记忆中，因此，人们可以给计算机编程来计算 Pythagorean 多边形的周长，通过计算间距为 λ 的一系列直线所围成的多边形周长，就可以计算轮廓的分维数。图 2.21 所示为估计周长随直线间距 λ 变化的 Richardson 直线。在实际测量时，计算机系统将只测量小 λ 的一组数据，然后用间隔一条、二条或更多条直线的较大 λ 去估计相应的周长，以模拟越来越小的分辨率的影响。通过比较图 2.21 和图 2.10 可知，Pythagorean 多边形法得到了周边的同一分维数值（注意图 2.21 只测得了碳黑轮廓的构造维数）。这种在图象分析仪上通过一系列 Pythagorean 多边形来计算轮廓分维数的方法，是澳大利亚的 A. Reid 博士 1980 年夏天访问 Laurentian 大学时首先告诉我的。这种测量分维数的方法可以在好几种常见的自动图象分析仪上实现[22.23.24.25]。

德国的 Kontron 公司是最早提供利用图象分析数据计算分维数这一程序的公司之一。Kontron 公司的设备所使用的基于周边坐标的分维数计算方法是由 Schwarz 和 Exner 首先描述的[2.26]。在他们的方法中，轮廓的放大图象放在一张许多微型计算机都带有的图垫上。利用适当的光笔沿周边运动，轮廓上许多点的坐标就会输入到计算机中。图 2.22 对这种方法有稍许改变，这里，我们沿轮廓线取一系列等距点并测出每个点的坐标。读者稍加考虑就会知道，这种方法和在图垫上放置细网格坐标系统以确定坐标（即确定边界上的一点关于固定格子的位置）稍有不同，不过这种差别很小，计算过程则和图 2.22 所描述的一样。为在轮廓线上构造一个多边形，我们在轮廓线上行走，每步行走跨过的点数相同，并用一条直线把起点和终点连接起来。因此，如果我们沿轮廓线一步走了 10 个点，我们就会象图 2.22 那样构造出一个多边形（见图 2.22 (a) 中的左下图——译者注）。步长和估计周长象以前一样都已用轮廓的最大 Feret 直径进行标准化。为得到计算

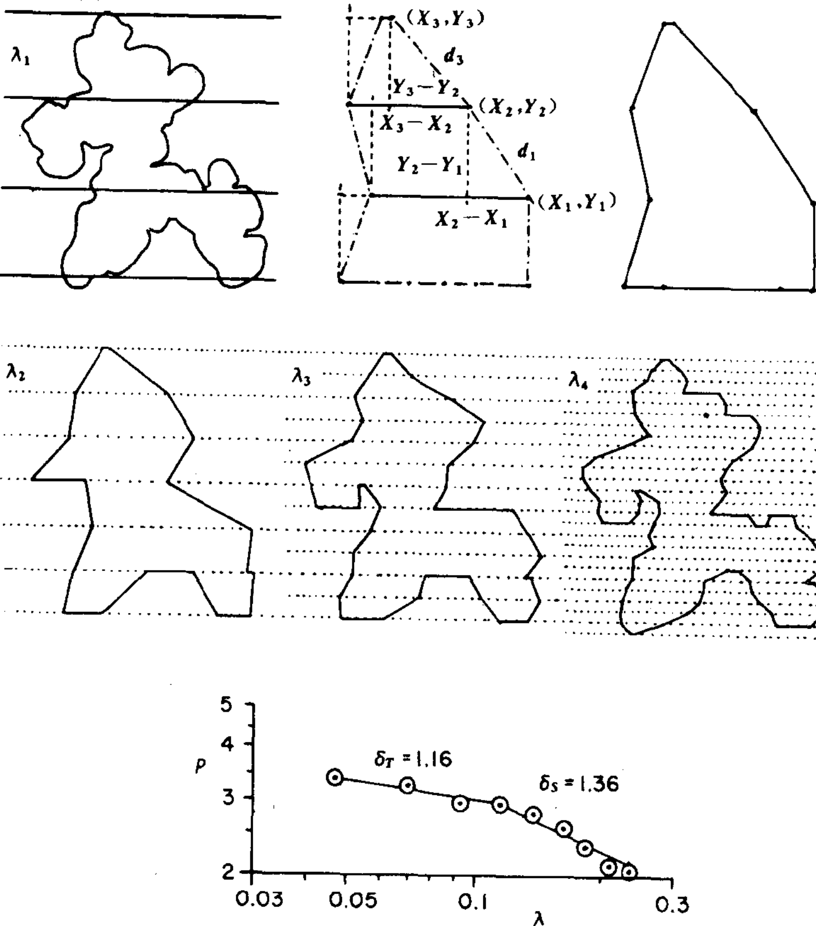


图 2.21 在轮廓上用不等边多边形对轮廓进行客观估计的系统方法，是把被平行线截得的点连起来，这些多边形的边长可以用 Pythagoras 定理计算。P 为建立在 Pythagoras 多边形上的估计周长；λ 为平行线间的距离；P 和 λ 均已用轮廓的最大 Feret 直径标准化；δ 为分维数

边界分维所需的数据，用不同步长构造了一系列多边形。等间隔多边形周长估计值随步长 λ 变化的 Richardson 曲线如图 2.22 所示。由图可知，这种方法测得的碳黑的构造维数与其它方法测得的数值相同。当我们把周边坐标输入与图垫相联接的计算机后，机器就会自动计算并打印出维数。在 Laurentian 大学，学生们已成功地在 Commodore 和 Apple 计算机上用图 2.22 所介绍的方法计算出了曲折边界的分维数。虽然利用这种方法在小型机上计算分维数要化较长时间，不过人们可以在很快地把整个轮廓数据输入计算机后撒手不管，让计算机慢慢运算好了，它会在算完后给你打印出分维数值（见第 3 章有关宇宙粉尘边界测量的讨论）。

前面介绍的所有图象分析过程最后都要通过机器或人去确定轮廓边界的准确位置。因此，使用图垫的学生需要观察轮廓图象，并用描边界的方法确实轮廓的位置。在电视摄像计算机分析系统中，计算机的电子逻辑线路必须准确判断电视摄像机电子束通过轮廓的时间。当我们使用圆规时，操作者也必须确定什么时候圆规与轮廓相交。遗憾的是，许多分形边界是模糊不清的。当人们检查这种模糊边界时，并不知道边界的确切位置，有时甚至连猜想的余地都没有。当我们在地面上观察云彩时，云似乎是有边界的，不过，这个边界是通过我们的眼睛大脑系统确定的，任何乘飞机进入过云彩中间的人都知道，云彩的起止边界是模糊不清的。现在，我们将介绍测量具有不确定边界物体的分维结构的方法。测量模糊边界分形结构的方法，是基于 Minkowski 最初提出的估计不确定曲线

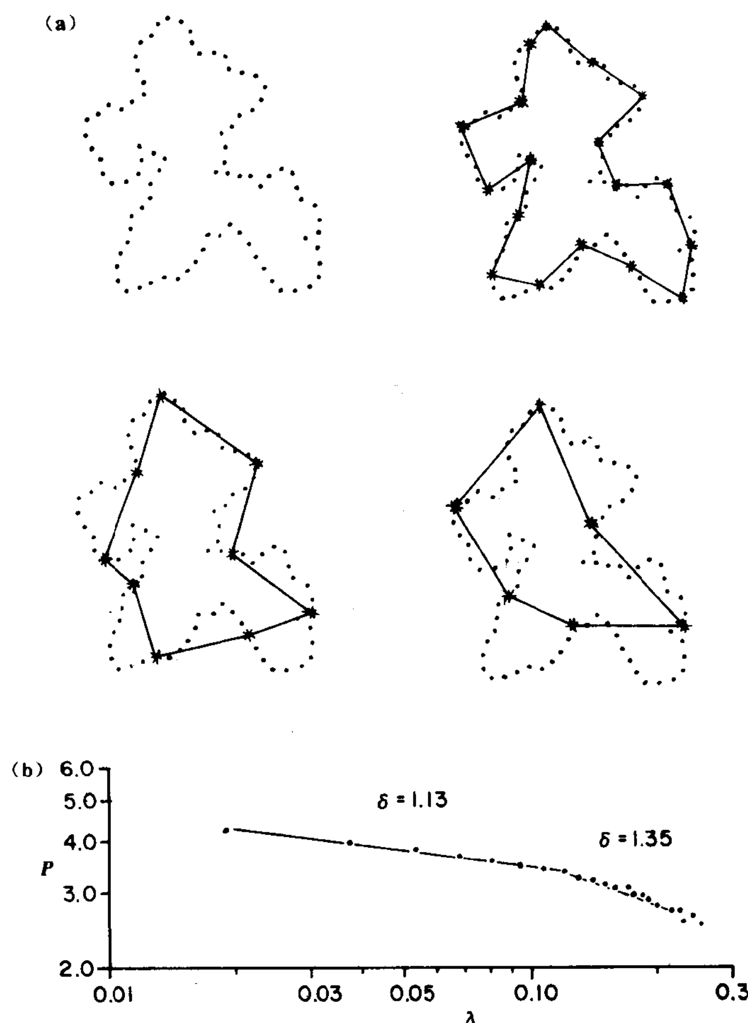


图 2.22 在曲折轮廓线上构造不规则多边形的另一种方法是在轮廓线上标出一系列等间隔(即中间隔有相同点数——译者注)的点(最后一点除外——译者注),连接这些点即得一不规则多边形。P 为用等间隔构造的多边形的估计周长;λ 为沿轮廓线的等间隔距离;P 和 λ 均已用最大 Feret 直径标准化;δ 为分维数

(例如 Koch 曲线)长度的原始数学方法。Mandelbrot 在他的书中讨论分形曲线时曾讨论过 Minkowski 方法的历史。根据 Minkowski 的方法,人们可以想象在模糊边界的每一点上画一个圆,这些圆交错在一起形成了边界带。由于这一边界带拉直时象一根香肠,这种模糊曲线的测量方法称作 Minkowski 香肠法。在测量这些交叠圆的面积时,我们没有必要知道边界带中圆的个数。然后用边界带的面积(原文误为长度——译者注)与圆的直径之商作为边界长度的估计值。在这种方法中,圆的直径是估计不确定边界长度时的分辨率参数。Mandelbrot 指出(见参考文献[1,18]的第 1 章),这就象让一个人在海岸线上摆橡胶轮胎来测大不列颠海岸线的长度一样。人们没有必要去关心轮胎下面海岸线的位置,而只需保证海岸线和轮胎的某一位置接触。如果人们用这种方法测定了海岸线,就可以用轮胎覆盖的面积代替边界带的面积,然后用轮胎的宽度去除边界带的面积,从而得到海岸线长度的估计值。整个过程如图 2.23 所示。在该图的下半部分,边界带已经被拉直,从中我们不仅可看到 Minkowski 香肠的起源,而且可以看出我们没有必要知道位于圆中间的边界是否清晰(要提请读者注意的是,Mandelbrot 在描述这一数学过程时,介绍了 Minkowski 香肠这一词的不同来源,见其专著的 33 页)。

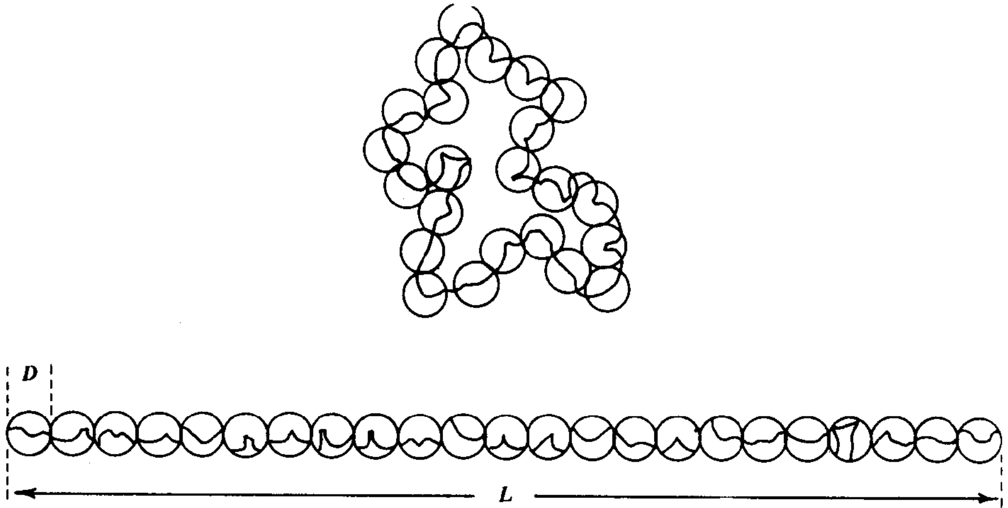


图 2.23　Minkowski 香肠法可用于估计不确定边界的长度

科学文献中，已经介绍过两种用 Minkowski 香肠模型计算分维数的不同方法，这两种方法虽然联系紧密，但却是各自独立发展起来的，它们分别是马赛克合并法（Mosaic Amalgamation）和分解放大法（Erosion－Dilation）。我们首先介绍马赛克合并法，因为它比较容易用图示法说明。从直觉上来看，我们可以说马赛克合并法就是用正方形轮胎去获得 Minkowski 香肠。把要研究的轮廓用矩形格子覆盖，如图 2.24。位于边界上的方格可看成是覆盖周边的轮胎。人们不必去确定周边的位置，而只需知道其是否位于某一格子上。为估计边界轮廓的长度，可数出覆盖边界的正方形数目，则代替实际轮廓的边界带的面积可用下式计算

$$面积=n\lambda^2$$

式中 λ 是格子的边长。周长估计值就等于该面积与格子宽度之比。用格子覆盖轮廓时，人们实际上是把图象转换成方格子的镶嵌物。颗粒学家通常对给定分辨率 λ 下测得的轮廓面积和周长感兴趣。面积的一个正确估计是轮廓内部的格子数加上位于边界上的格子数的一半。这种面积估算法避免了模糊边界带来的麻烦，而且不必通过与标准面积比较来估计位于轮廓上的面积，通过比较估计轮廓面积在颗粒学中是一种广泛应用的技术（详见文献〔5〕中关于面积测量的讨论）。在本书第 3 章研究云彩的分维数时，我们将用这种方法计算曲折轮廓内部的面积。

为计算边界的分维数，我们可以把图形转换到尺寸不断减小的一系列马赛克上，并以估计周长和马赛克的边长作 Richardson 曲线。

图 2.24 给出了已多次研究过的碳黑轮廓的分维数及用于计算分维数的马赛克。一种称作 CCD 的新型电视摄像机可直接把图象转换到马赛克上，并通过贮存每一块“马赛克”的位置以及它是处于边界内部、外部或边界上的描述而把整个图象存贮起来。对 CCD 电视摄像机而言，用马赛克转换法计算细颗粒边界的分维数是很简单的事情。

许多显示科学信息的图象系统都是以马赛克形式显示图形的，用计算机术语说，马赛克中的每一单元叫做象素（Pixel）。这个单词是词组“图象元素”（Picture Element）的缩写。实际上，计算分维数的马赛克转换过程是按与前述相反的顺序进行的。在一个自

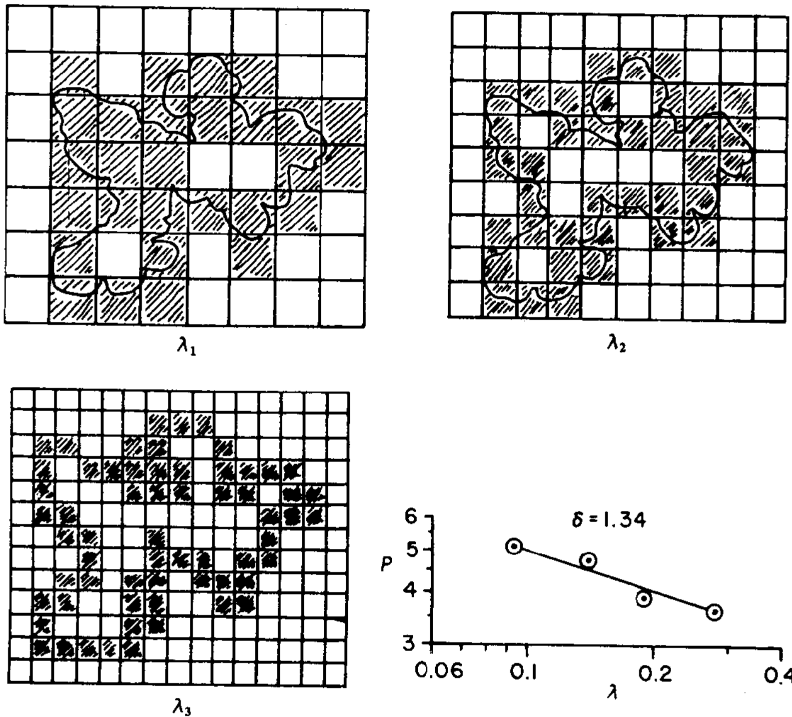


图 2.24 Minkowski 香肠法可以通过把图象转换到马赛克上并把每块马赛克看成是覆盖在边界上的正方形轮胎来实现。马赛克转换提供了研究边界分形结构的一种方法，这就是所谓的马赛克合并法。P 为估计周长；λ 为马赛克的边长；P 和 λ 均已用最大 Feret 直径标准化；δ 为分维数

动系统中，被研究的图象将以尽可能小的象素尺寸转换成马赛克，用越来越大的象素观察轮廓时，计算机则把邻近的一组小象素合并。马赛克合并法最初是作为手工处理图象的方法而出现的，但这种方法将由于图象分析仪在微细颗粒学中一门建立在 CCD 电视摄像系统基础上的学科中的应用而得到完善。

在用于研究细颗粒体系的图象分析仪的发展初期，一个持续存在的问题是，扫描线经过曲折轮廓的两个部分时引起的麻烦。这一问题如图 2.25 (a) 所示。要判断扫描得到的两条短线段是属于同一轮廓还是属于不同轮廓，这是很困难的。另一个问题是，许多细颗粒轮廓上有一些小孔，这也会给以线性扫描判断为基础的图象分析仪带来困难，由小孔带来的判断问题如图 2.25 (a) 所示。用线性扫描判断系统研究细颗粒体系时，还有一个主要问题，就是在计算视野中的颗粒数目时，会有一些细颗粒相互重叠（如图 2.25 (b) 所示)。这时机器如何认别是两个颗粒而不是一个颗粒呢？

为解决扫描断面时出现的多条扫描线的解读，以及那些只是接触而并未混合的颗粒的判断问题，细颗粒图象分析仪的研究者们开发了一种称作分解膨胀的判断方法。单词“分解”(Erosion) 来自两个拉丁语单词，“ex” 和 “roder”，前者的意思是 “从……”，后者的意思是 “啮，啃”。当一个物体被浸蚀 (Erode) 时，它就会象被一群虫子吃掉一样地收缩。为理解上述方法，可构造一个由易于分离的单元组成的聚集体，并在图象分析仪的计算机处理部分增加一种能精确地浸蚀图象的功能。为此，将图象的轮廓以点阵方式存到计算机中。然后，编制出一个程序，该程序每次能删掉边界上的一个象点。每当边界上的一个点被浸蚀后，机器就检查剩下的点阵图象，看轮廓被浸蚀后是一个图象还是二个图象。图 2.26 是用 Dapple 图象分析仪浸蚀图 2.1 的碳黑轮廓的过程[28]。

可以看出，经过 9 次浸蚀后，轮廓开始分裂成 3 个主要部分；经过 11 次浸蚀后，轮

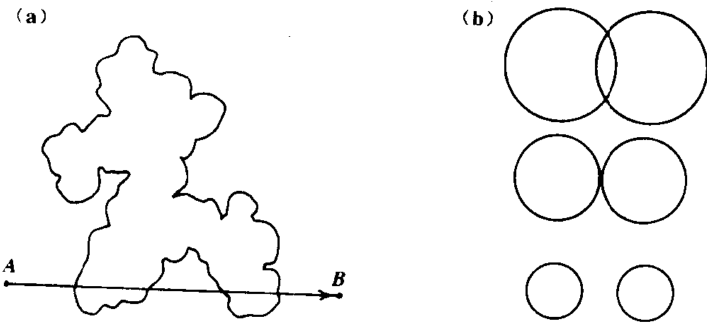


图 2.25 70年代图象分析仪上使用的线扫描系统在检测包含深裂纹的轮廓时会遇到麻烦，同时，有时它会把肉眼看上去刚有点接触但显然是两个粒子看成一个粒子。(a) 扫描线 *AB* 在断面上截得两条短线段，在没有任何其它信息时，图象分析仪会把它看成是两个小颗粒，而不是一个颗粒；(b) 自动图象分析仪会把视场中两个刚交叠的小颗粒当成一个大颗粒

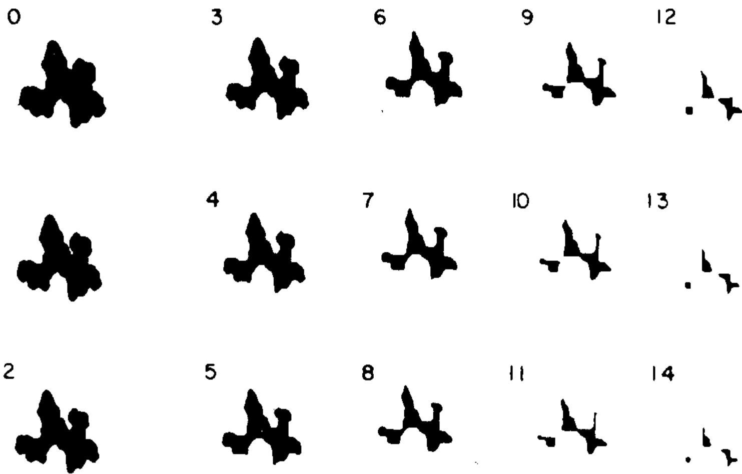


图 2.26 图 2.1 所示图形轮廓的重复象素浸蚀表明，原始集团是由 3 个或 4 个子单元碰撞而形成的

廓几乎分裂成 4 部分；但是，即使经过 14 次浸蚀后，构成原始碳黑的 3 个部分仍清晰可见。由此我们认为，原始碳黑可能是由 3 个或 4 个正在生长的颗粒集团碰撞形成的（见第 3 章烟尘结构的讨论）。

在图象分析仪中应用浸蚀方法时，人们必须在制定聚集体分解成实际组成单元之前，确定合理的浸蚀次数。例如，如果我们仅仅寻找接触的细颗粒，我们应该提供一个准则，依据这个准则，图象中经过 3 次浸蚀后尚未分开的部分被认为是同一个聚集体。当然不存在一个绝对的标准，允许科学家判断什么是完全结合的聚集体，什么是偶然碰撞连在一起的轮廓。

与浸蚀判断法相反，膨胀法（Dilation）是让线性扫描图象分析仪在统计显微镜视野中的细粒子数目之前，填补图象中的小孔或深裂纹。单词膨胀（Dilate）的意思是变得更宽。如果科学家真的看到一群电子浸蚀虫一点一点地吃掉他的图象轮廓上的象点时，他的瞳孔还真的会“膨胀”！膨胀过程从本质上说就是本章讨论过的马赛克合并。在高级的图象分析仪中，图象由成百上千个象素点组成。计算机可以通过这些象素的合并产生较大的马赛克，并以马赛克的形式显示图形。图 2.27 是在 Dapple 图象分析仪上对碳黑轮廓膨胀的过程，由图可见，经过 18 次膨胀以后，原始图形中的所有裂隙都弥合了。在测定轮廓的尺寸之前，人们必须把它浸蚀到原来图象的尺寸。图 2.28 列出了图象浸蚀回到原

始尺寸的过程。为便于比较，在图 2.28 的下端，原始图象的旁边列出了经过膨胀一浸蚀的图象，可以看出，新图象在结构上更简单了。

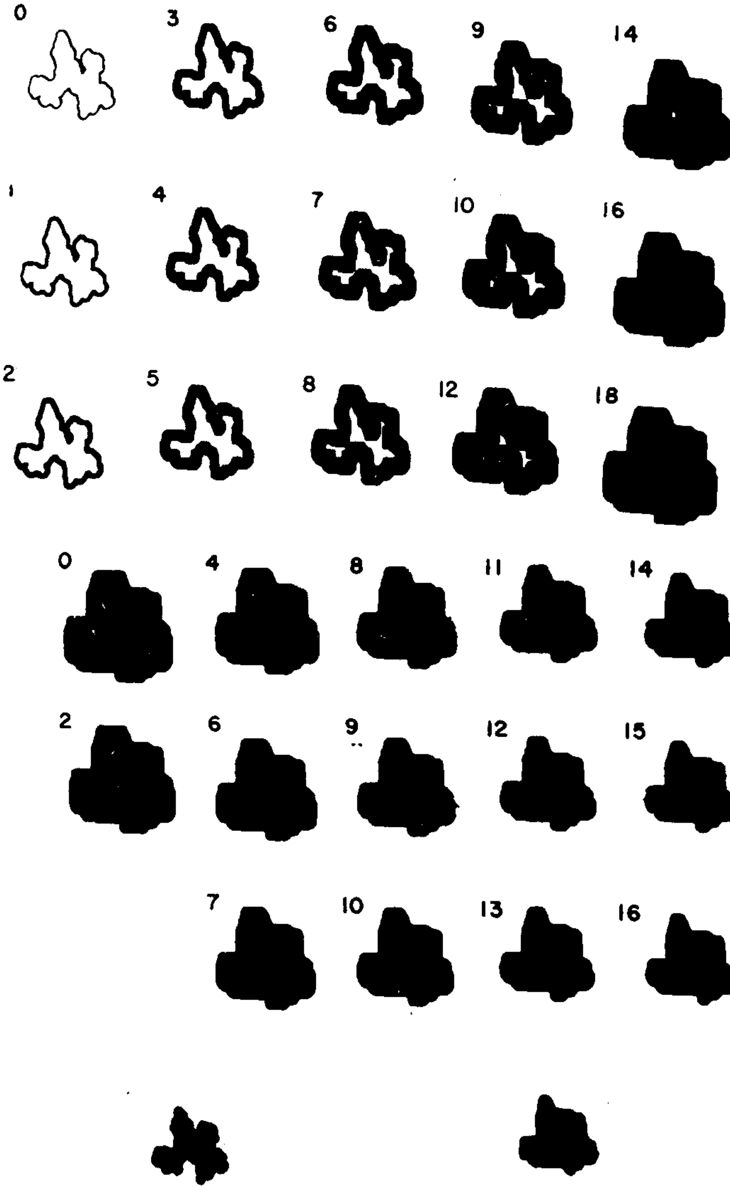


图 2.27 膨胀法能够充填内部的孔洞或图形轮廓上的裂纹，从而避免扫描线经过孔洞或裂纹时产生的问题

图 2.28 对图 2.27 中膨胀后的图象进行浸蚀，产生出易于用线扫描摄像机进行分析的简单图形

图 2.29 是 Flook 报导的模拟碳黑轮廓的膨胀图象[29]，A. Flook 于 1977 年参加了微细颗粒学方面的颗粒尺寸讨论会，而且是立刻发现分形描述的细颗粒边界潜力的代表之一。仅用喝一杯咖啡的时间，Flook 就在一张纸上画了一幅草图，用以说明在 Quantimet 图象分析仪上用膨胀法测量某一轮廓的分维数是多么简单[22]。他指出，膨胀的边界实际上就是 Minkowski 香肠，一个不断改进的膨胀过程就是用更大更好的标志来确定不规则边界的位置（注意，图 2.29 中的膨胀构成单元是 8 边形，其它构成单元如马赛克格子也能用于图形的变换）。Quantimet720 图象分析仪需要的逻辑单元 2D Amender 模块可以使研究者进行膨胀操作。

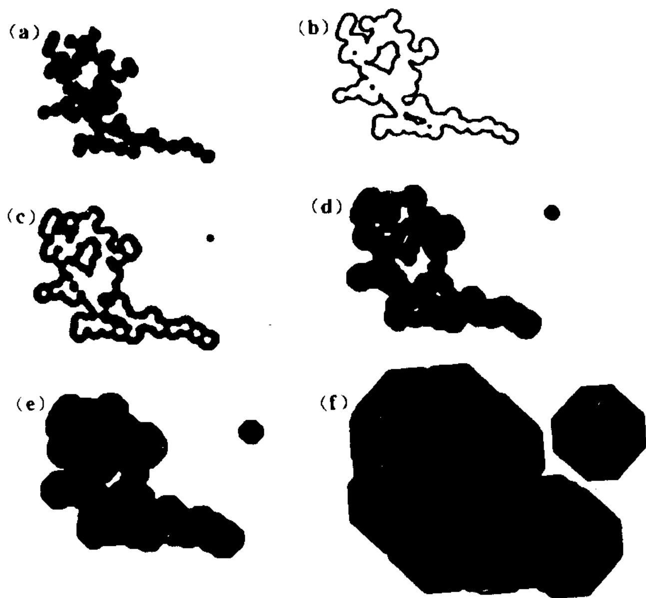


图 2.29 Flook 是第一个用膨胀法测量不规则轮廓分维数的人

Flook 认为，以每一步膨胀后测得的轮廓周长和构成单元的尺寸作图，可以求得轮廓的分维数。在很短的时间内，Flook 发表了用膨胀法测量分维数的方法[1]，此后他又发表了几篇关于分维数测定方法的论文[29,30]。

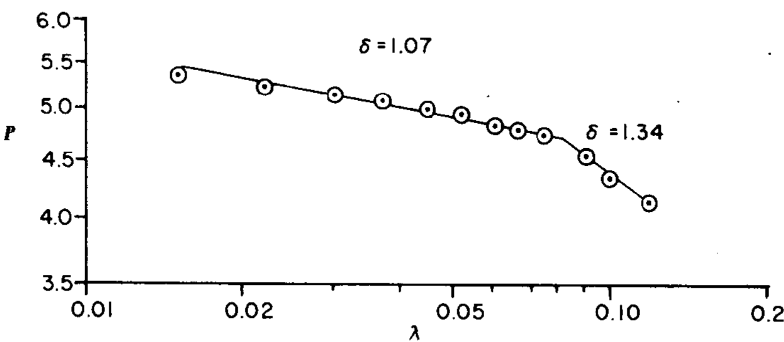


图 2.30 用膨胀法测得的图 2.1 的碳黑轮廓分维数值，与用其它图象分析方法得到的值相等

图 2.30 是用膨胀法在 Dapple 图象分析仪上测量图 2.1 碳黑轮廓分维数的数据。可以看出，用膨胀法测得的构造维数与其它实验方法测得的数值相同。对浸蚀膨胀法感兴趣的读者，可以进而阅读 Serra 的论文[31]。

参考文献

[1] A. G. Flook, "The Use of Dilation Logic on the Quantimet to Achieve Fractal Dimension Characterization of Texture and Structured Profiles," *Powder Technol.*, 21 (1978) 295-298.

[2] H. Schwarz and H. E. Exner, "The Implementation of the Concept of Fractal Dimensions on a Semi-Automatic Image Analyzer," *Powder Technol.*, 27 (1980) 207-213.

[3] A. I. Medalia and G. J. Hornik, "Pattern Recognition Problems in the Study of Carbonblack," *Pattern Recognition*, 4 (1975) 155.

[4] A. I. Medalia, "Dynamic Shape Factors of Particles," *Powder Technol.*, 4 (1970-71) 117-138.

[5] B. H. Kaye, "Direct Characterization of Fineparticles," Wiley, New York, 1981.
[6] B. H. Kaye, "Characterization of the Surface Area of a Fineparticle Profile by its Fractal Dimension," M.J. Groves (Ed.), in "Proceedings of Particle Size Analysis," Heyden, London, 1977, 250-259.
[7] See entry on Napier in I. Asimov's "Biographical Encyclopedia of Science and Technology," Revised Edition, Doubleday, Garden City, NY, 1972.
[8] For an interesting review of Archimedes' technique for estimating the value of π, see D.J. Fink, "Computers and the Human Mind," No. 43 in "Science Study Series," Anchor Books, Doubleday, Garden City, NY, 1966.
[9] P. Beckmann, "A History of p," Golem Press, Boulder, CO, 1970.
[10] Dr. Avnir's observations on the reality of fractal rabbits formed part of his presentation at the conference "Fractal Aspects of Materials: Metals and Catalyst Surfaces, Powder and Aggregates," organized as part of the annual meeting of the Materials Research Society, November 26-27, 1984. The book of extended abstracts of this Symposium edited by B.B. Mandelbrot and D. Passoja is available from the Materials Research Society, 9800 McKnight Road, Suite 327, Pittsburgh, PA, 15237, U.S.A.
[11] The reality of fractal rabbits has been explored in a set of lecture notes prepared by the author and used when presenting workshops on fractals. These lecture notes are entitled "**Fractals Rabbits are Real - Sometimes!**" These lectures were given for the first time at a workshop on fractal dimensions held during the conference on Powder Technology at Rosemont, Illinois, May, 1984. The lecture notes are available in booklet form directly from the author at Laurentian University. Many of the experimental problems of evaluating fractal dimensions from structured walk exploration techniques are discussed in an informal manner in these lecture notes.
[12] B.H. Kaye, "Fractal Dimensions and Fineparticle Science," in "Proceedings of the Powder Technology Conference," Rosemont, Illinois, published by Cahners Exposition Group, 1978.
[13] B.H. Kaye, "Specification of the Ruggedness and/or Texture of a Fineparticle Profile by its Fractal Dimension," *Powder Technol.*, 21 (1978) 1-16.
[14] B.H. Kaye, "The Description of Two Dimensional Rugged Boundaries in Fineparticle Science by Means of Fractal Dimensions," *Powder Technol.*, 46 (1986) 245-254.
[15] The multi-fractal structure of natural boundaries was discussed in detail by B.H. Kaye, "Multi-Fractal Description of a Rugged Fineparticle Profile," *Part. Charact.*, 1 (1984) 14-21.
[16] For a discussion of the use of the Rorschach in psychology, see J.V. McConnell, "Understanding Human Behaviour," Second Edition, Holt, Rhinehart and Winston, New York, 1977.
[17] A. Flook, "Fourier Analysis of Particle Shape," in Proceedings of the Fourth Particle Size Analysis Conference, Loughborough University of Technology, December 21-24, 1981, N.G. Stanley Wood and T. Allen, (Eds.), "Particle Size Analysis 1981-1982," Wiley Heyden, London.
[18] D. Scott, W.W. Seifert, and V.C. Westcott, "The Particles of Wear," *Sci. Am.*, 230 (5) (1974) 88-97.
[19] D. Scott, "Debris Examination – a Prognostic Approach to Failure Prevention," WEAR, 34 (1975) 15-22.
[20] C. Evans, "How Human Joints Wear - Learning From Machine Methods," *New Sci.*, November 9 (1978), 444-445.
[21] A.G. Flook, "Fractal Dimensions - Their Evaluation and Their Significance in Stereological Measurements," *Acta Stereol.*, Vol. 1, No. 1, Jan. (1982) 79-87.(Proceedings of the Third European Symposium on Stereology, part 2).
[22] The Quantimet image analysis system, used by Flook, is manufactured by Cambridge Instruments Ltd. of Melbourne, Royston, Hertfordshire SG8 6EG, UK.
[23] The computerized image analysis system known as the Omnicon System was manufactured and marketed by Bausch and Lomb of Rochester, New York. In 1985 the division of the company marketing this system was acquired by another company.

[24] A whole range of image analysis systems are manufactured by Ernst Leitz, B633 Wetzlar, Postfach 2020, FRG.

[25] An image analysis system known as Magiscan is manufactured by Joyce Loebl Corp., Marquis Way, Team Valley, Gateshead NE11 0QW, England. Several image analysis systems have been developed by Carl Zeiss, Oberkochen, Wurtt, FRG.

[26] The Kontron system used by Schwarz and Exner is manufactured by Kontron Messgerate, Breslauer Strasse 2, D-8057 Eching, FRG.

[27] The logic of the mosaic amalgamation procedure was outlined briefly in reference 13 and developed more fully in an unpublished set of lecture notes which circulated extensively amongst those who took up the challenge of developing systems for evaluating fractals. In the publications of these workers these lecture notes are referred to by the title B. H. Kaye, "Sequential Mosaic Amalgamation as a Strategy for Evaluating Fractal Dimensions of Fineparticle Profile." Laboratory Report No. 21, Institute for Fineparticle Research, Laurentian University, Sudbury, Ontario, 1978. The material presented in this chapter summarizes all of the essential information presented in that early set of lecture notes.

[28] The Dapple System is available from Dapple Systems, P.O. Box 2160, Sunnyvale, CA, 94087, U.S.A.

[29] A.G. Flook, K. Leschonski and W. Hufnagl., (Eds.) "The Characterization of Textured and Structured Particle Profiles by Automated Measurement of Their Fractal Dimensions," in Proceedings of Partech Symposium, published by Drukerei Heinrich Schuster, Nurnberg, 1979, 591-599.

[30] A.G. Flook, "A Comparison of Quantitative Methods of Shape Characterization," *Acta Stereol.*, Vol. 3, part 2 (1984) 159-164.

[31] J. Serra, "Stereology and Structuring Elements," *J. Microsc.*, 95, Part 1 (1972) 93-103.

3 分形的应用

3.1 优雅而实用的分形

80 年代初，当我参加学术会议时，有些同行和朋友问我："近来你在忙什么?" 当我告诉他们我在忙 "分形" 时，他们则常常礼貌地或者不那么礼貌地问我："分形是什么?" 经过对复杂的岩石和碳黑结构的简短讨论，这些人就有了分形概念的雏形。我想说服他们分维数可用来描述曲折的边界。这时，他们的下一个问题就是分形的用处了。我有时真想告诉他们分形不一定非得有什么用处。分维数是描述曲折体系的一种精致的技术，而精致是一种值得探索的内在魅力。当然，在回答分形用途的这一问题时，仅仅靠指出他的精致性还通常不能触发人们的兴趣。在一个应用科学靠实际部门资助的世界上，回答这一问题最好是从分形的直接应用说起，但愿由此也使那些受实用诱惑而研究分形几何的人们也能尽量领略分形几何理论的奥妙。因此，就像在这一章所要做的那样，在我们漫步的各个阶段，我们也会偶尔止步，转而考察一下所遇到的各种思想的应用问题。

3.2 金属粉粒和特殊金属晶体的分形描述

粉末冶金是冶金学的一个重要分支（冶金学是一门研究金属性质、应用及金属从矿物中分离的方法的科学）。在粉末冶金学中，机器零件和其它金属构件是通过对金属粉末加压成型然后再烧结处理而制得的。这个由德国科学家创造的词 "烧结"（Sinter）和英语中的 "灰渣"（Cinder）有关，它用来描述靠加热而使金属粉末熔结而单个粉末粒子不被熔化这一过程。当我 1955 年硕士毕业时，大不列颠政府曾要求所有学自然科学的毕业生要么到部队服役两年，要么自愿到国家重要部门去工作。M. J. Donaldson 先生（当时为大不列颠原子武器研究所分析化学主任）找到我要我加入他的小组并从事微细粒子特征描述技术的广泛研究。他之所以聘用我是因为我的硕士论文涉及到水油乳浊液中的微滴尺寸的研究，并且我也有志于继续探讨微滴和灰尘尺寸问题。加入 Donaldson 先生的小组后，我承担了两个主要任务，一个是研究金属铍粉末的尺寸分布问题，这种粉末用

于制造原子弹部件及实验用核反应器的中子减速器棒，另一个是表征用于制造核反应的燃料棒的二氧化铀和二氧化铍微粒的尺寸和形状。

用熔化的铍很难铸成构件，因为它结晶时形成的大晶体会使构件表面在进行机械加工或抛光时形成缺口，因此减速器棒是用压缩的铍粉经烧结而成的高密度铍杆所制成。我们知道经烧结处理可使铍杆的密度依赖于铍粉粒子的形状和尺寸分布。我的任务就是描述经过不同工艺过程所得到的铍粉粒子的形状和尺寸。这是一项十分艰巨的任务，因为铍是剧毒物。吸入微粒铍会引起肺部铍中毒（berylliosis），伤口上沾上铍将难以治愈并引起溃疡。因此所有研究用的铍粉必须严格控制，并与外部环境隔离。我对铍粉的研究使我得以进行对粉末冶金和吸入粉尘危害健康问题的一般性探讨。

金属粉末有不同的制造方法，而这些方法决定了粉粒的结构及表面能，后者则影响烧结的难易程度。图 3.1 所示为三种不同处理方法得到的三种不同类型金属粉末的轮廓。其中轮廓极不规则的粉末是电解产生的，该过程将在本节稍后讨论。这种由电解产生的粉末具有较高的表面能并可快速烧结。然而，正是由于它的轮廓太复杂，浇铸时十分困难，因而金属冶金学家必须经常在烧结所能达到的密度和烧结速度之间作出取舍。

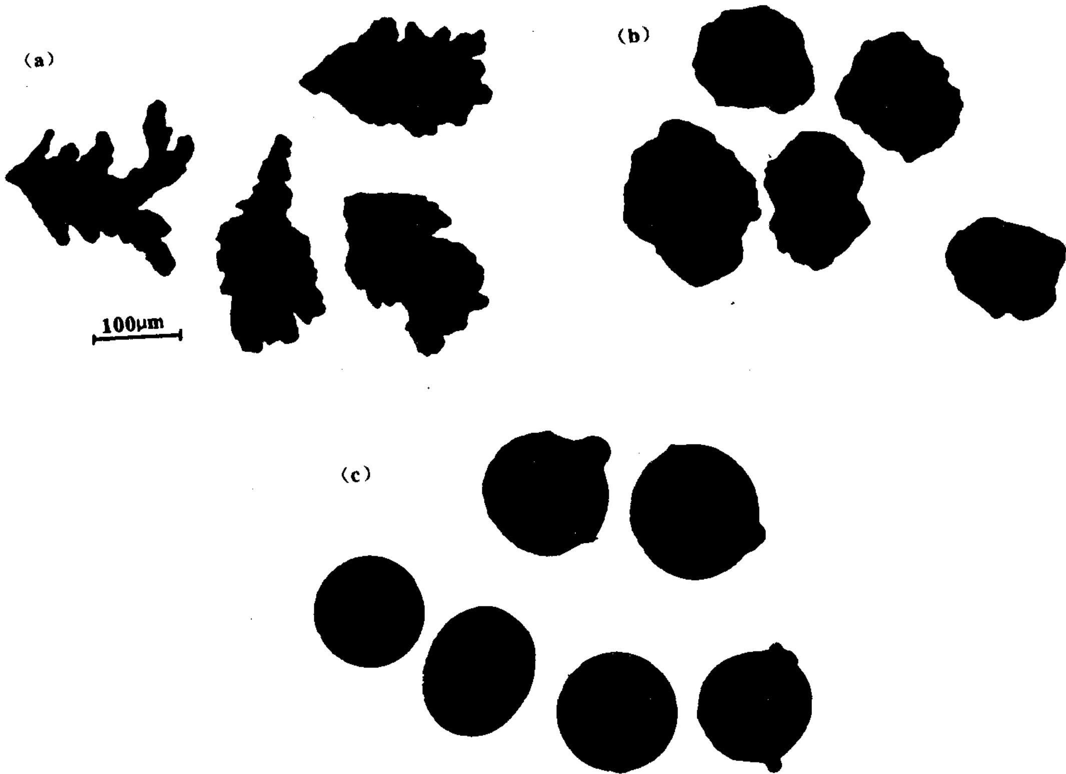


图 3.1　采用不同工艺制备的金属粉末。粉末中金属粒子的形状和尺寸与制备工艺过程有关。(a) 用电解沉积法制得的高度不规则的金属粒子；(b) 化学还原粉碎的金属化合物制得的圆形粒子具有较完整的内部结构；(c) 喷射制粒法制得的金属丸，该工艺称为金属的原子化或雾化

把铜化合物破碎成小粒子，再用化学方法除去其他成分即可得到图 3.1 (b) 中的粉末。这种基本轮廓是粉碎和研磨处理产生的，而铜的化学提纯过程则可形成具有高表面

能的多孔结构。通过直接挤压，这种大体上密实的颗粒常能固化成孔隙率较低的物料，其高表面能则利于有效烧结。用这种方法制得的氧化铁曾用不同放大倍数的照片示于图1.3，从中可见金属粉末内部结构的复杂性。在以后的章节中，我们将讨论用汞浸入孔隙率测量法（Mercury intrusion porosimetry）对这种金属粒子内部结构的测量，我们将发现这种粒子的内部结构可以用一个介于2～3之间的分维数来描述。

图3.1（c）中所示的金属粉末是用高速喷雾法喷出金属液体微滴再经冷却塔冷却而制得的，这种方法在金属冶金学中叫"喷射法制粒过程"（Shotting process）。如果喷射出的微粒在塔中冷却较慢，得到的金属粒子几乎是球形的。猎枪子弹就是用这种方法生产的。

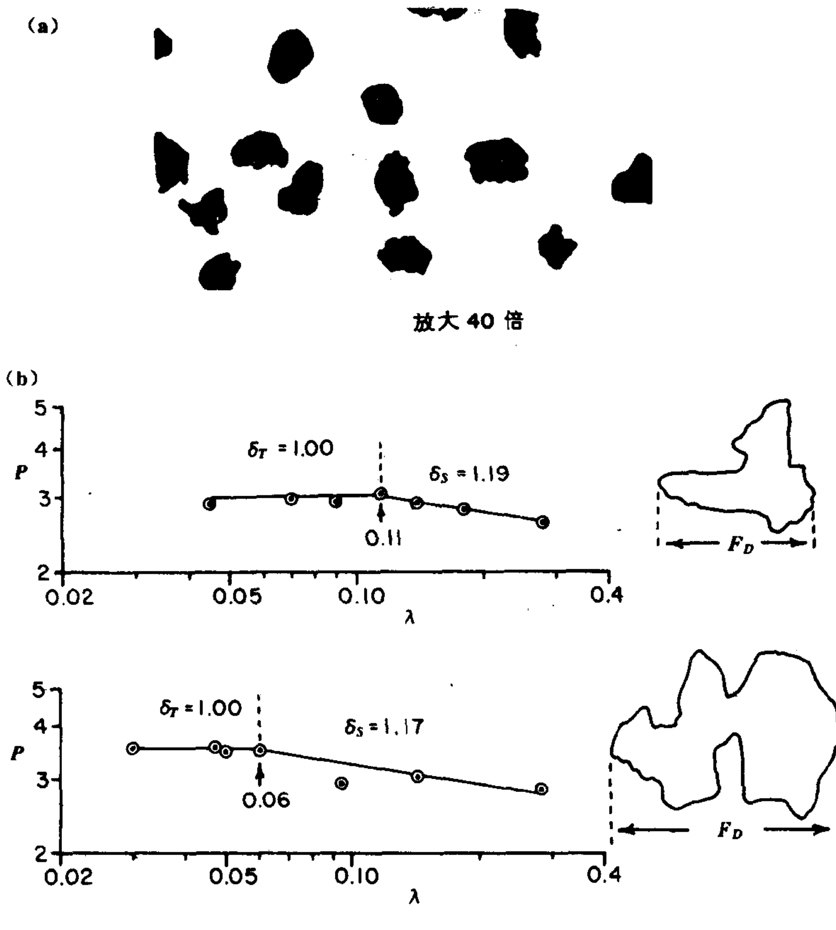


图3.2 尽管铝粒子在高分辨率下显示欧氏几何边界，但在低分辨率时其不规则结构则可以用分维数来描述。(a) 一种典型的具有不规则边界的铝粒子（平均直径为100μm）；(b) 用内转式构造步长法（Inward structured walk）获得的两个铝粒子的Richardson曲线。P为周长估计值；λ为步长；P和λ已用轮廓的最大Feret直径进行标准化处理；δ_s为结构分维数；δ_T为织构分维数

近年来，人们用极不规则的金属粒子作为一种发光涂料。因此在现代汽车用的成品漆中含有一种能引起闪光效果的铝质颜料。生产这种颜料的方法之一是快速冷却变形的金属液滴，这些金属液滴则是由熔融金属射流的紊流分散而产生的[2,3]。这样制得的一组典型的具有不规则形状的铝粒子照片如图3.2（a）所示，图中的粉末是由美国宾州耐蚀铝合金中心的J. Thompson先生提供的，大约长100μm。图3.2（a）中的轮廓在低分辨率下可以用分维数来描述，但在高分辨率下这些微粒的边界由于表面张力的影响则满足欧几里得几何规律[4]。图3.2（b）所示的是一个典型的微粒结构的Richardson曲线。所测得的由分形结构向欧氏几何结构转变所对应的测尺可能是由这类粒子落入冷却塔时的

冷却速度所决定的一个函数[4]。铝粉常用作航天火箭引擎的燃料。在预测引擎性能时，铝粉的燃烧速度和它装入燃料箱的方式都是重要指标。铝粒子的分维数对于预测颗粒的流动行为和堆积方式以及化学反应性能可能都是有用的。

图 3.2 (a) 所示的铝粉表面可以用球磨机磨平而生成发光的铝质颜料。在干燥状态下，细铝粉很容易爆炸，而这些不规则铝粉表面的分维数可能有助于预测这些金属粒子形成气状的难易程度以及它们是否会快速燃烧成金属烟云而产生爆炸。燃烧的金属烟云的爆炸速度由两个复杂的相互制约的因素所决定，这就是热量的产生和吸收。燃烧时燃烧的粒子产生热量，而未燃粒子则吸收幅射热达到燃点而燃烧。燃烧速度和幅射热量的吸收可能会是这种金属粉末粒子分维数的函数。

液体湍流是 Mandelbrot 最先应用分形理论所研究的实际物理系统之一。如果把喷射分散而产生的铝微粒快速冷却，也许这些微滴被冻结时的结构会“俘获”复杂的紊流模式，并能提供射流在熔融金属从喷嘴中喷出时的压力和流动条件下怎样雾散的信息。也许图 3.2 (a) 中所示的铝粒子已把它们形成时射流中的湍流信息凝结在它们曲折的轮廓中了。找到在不同冷却条件下，由熔融金属射流的湍流分散所产生的粒子形状上的差别将是一项十分有趣的研究工作。

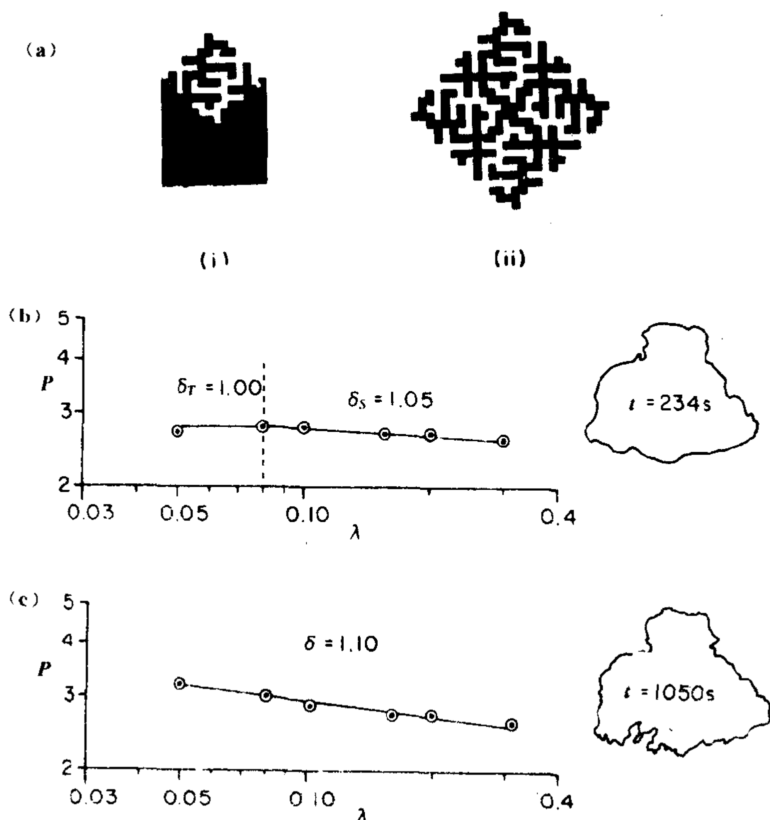


图 3.3 铝粒子被酸腐蚀的过程可以用分维数定量地描述。(a) 分维数为 1.73 的三分 Koch 岛在构成的不同阶段显示出的外部形貌说明在有关腐蚀和酸蚀现象的研究中分维数是十分有用的；(b) 在酸蚀作用下，边界的分维数发生变化；经过较长时间的腐蚀后，边界的欧几里得部分不再明显；(c) 由酸蚀后的轮廓检测到的 Richardson 曲线。P 为用向内构造步长技术估算出的周长；λ 为步长；P 和 λ 已用最大 Feret 直径标准化；δ 为分维数

在 Mandelbrot 的书中 (参见第 1 章参考文献 [18])，有一张图曾用来说明把一个正方形变成一个曲折小岛 (分维数为 1.73) 的构造方法。构成这种图形的最初几步见图 3.3。这种复杂的 Koch 岛引起了微粒学家的兴趣，这是因为正如后面的章节中将要看到的那

样，一些自然界中的烟粒具有1.72左右的分维数，并且与这种Koch岛有惊人的相似性。在我浏览Mandelbrot的书第一次看到图3.3（a）的曲线（i）时，它使我想到的是一种物质表面被化学腐蚀所产生的那种结构。我注视着这张图，并没有看到能转变成正方形的几何图案，但却发现酸正在噬咬轮廓，在腐蚀表面形成了一个锈蚀物的蓬盖，我觉得它很象一个分形结构。但那时我还没有任何化学腐蚀物分形结构的研究经验，我猜想它会与腐蚀的速度和方式有关。

尽管我们没有研究过化学锈蚀物，但我的学生们和我已经做了一个试验（即把微粒放入一种酸中），它表明分形可用于腐蚀过程的定量描述。我们的试验之一是把一个铝粒子放在显微镜的载片上，然后在一系列时间间隔下拍摄它溶于盐酸时的形貌。图3.3(b)所示的轮廓形貌是在第234s时得到的。可以看出在最大Feret直径标准化得到的$\lambda=0.08\sim0.3$范围内，轮廓的分维数为1.05，当$\lambda<0.08$时则表现出明显的欧氏几何边界。而酸溶解1000s后，$\lambda=0.05$时也未出现欧氏轮廓，分维数则增加到1.10。腐蚀边界的Richardson曲线示于图3.3（c）。

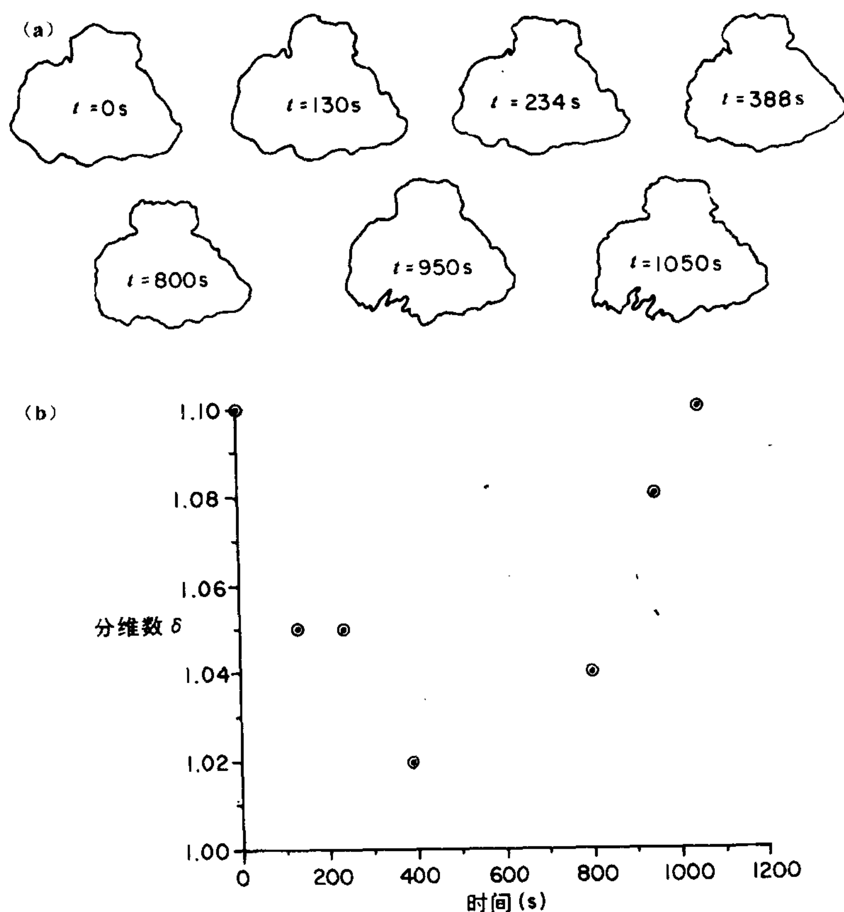


图3.4 腐蚀后铝粒子的分形特征表明，在开始阶段酸溶掉了边界上易溶的隆起部分，导致分维数降低；但在稳定的腐蚀过程开始之后，边界的分维数反而上升。(a)当边界被酸腐蚀了一段时间以后可看到轮廓的变化；(b)在酸蚀作用下，轮廓分维数的变化表明，开始时边界上的一些隆起部分被酸溶解而变得平滑，当酸浸入轮廓后，总体轮廓的曲折程度又不断提高

我们关于受腐蚀的微细颗粒研究的令人惊奇的方面之一是我们曾推测颗粒轮廓的分维数应该随腐蚀时间的延长而稳定地增大，而事实上它的分维数在第一个400s内随时间而减小，在此之后才开始增大。我们是这样解释这一点的：在酸开始真正地侵蚀粒子轮廓之前，先是溶解了颗粒表面上的一些凸起而形成了较为平滑的轮廓。单个粒子轮廓

的整个变化过程示于图 3.4 (a) 中，所测得的不同轮廓的分维数则示于图 3.4 (b) 中[4]。采用不同分析方法的类似工作曾由 Beddow 及其同事们报道过[5]。

Keith Beddow 教授及其同事广泛地研究了金属粉末颗粒的形状和尺寸[6]。他们与图

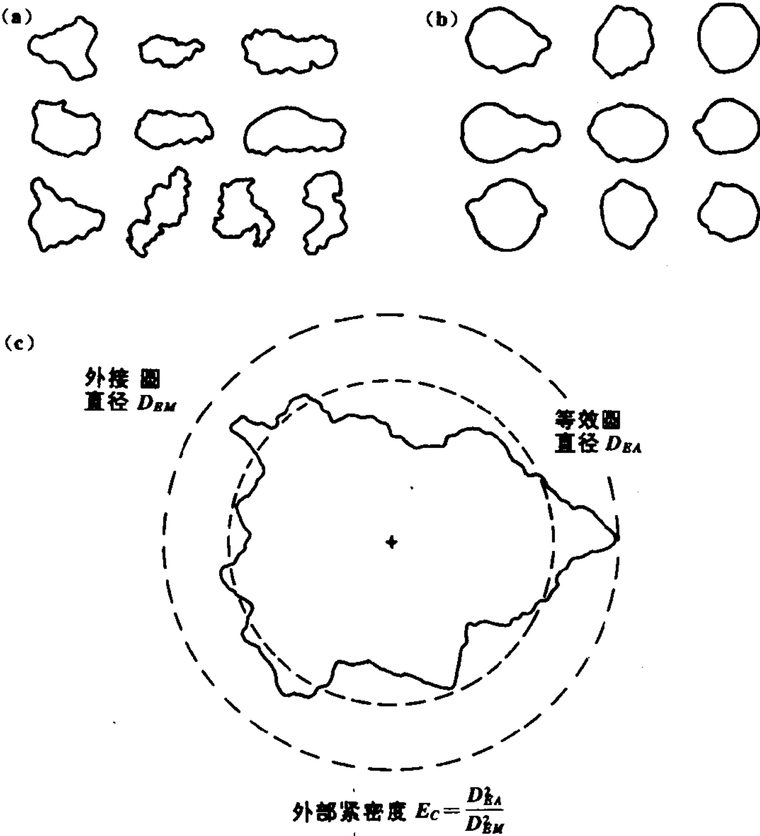


图 3.5 Beddow 教授等广泛地研究了化学法制得的海绵铁粉粒和喷射法制得的铜丸在形状上的差别[6]。(a) 海绵铁粒子轮廓；(b) 铜丸轮廓；(c) 轮廓的紧密度是描述微粒形状的有用的无量纲比值

3.1 (b) 相似的一项早期研究是关于氧化物粒子形状的比较。这些金属粉末粒子由喷射法制得。Beddow 教授提供的两套颗粒轮廓示于图 3.5 中。粉末冶金学家也把这种产生金属粉末的过程叫原子化 (Atomization)。这个名字并不贴切，因为它并没有把粉末粒子减小到原子级别。我更倾向于称之为雾化 (Nebulization)，因为熔融金属喷射时碎散成云雾状的金属微粒 (雾化一词源于希腊语词 Nebula，原为云雾之意)。然而原子化一词已牢牢印在金属冶金学家的脑海中，因此我们在本书姑且沿用这一词。原子化得到的粉末一般是不规则的，因为在它们从冷却塔中落下时，熔融的金属滴由于重力而发生了变形；液滴到达底部之前，发生碰撞也会生成偶极形或三极形微粒。这些原子化后的金属粉末的总体形状可以用轮廓的丰度 (Chunkiness) 表示，它是一个由下式定义的比值

$$丰度\ (\text{Chunkiness}) = 宽/长 = [W]/[L]$$

很明显它是纵横比 (Aspect ratio) 的倒数。画出图来就可以看到，丰度比纵横比优越的地方是，前者可在 1 到无限小之间变化，而后者则在 1 到无限大之间变化。对形状变化比较大的粉末，用纵横比表示形状时可能需要很大的图纸。

微粒结构的另一个有意义的度量是被称为紧密度 (Compactness) 的无量纲数值。轮廓的紧密度定义见图 3.5 (c)。为了描述图中两组金属粉末粒子形状的变化，我们可以用

金属粒子紧密度对轮廓的丰度作图，结果如图 3.6（a）所示。可见两类粉末（海绵铁和钢珠）的数据纠缠在一起。然而海绵铁微粒的曲折轮廓可以用结构分维数来描述，以分维数、丰度、紧密度为 3 个坐标画出的 3 维图形如图 3.6（b）所示。这样的 3 维图形如同一个 3 维数据空间，在这个 3 维空间中，海绵铁粗糙轮廓的数据点和原子化钢珠的数据点明显地分开了。图 3.6 只是一个 3 维数据空间的略图，因为图 3.5 中粒子的实际轮廓数据图十分复杂，不便在此分维数的概论式讨论中详细给出。

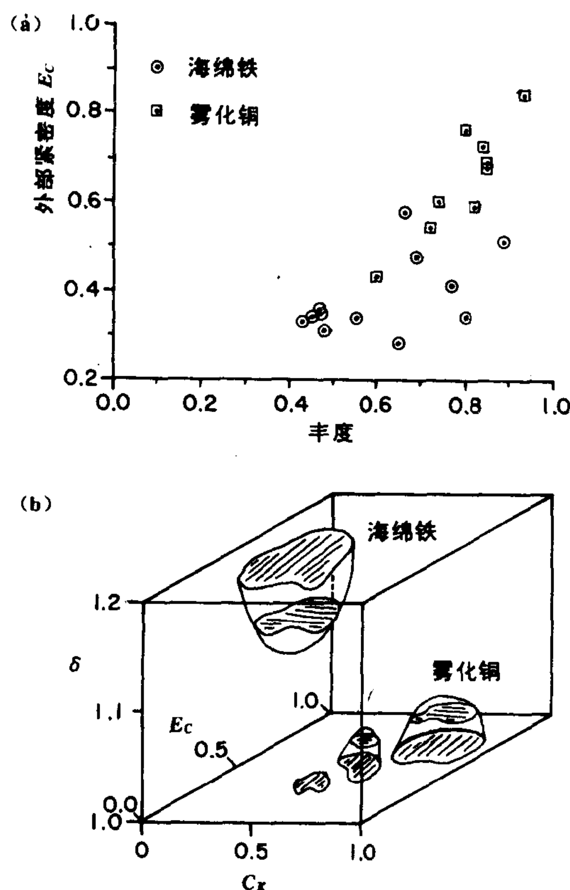


图 3.6　特定粒子的完全描述有时需要在 3 维数据空间中进行。(a) Beddow 教授在图 3.5 中得到的两种金属粉末轮廓的丰度—紧密度曲线模糊了两种粒子间的差别；(b) 在 3 维数据空间中，海绵铁粒子的粗糙度与平滑得多的原子化金属粉粒可明显地区分开来；E_c 为轮廓的外部紧密度（见图 3.5）；C_K 为粒子的丰度；δ 为金属氧化物粒子轮廓的分维数。

人们已经指出，海绵状微粒的内部结构可用多孔分形（Sponge fractal）予以描述。如果我们要详细研究这种类型的金属粒子，就需要把关于结构分形、多孔分形、丰度、紧密度以及单个粒子尺寸的所有信息存入计算机。计算机专家把这样的存储系统叫做 6 维数据空间。我们无法在纸上画出 6 维空间的全部 6 组数据，因为在 2 维的纸上画 3 维图已经够麻烦了。任何 3 维图形都是由存储在计算机中的 6 维数据缩减而来的。然而遗憾的是现在许多有关数据空间维数的讨论仍延用“数据空间”一词，而且读者被告知这是在 6 维空间中。一听说 6 维空间人们会吓得避开任何具体物体，而对 6 维空间是个什么样子则困惑不堪。许多人可能懂得什么叫计算机的“6 个存储页”，也可能学会去接受由这些存储页面所描述的 6 维数据空间结构，但他们遇到能在 6 维空间中思考问题的科学家时仍会感到茫然甚至于惊呆，因为大多数人的思维都无法摆脱实际的 3 维物理空间的束缚。一些分维数的应用讨论涉及到 4 维、5 维和 6 维空间时，常常指的是数据空间而不是物理空间。

图 3.1 中所示的具有最大分维数的微粒是由电解得到的金属粉末，电解过程可说明于图 3.7。加在两个电极上的电压引起极间电流，电流通过时一个电极上析出铜而另一个电极上则放出铜化合物。电解（Electrolysis）一词来自两个词根，“electro”和拉丁语的“lysein”，“lysein”意思是释放。这样电解释放出与硫酸根离子 SO_4^{2-} 结合在一起的铜离子 Cu^{2+} 并使其在阴极上析出。用电解法在物体上析出薄层存在的问题之一是析出物有时候以鳞片状存在，除非采用特殊的方法处理电解后才易于从表面刮下。在采用电解法制备金属粉末时，人们有意地选择电解条件，以便在电极上形成鳞状物，刮下后可制成图 3.1（a）所示的粉末。

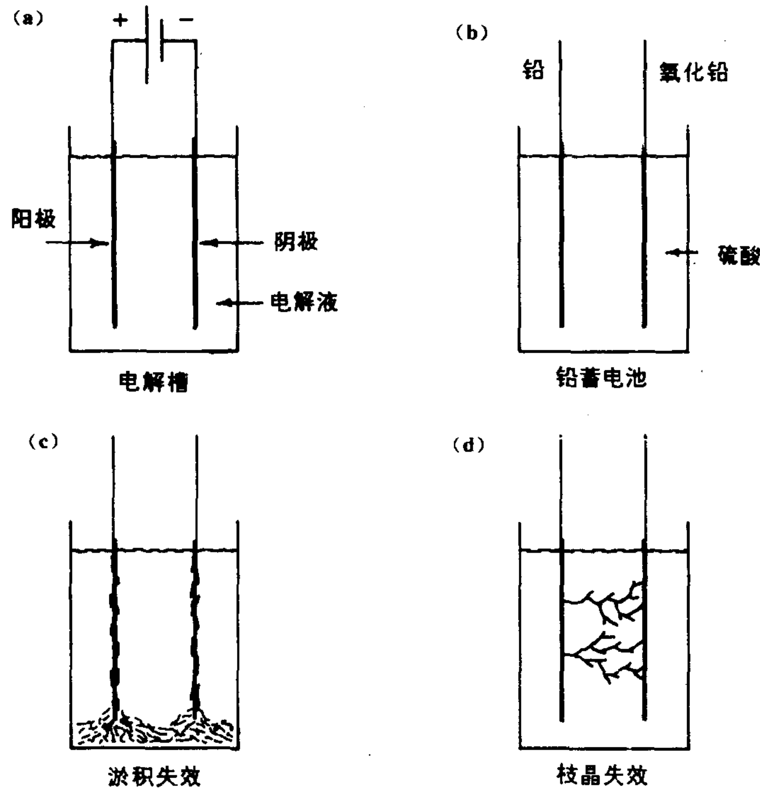
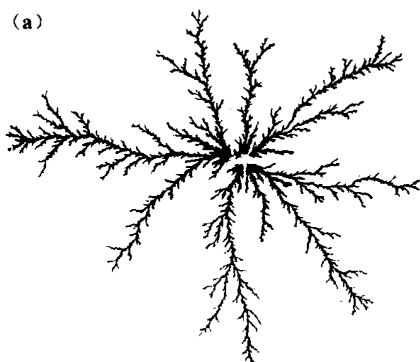


图 3.7　分形在化学电池和蓄电池的设计中可能十分重要。(a) 电池或电解池的基本结构；(b) 典型的汽车用蓄电池，当两个电极间有电流流过时经化学反应而放出能量，一个电极是多孔的铅板，另一个是多孔的氧化铅板；(c) 电解析出金属鳞片，在电解充电过程中会落到电极下方，在电池底部淤积而使电池短路；(d) 电极间枝状晶体的生长会使电池失效（原文中图 3.7 和图 3.8 的图位颠倒了—译者）

Matsushita[7]等研究了金属电解过程中金属晶体的 2 维生长情况。他们的实验如下：取一个直径为 20cm 的浅盘，把一个高 2.5cm、厚 3mm、周长 17cm 的圆筒形阳极放入该盘中，再在盘中加入 4mm 深的 ZnSO4 水溶液，这种溶液叫做电解液（任何能导电的溶液叫电解液）。加入乙酸乙酯使之在硫酸锌溶液上形成一薄层。把作为阴极的碳棒放在离盘子中央不远处，棒的顶尖刚好处处于溶液和有机层的界面上。电流就通过电解质在碳电极和环状锌电极之间流动，从而在碳棒尖端析出锌。在这个特殊的电解池中，锌晶体将从阴极向阳极方向生长，形成一个薄薄的鳞片状的、基本上是两维的晶体，这种晶体被其研究者称为金属叶（metal leaf）。由 Matsushita 等生长出的一种典型的金属叶晶体示于图 3.8（a）中。可以看出这种晶体与图 3.3（a）中的分形图（ii）相当类似。测得图 3.8（a）的分维数为 1.66。Matsushita 等证明这种晶体的分维数随阴极电压的变化而改变。图 3.8（b）所示是这种金属晶体的分维数随电压的变化情况[7]。

汽车上使用的蓄电池是一种特殊的电解装置，它可以释放电流，而在相反工作条件



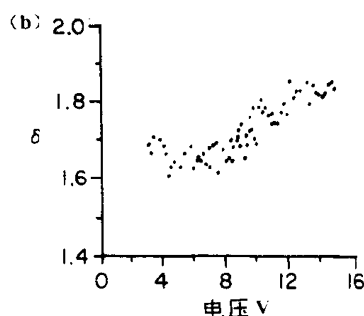


图 3.8　在特制的电解池中可长出 2 维的金属晶体，这种晶体具有分维数很大的枝状结构。(a) 由 Matsushista 等长出的典型的金属晶体[7]。(b) 晶体生长的分维数随两极间电压的变化而变化；δ 为晶体的分维数；V 为施加的电压[7]

下又可以还原并存储电能。目前投入使用的及正在研制的汽车用蓄电池种类很多，这里所讨论的只限于众所周知的铅—酸电池，其基本系统如图 3.7 (b) 所示。为简单起见，我们只说明两个电极的情况，而真正的电池可能有很多组电极[8]。

在制造蓄电池电极的 Faurer 工艺中红色铅粉（一种铅氧化物）和硫酸的混合物被压成坚固的铅板，经干燥后用于蓄电池。两个相似的铅板浸入弱硫酸中，然后让电流流过电池。电流通过时，一个电极上由于电解液中释放出的氢的作用形成铅绒，而另一电极上铅被硫酸氧化形成氧化铅绒。多孔电极用于汽车蓄电池中可增大电极的表面活性，进而延长电池的放电时间。当蓄电池放电时，氧化铅电极受到硫酸分解产生的氢离子的作用，最后在电极上形成硫酸铅；在蓄电池的阴极板上硫酸根离子直接作用于电极形成硫酸铅。当蓄电池充电时，化学反应向相反方向进行，一层铅绒又重新沉积在阴极板上。这种电池失效主要由两个原因引起，一个是重新产生的铅绒不能附着在电极上，反而落在电极的下方形成污浊物引起短路，如图 3.7 (c)；另一个是蓄电池充电时沉积在阴极上的铅形成枝状晶体，其与 Matsushita 的晶体（图 3.8 (a)）很相似。高度枝状化的铅晶体延伸在电极之间也会引起短路（图 3.7 (d)），导致电池失效。这方面的一个富有成效的研究可能是扩展 Matsushita 等人的工作，即考察能否改变蓄电池中枝状铅晶体的生长，也许在电解液中增加一些化学物质可降低枝状晶体的分维数，使之不致很快地搭接到两个电极上。同样，也可研究能否在电解液中加入一些化学物质以降低析出物的分维数，从而使析出物更致密更贴近电极。

在计算机工业中，人们很感兴趣的是在硅片上形成金属薄膜，使组成计算机芯片的固态元件之间得以导通。然而，用金属汽体轰击的办法在一个光滑、洁净的表面上长出晶体是十分困难的。通常这些表面上有一些适合晶体生长的点，这些点称作成核中心。（“核子”在拉丁语中意为“微小的核”(tiny nut)，核子物理学就是研究元素原子内的

“核”的科学。成核中心是表面上的一些“小核”，晶体从此开始生长)。当液体加热到沸点时，汽泡将首先在容器表面的划痕上或是在一些小而尖的边缘上形成。这些事先放在液体中的石屑，虽叫做“沸腾屑”，只是为了使汽泡更容易形成，而不是为了让液体迅速达到沸点而猝发出汽泡。容器上的划痕和石屑边缘是汽泡的成核中心。图 3.9 所示是一个采用溅射法在石英表面析出的枝状晶体，该晶体由 Elam 等人制得，被称为“溅射沉积铌—锗薄膜”[9]。这种枝状晶体与图 3.8 中的锌晶体十分相似。但值得注意的是这种晶体伸出的树枝较粗，好象树枝上已长出叶子似的。图 3.9 中的这种枝状晶体的单晶厚度在 200～500nm 之间，由平均尺寸为 0.1μm 的小粒子组成，而树枝顶端较大晶粒的平均尺寸为 1μm。Elam 等人证明中心支干在变粗前的分维数为 1.7，而外缘枝干的分维数为 1.88。产生这种差别的原因将在第 4 章中有关枝晶的计算机模拟的章节中讨论。正如Elam等人

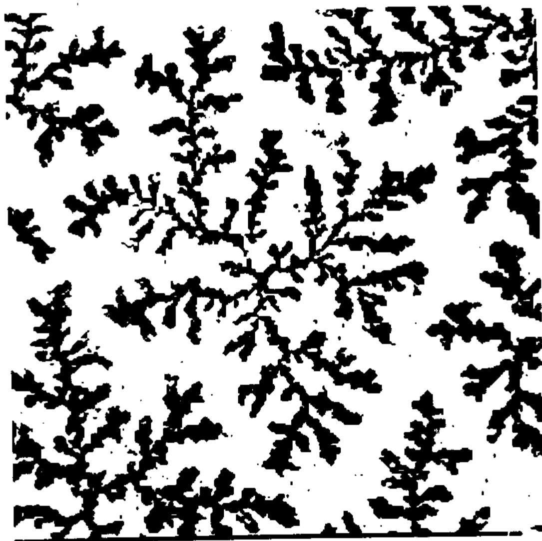


图 3.9　在一定的操作条件下，采用靶式溅射法在低压氩气和锗烷的混合气体氛围中向石英晶体上溅射一层铌薄膜，使得石英表面的成核点上形成枝状晶体。这种枝状晶体的中心支干的分维数是 1.7 而外缘枝叶的分维数为 1.88[9]

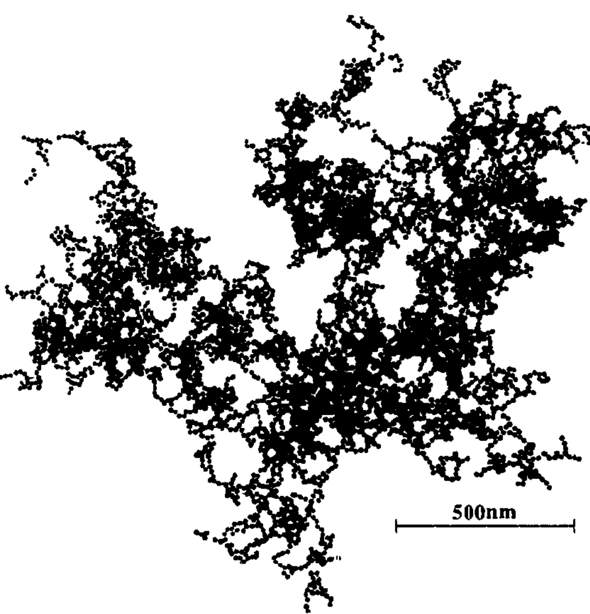


图 3.10　Weitz 和 Oliveria 发现金粒胶体由碰撞而形成的聚集物(包含有 4739 个小球体)的分维数为 1.75[10]

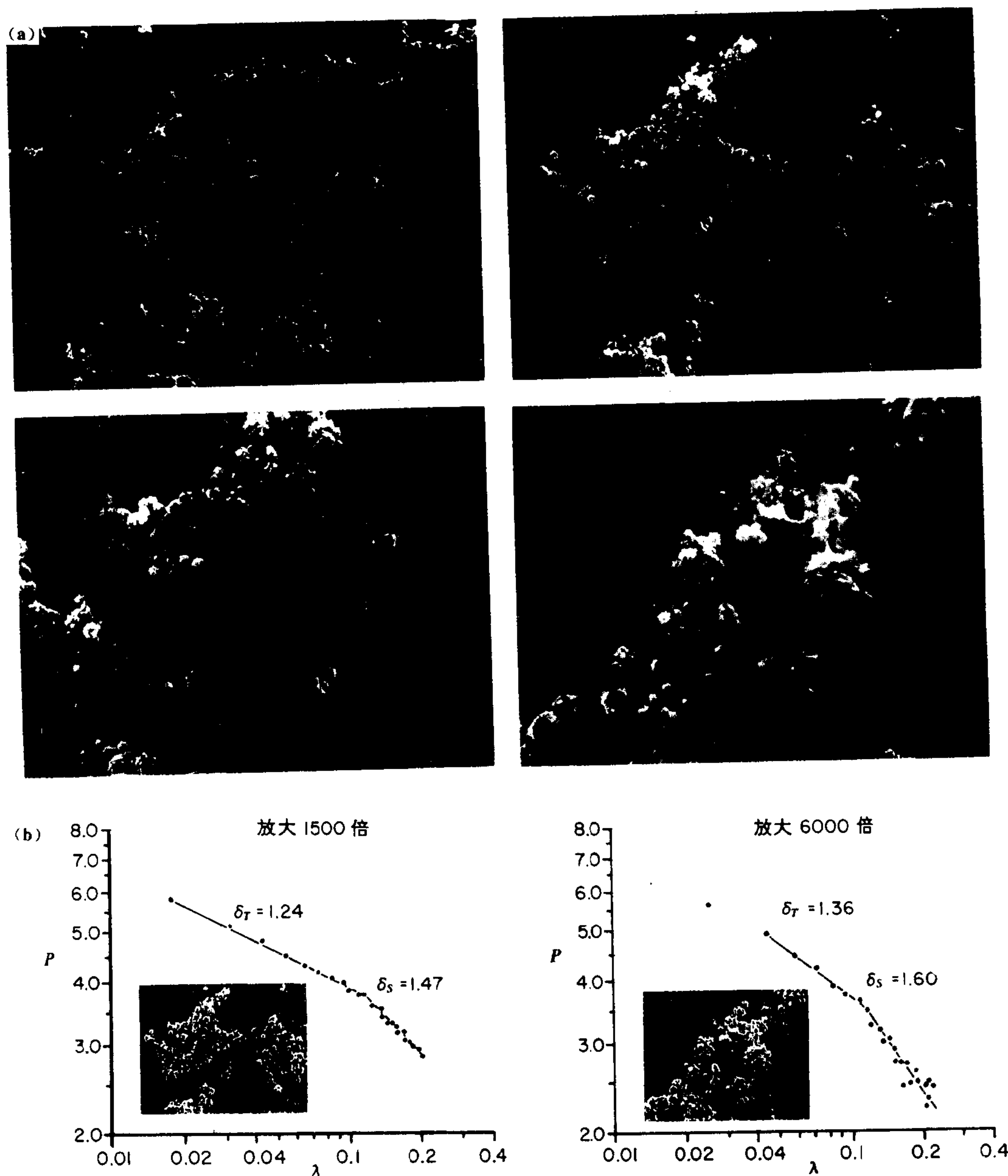


图 3.11　采用内转式构造步长技术测得的具有曲折边界的单个粒子的分维数和高放大倍数下曲折边界某一局部的分维数．(a) 不同放大倍数下的颜料颗粒轮廓；(b) 单个颜料粒子的分维数和高放大倍数下局部边界的分维数

所指出的．此时此刻我们只要注意到这一点就足够了，那就是：研究溅射法析出的各种晶体的分维数有助于我们弄清晶体的形成和生长过程，以便我们更有效地把金属膜生长技术应用于计算机芯片的大规模生产上[9]。

读者可能已注意到了，Matsushista 等及 Elam 等各自生长出的晶体、冬天窗上的霜

花和雪花结构之间异常相似。窗玻璃上的霜花（看起来象蕨类植物或者树叶）的生长过程与Elam等人生长晶体的过程相类似。霜花也是开始于窗上的成核中心，然后靠空气中水分子凝结到晶体上而长大。在我们学会计算机模拟之前，霜神杰克（Jack Frost）早就在描绘分形景色了！在第4章我们将讨论雪花的生长及其分形结构。

胶体科学是应用科学的一个重要分支。胶体科学研究的是那些小到完全由表面张力控制其行为的细粒子。因此悬浮着的金胶粒决不会在重力作用下沉降，而是藉布朗运动保持悬浮状态。广义上说，我们把小于0.1μm的微粒看作胶体粒子。胶体科学和微粒科学在某些体系里相互交叠。胶体一词来自两个希腊语词“kolla”和“idos”，“kolla”意思是胶，“idos”意思是形式或形状。我们最先进行研究的胶体是一些物理行为类似于胶的物质，并由此而得名胶体。最近的研究表明很多胶体粒子由比它们自身更小的粒子单元组成，这些单元凝聚成较大的单元而显示出分形结构。图3.10所示是一种由Weitz和Oliveria描述过的典型的胶体聚合物[10,11]。

图3.11是不同放大倍数下一种特殊的镍微粒的照片。这种镍粉颜料是用于制造精密仪器的电磁防护罩的复合材料。图3.11中的金属粒子也许是本章迄今讨论过的金属粒子中分形结构的范围最为广泛的粒子了。这种镍粉颜料加到塑料中形成复合材料，在足够的镍粉浓度下复合材料才能导电。可以认为，长而细的微粒可以在较低的浓度下就会使复合材料导电，而球形粒子则需要较高的浓度[12,13]（这一事实将在第5章中，当我们探讨航天飞机的特殊反射涂层时详细讨论）。另一方面，复合材料的强度可能也与镍粉的表面积有关，因此，粉末表面的分维数可能决定复合材料的强度。而单个粉末粒子的分维数与形状因子（如丰度、紧密度等）可一起用来预测制出一定性能的复合材料所需的粉末添加量。添加到复合材料中的粉末量通常用粉末的体积分数来表示，这种粉末颜料的体积分数也称作颜料载荷（pigmentloading）。

3.3　干燥粉体的分形与流动

粉末冶金学家用金属粉末制造构件时面临的一个重要问题是怎样把粉末注入模具中进行烧结。描述各种不同物料流动性质的科学是流变学（Rheology），它由希腊语中描述流动的词“Rheos”而来。粉体流变学是一门十分难以研究的学科，因为所有影响粉体流动的因素都很棘手。这些因素有水分、静电力、粉末轮廓的曲折程度和尺寸分布等。而在粉体流入模具时，大多数情况下会有空气流出，这些向外流动的空气可能把最细的微粒带出模具。很多年前，金属冶金学家就已知道粉体形状会影响流动性能，但由于没有有效的方法来描述粉末的形状，因而有关形状对粉末流动影响的问题仍不清楚。然而，分形几何为描述微粒的轮廓提供了可行的途径，一些科学家已开始把微粒分形结构的描述与粉末的流变性能联系起来。有鉴于此，麻萨诸塞州立大学的Peleg博士正在考察喷射干燥食品粉末的流动特性，并试图把粉末的分维数与它的流动充填性能联系起来[14,15]。

在制药业、食品业和化学工业常用的喷雾干燥过程中，一种物质的浆体（微细颗粒高浓度悬浮液）从塔的顶端喷射下来，就象制造铅粒时从喷射塔顶端喷射出被熔融的铅那样。当这种浆体或溶液的微滴在塔中落下时，它的水分被蒸发，干燥的粉粒则收集于

塔的低部。这些微粒通常是疏松的，虽然一些处理过程中通过调整干燥条件可得到相对紧密的粉粒。在速溶咖啡的生产和净化时，生产者的目的是要制出一种具有开放结构的颗粒，以便能快速溶于液体中。撰写本书时，我们还不清楚这种喷射干燥法制得的粒子，其轮廓分维数是否紧密地与疏松颗粒的多孔分形有关。解决这一问题以及建立粉体流变学性质与单个粉粒分维数之间的关系已成为一些研究机构的研究课题[16]。

Peleg 指出，与烟尘不同，文献报道的粉体颗粒结构的分维数的上限是 1.36，他指出，这很可能是由于分维数在 1.68 左右的蛛网形粉体粒子无法构成稳定的力学结构。如果受到压力，蛛网的纤细的枝干就会断裂而形成具有较低分维数的较致密粒子[15]。

Peleg 博士等定量地研究了速溶咖啡颗粒的分维数，并正在研究流动的咖啡粉与单个咖啡粒子的分维数的分形结构关系。图 3.12（a）中所示的是几个咖啡粒子的轮廓及测得的分维数，图 3.12（b）则是两个洗衣粉颗粒的分形结构。

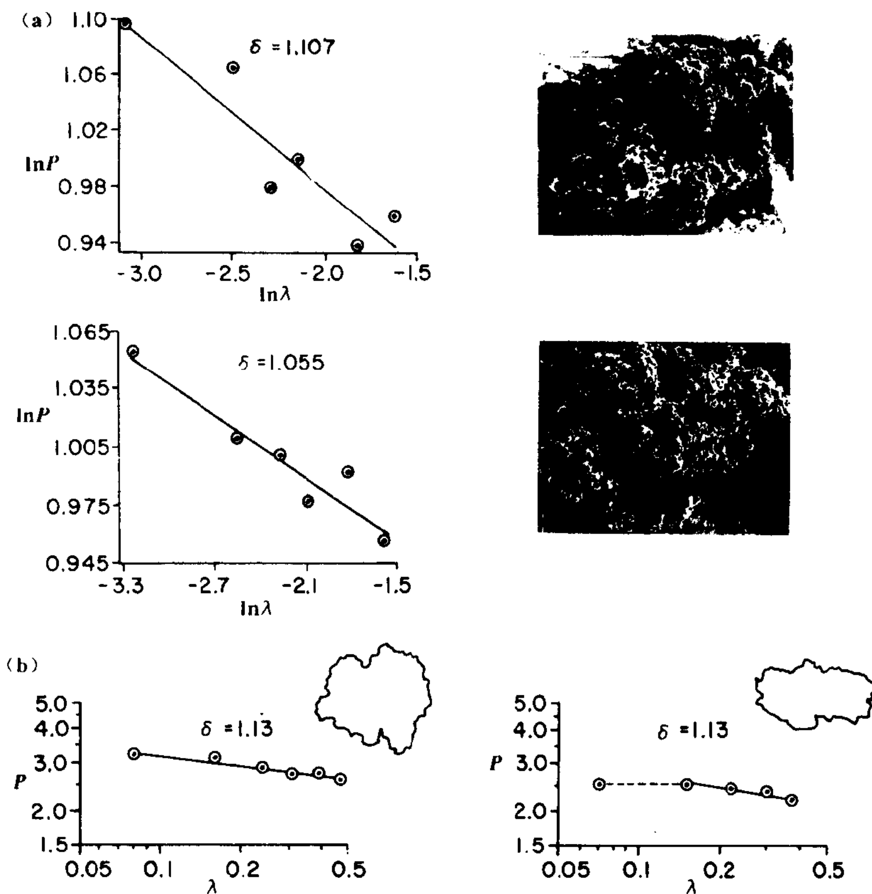


图 3.12 人们试图建立喷雾干燥粉末的分维数与流变性质的关系。(a) 由 Peleg 和 Normand 研究的速溶咖啡粒子的分维数范围在 1.05 到 1.2 之间；(b) Tide 清洗剂是一种喷雾干燥产品，它的单个粒子的分维数与 Peleg 和 Normand 报道过的速溶咖啡粒子的分维数相似

看起来制药业中粉体颗粒的分形描述是十分重要的，因为分形结构既可以预测粉体的流动性也可以预测粉体在压片机中的填充状况。疏松颗粒的多孔分形可能反映由喷雾干燥制得药物的生物利用度。在药品制备规范中，生产者不仅要说明片剂中药物的剂量，而且还要说明片剂在体内的有效分解和释放方式。当片剂在病人体内分解时，药物的利用度称为给药系统的生物利用度（参见第 7 章中有关多孔分形和药物靶向受控释放的内容）。

3.4 矿业中的分形

矿业是另一个分形几何可以为研究者们提供很多信息的领域。挖出的大块矿石经粉碎使有用矿物与周围的岩石解离，包含有矿物的岩石叫矿岩（Rock matrix)。图 3.13 所示的是一种典型矿石的结构型式。为了说明问题，我们假定我们要把矿物 A 与所有其它矿物分开[17]。

从包含有其它矿物的矿石中解离出有价矿物颗粒叫矿物解离（mineral liberation)。关于矿物解离速度的研究称作解离动力学（Liberation kinetics)。(希腊语词“kine”意为运动；解离动力学是关于解离过程的研究。英文词“电影院”(cinema）则来自于希腊语中“kinema”一词)。通常选矿工艺的第一步是把粗矿石破碎成小颗粒。在这一步，岩石裂纹的扩展是导致有价矿物解离的基本过程，但目前有关裂纹穿透岩石的详细过程的研究还不够，这也许是因为描述裂纹结构和裂纹扩展方式十分困难的缘故。从破碎矿石中解离有用矿物要消耗巨大的能量。目前选矿的通用方法是利用球磨机进行磨矿，把粗矿石磨碎而分出有价的矿物。这种解离过程通过观察球磨机产品的尺寸和组成来控制[17-19]。通过检查流出球磨机的产品可知有价矿物是否解离。那种没有价值的矿石和分离后的废物工业上叫脉石（Gangue)。这一单词来子德语中用来描述矿脉的词，它与英语中表示一处到另一处的路径的词“通道”(Gangway）也有关联。这种脉石颗粒也被称为尾矿（Tailings)。大量的尾矿需经过多种处理才能放入尾矿池。尾矿池（Tailing bonds）是由特殊构筑的堤坝围起来的大型露天场地[19]。

如果有价矿物未能有效地与脉石分开，那么从球磨机出来的矿物就需返回球磨机进行再磨，同时还要将信号传给控制器降低球磨机的给矿速度，以增加磨矿时间。这类处理过程的流程见图 3.13 (b)。磨矿回路包括给料、磨矿、产品检查和循环处理。通过检查球磨机产物的组成，调节磨矿和给料速度，以实现对磨矿回路的控制，这一控制方式叫磨矿回路的反馈控制。反馈控制的基本思路是将产品的信息送回控制单元。反馈控制方式存在的一个很大问题是过磨而产生不必要的细粒子，从而浪费很多能量，因为靠检查磨机产品已来不及避免过磨节省能耗。矿业上希望能用前馈控制替代磨矿回路中的反馈控制。在前馈控制方式下，通过检查破碎后的试样，工程技术人员能够预测所需的磨矿时间及磨矿后产品的尺寸分布。在磨矿回路中，运用解离动力学实现前馈控制有两个必不可少的步骤，其一是研究矿石样品的形状和尺寸（估算矿石中的矿物分布技术将在第 7 章讨论)，其二是表征矿石在压力作用下，裂纹扩展发生破碎的方式。直到最近，几乎还没有什么方法能描述裂纹，但是裂纹看起来很象 Matsushita 等培养出的晶须（见图 3.8 (a))，或者象 Elam 等用溅射法生长出的晶体（见图 3.9 (b))。这类晶体的分形描述显示出分形理论有可能用来表征矿石和其它材料的裂纹。目前，Laurentian 大学正在进行用分维数描述矿石破碎时裂纹结构的研究[20]，研究者力求建立受压下矿石的裂纹结构、矿石构造特征以及施加给矿石的应力应变方式这三者之间的联系（参见第 9 章有关裂纹模型的讨论)。希望这些研究有助于完善磨矿工序中的前馈控制。

在解离动力学研究中，表征裂纹结构的途径之一是观察新碎裂的物料样品。新碎裂

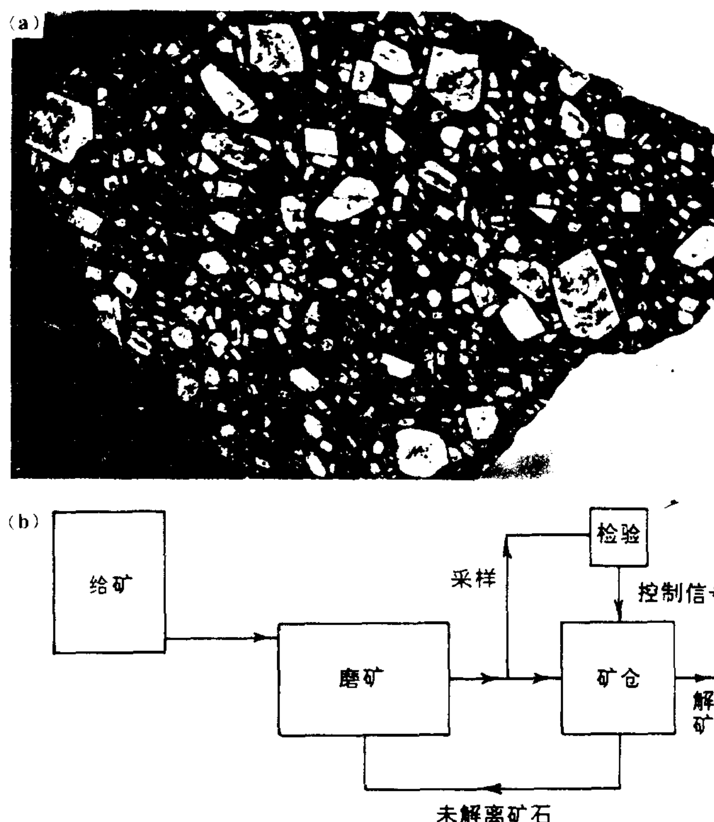


图 3.13 在选矿工业中，由地下采掘出来的岩石称为矿石，矿石中的有价矿物与无用岩石（脉石）混合在一起，有价矿物可从中分离出来。(a) 一个典型的矿石剖面显示出它包含不同类型的岩石组份；(b) 使有价矿物与脉石分离的常用磨矿回路

的细颗粒所显示的分形边界与裂纹的分形结构有关（这些裂纹使得大块矿物破裂成小块）。

一种有可能提高磨矿效率的方法是对矿石进行热力学预处理使之产生初始裂纹，这些裂纹在磨矿时再进一步扩展而使矿石碎裂，在室温下柔韧的塑料和橡胶在液氮中则会冷淬成碎片。物理教师常做的一个演示是，把一个橡胶球放入液氮中，这个冷冻后的球落到坚硬的表面上就破裂了。这个演示的一个重要方面常常被忽视了，那就是这种快速冷却不仅把柔韧的球变成了坚硬的球，而且急剧的温度变化使得球表面形成了许多裂纹。也许正是这些裂纹而不是球本身的脆性使球落下时轰然碎裂。

图 3.14 中所示的是一个经液氮冷冻后，从 1m 高处落到地板上的塑料杯裂成的碎片，图中也测出了这些碎片的分维数。在磨料前把待磨物料冷却到液化空气和液氮的温度再磨碎，工程上称为冷却磨碎（Cryogrinding）。希腊语词“kryos”意为霜，英语中的晶体（crystal）则来自于此词，因为由希腊人研究的第一个明显的晶体物质便是霜。冷却磨碎的词根“cryo”也来自于这个希腊语词。冷却磨碎已用于香料的磨碎处理，因为这种方法使被碾磨的芳香油粒子不致升温而从粒子表面挥发出宝贵的芳香油气味。

一种用于产生细微颗粒的设备叫球磨机（Ball mill）。在球磨机中，待磨物料与一些坚硬的陶瓷球混在一起，在一个圆柱筒内翻滚（如图 3.15 所示）。这些粉末和球的混合物叫作球磨机负荷（Millcharge）。这些球被球磨机旋转的柱筒抬起，在适当的高度瀑布似地落下，把处于落下的球与下部的球之间的物料颗粒砸碎。当将图 3.14 中所示的塑料碎片在球磨机中进行冷却磨碎时，碎片的曲折轮廓就被磨掉，这一过程工程上叫作磨损

(attrition)。

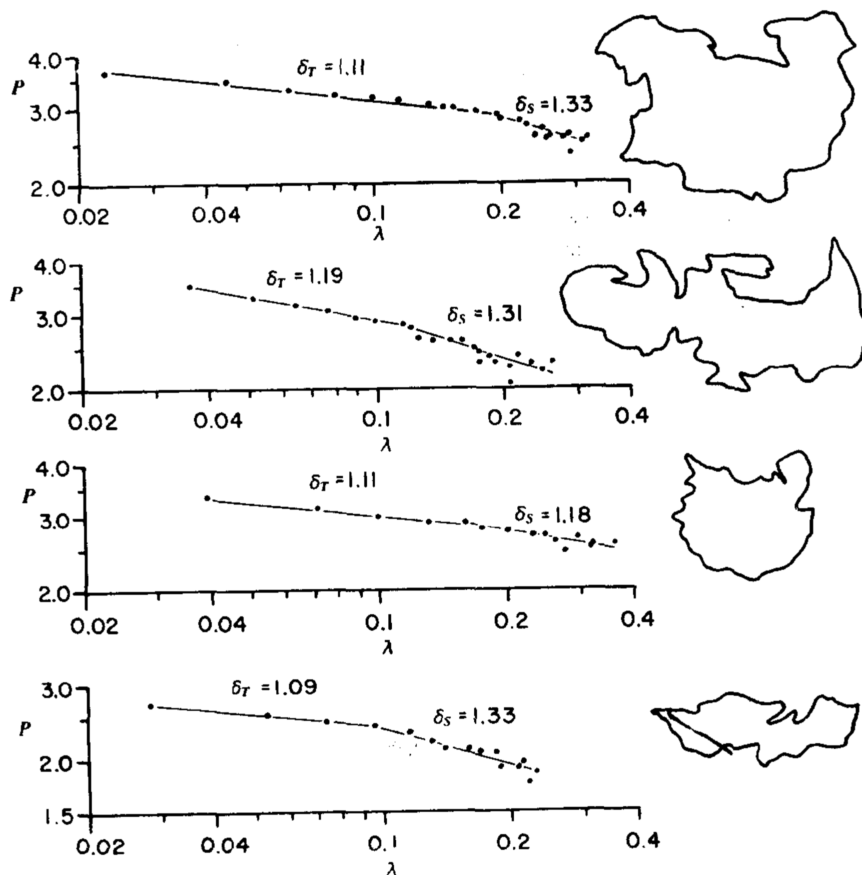


图 3.14 新碎裂物料的分形边界可能与使之破裂的裂纹有关。图中的碎片是由一只冷却到液氮温度的塑料杯从 1m 高的地方落到坚硬的物体表面上破碎而产生的

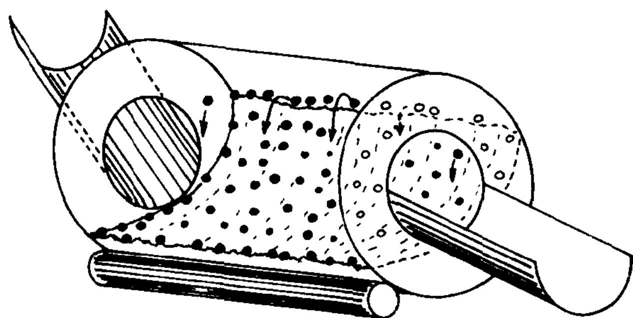


图 3.15 使硬球瀑落撞击滚筒中运动的岩石而使岩石破碎的球磨机

摩擦的意思是两个物体在一起研磨，该词来源于拉丁语的动词“terere”(意为摩擦)。同一词根存在于英语单词“磨难”中(tribulation，表示苦难或一些折磨我们的事情)。磨难一词来自拉丁语中叫做“tribulum”的一种雪橇，这种雪橇可像打谷机似地脱谷。从这种“雪橇”还发展出了一个科学术语——摩擦学(Tribology)，它是关于摩擦表面磨损的科学。所谓的铁粉记录术(ferrography)就是摩擦学的一个分支，它使人们可根据润滑油中出现的碎片而推断喷气发动机轴承这样的构件的磨损情况。

如果我们要研究新破碎微粒的分维数和导致矿石破碎的裂纹结构之间的关系，我们就必须在测量微粒的分维数之前，避免微粒受到磨损。同理如果我们希望根据碎片的分维数找到矿石的碎裂机制，那么靠观察被球磨机磨损后的颗粒就为时过晚了，因为这些

颗粒表面已经在磨机中被磨平了。

一些读者会看出，图 3.15 中所示的球磨机很像用于加工珠宝半成品的打磨设备。在打磨过程中，宝石工 [lapidarian，源于拉丁语"lapis"（石头），指雕琢石头的人] 不断地翻动宝石，用尖锐的砂粒和其它打磨剂打磨宝石。翻滚的砂石藉磨损作用把宝石粗糙的表面磨光。用分形几何的语言讲，打磨处理的目的就是将被打磨宝石轮廓的分维数降到 1.0。如果一个宝石工看到了图 2.15 所示的一系列轮廓线，他一定会认为这很像由曲折轮廓被打磨到平滑、光亮表面过程中所拍下的一系列照片吧。人们已经证明，分维数能用于定量表征表面的抛光过程。图 3.16 所示是在正抛光的铜表面上用粗糙仪测得的轮廓曲线，同时也给出了用构造步长技术测得的分维数（粗糙度仪是一种测量表面曲折程度的仪器，它是通过宝石针在物体表面上滑过时的上下移动来反映表面粗糙度的）[21,22]。

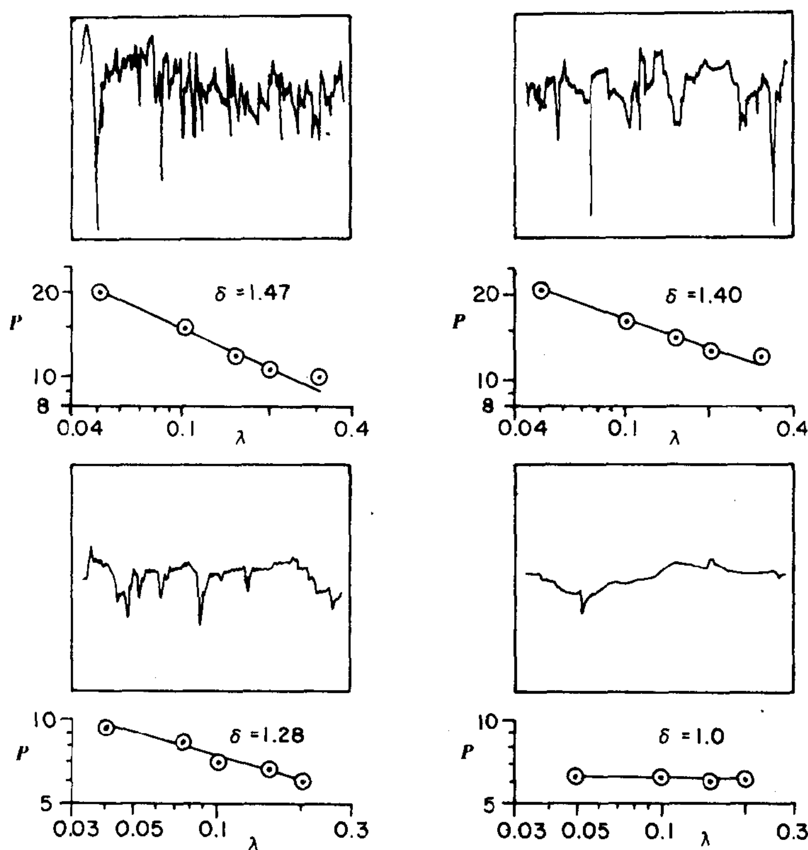


图 3.16 抛光表面的粗糙度可用分维数来描述。在抛光过程的不同阶段由糙度仪测得的铜表面轮廓的 4 条曲线。这些曲线的分维数已用内转式构造步长技术测得[22],[23]

在矿业研究中，取一块矿石，在已知力的作用下使其碎裂，然后测量这些新生碎片的分维数。这样人们就可能考察在球磨过程中影响矿石尺寸减小和断裂的不同作用力。这些新生碎片在带有或不带有锐利砂粒的球磨机中，藉磨损作用以减小碎片表面的曲折程度，而不是靠裂纹减小尺寸。过一段时间，这些颗粒的分维数就会减小到与工业球磨机产品的分维数相同的水平，从而人们就可以研究在工业球磨机中磨损作用对于降低颗粒新生表面是何等地重要。人们也可以通过对原始矿石施加热应力来进行这一类研究，探索用不同方法形成的裂纹，能否有效地提高粉碎和研磨系统的效率。

飞速发展的矿业技术的一个分支是湿法冶金技术（Hydrometallurgical technology）。

在湿法冶金技术中，经浸出工艺提取有价矿物。浸出（leaching）一词来自古英语的“leccan”一词，意为使湿润或冲洗。在科技英语中，浸出是指流体流过一个多孔物体。在进行浸出处理时，可让含有化学物质或细菌的水流过矿体或堆积的碎矿石堆，也可把这些水注入地面上有用矿物矿脉的缝隙中。通过化学作用和细菌作用，有用矿物成份溶进了水中，经化学处理可被回收。

有时浸出作用也可能在人们不在意的时候就发生了。例如，当水滴流过铀尾矿时会浸出残存的镭盐，这些溶有镭盐的水流入矿场周围的河流中会引起公害。在这一例子中，水中的细菌先侵蚀尾矿中的硫化铁形成硫酸，硫酸再溶解铀尾矿中微量的镭以硫酸镭的形式进入河流。矿业工程师是怎样处理这种产生大量尾矿的铀矿石的呢？他们正试图用炸药从矿体中炸出裂缝，然后向缝中注入含有细菌的悬浊液，这样从流过矿石裂缝的水中即可得到有价矿物。有意地运用湿法冶金技术回收地下有价矿物时，所碰到的一个重要问题是在地下爆炸的冲击下岩石产生裂纹的方式。矿业工程师们现在正饶有兴趣地研究如何确定由爆炸应力所产生的裂纹结构问题。以便把矿体上经爆炸产生供细菌侵蚀的裂纹结构同所使用的爆炸技术联系起来。West 和 Shlesinger 已经运用构造步长技术研究在高速冲击产生的应力下碎裂物体的分形结构。他们的理论对于研究钻孔时钻孔附近的岩石如何碎裂的问题可能是有用的[24]。

尽管球磨机对矿石表面有磨蚀作用，但磨过的矿粒仍然显示出分形结构。图 3.17（a）所示就是经过磨矿处理的细粒尾矿轮廓及其分维数。细粒泥浆的一个重要性质是粘性。流体或悬浮液的粘性可以看作是流体流动时流体内部磨擦的度量，换句话说，它是流体粘稠程度的科学描述。水是一种低粘性的流体，糖和蜜则是高粘性的。本书无法全面讨论有关悬浮液粘性的问题，但细粒子的分维数对矿浆粘性的影响却可以从 Syed Kaab Akhter 所获得的一组数据中体现出来。Akhter 柱形同轴旋转粘度计测出了一类如图 3.17（a）所示的镍矿石尾矿与一种矿物油所组成的悬浮液的粘性数据[26]。

在实验中，Akhter 比较了含有不同数量镍矿石尾矿的悬浮液和含有不同数量玻璃珠的悬浮液的粘性。图 3.17(b)所示是一组镍尾矿和玻璃珠悬浮液粘性的数据，摘自 Akhter 的硕士论文。悬浮液的浓度用所含矿石的体积分数表示。例如含 0.1 镍尾矿的矿浆，就是镍尾矿的体积分数为 10%的悬浮液。测得的矿石悬浮液粘度与不含任何矿石的矿物油的粘度之比即为悬浮液的相对粘度，为一无量纲数。从图 3.17（b）中可看出，当体积分数在大约 0.15 以下时，单一尺寸的玻璃珠悬浮液的粘性几乎与尾矿悬浮液粘性一样；然而当体积分数超过 0.15 时，尾矿悬浮液的粘性比玻璃珠悬浮液的粘性增加得要快一些；在体积分数为 0.22 时，尾矿悬浮液的粘性增加到接近玻璃珠悬浮液粘性的 5 倍［注意图中两个坐标轴均为对数坐标］。两种悬浮液粘性之间这种显著的差别是由于凸凹不平的矿粒轮廓使其表面附近的流体不易流动所致。在更高浓度时，粒子被迫更紧密的挨近，凸凹边界对流体流动的限制对流体粘性的影响远远高于低浓度时的情况。我们期望这两种悬浮液之间粘性的差别能与矿石粒子轮廓的分维数和矿石粒子的整体外形（可用形状因子，例如纵横比定量表示）有规律性地联系起来。

分维数也许是描述浆体中粒子的曲折边界对浆体粘性影响的极为有效的手段。在选矿厂，大量矿浆必须靠泵来输送，而泵的能耗则依赖于矿浆的实际粘度。图 3.17（b）则

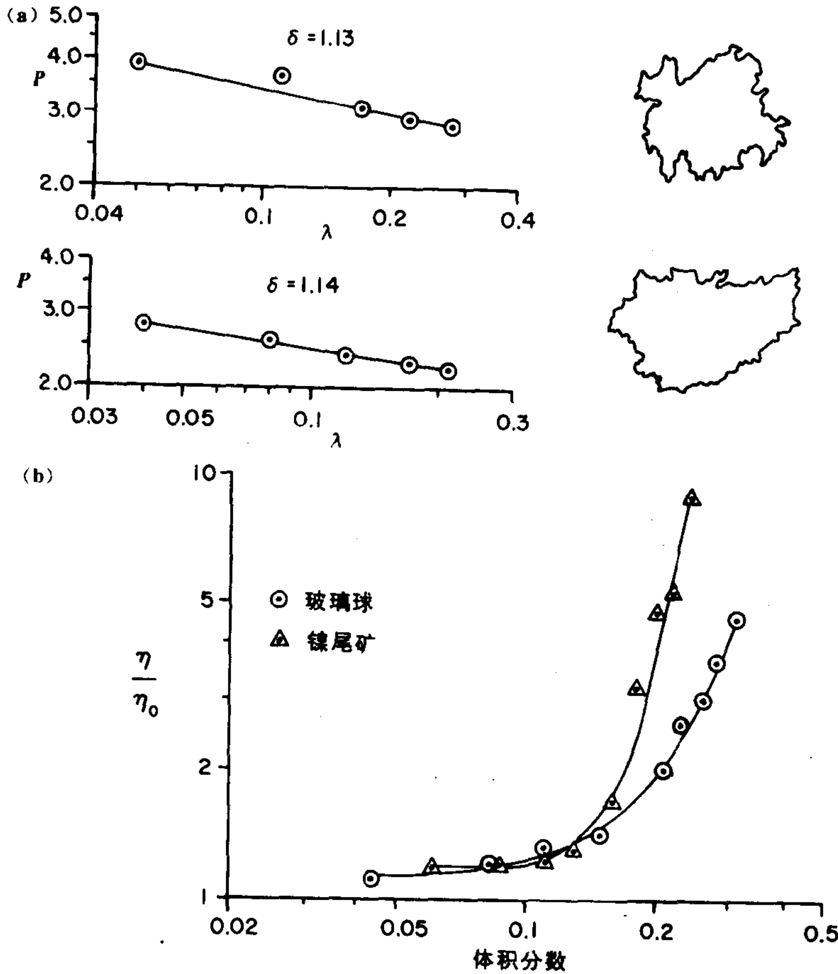


图 3.17 工业尾矿浆体的粘度与悬浮粒子轮廓的曲折程度有关。(a) 分维数可用来描述尾矿颗粒的粗糙度；(b) 比较不同浓度镍尾矿浆体和玻璃球浆体的粘性，可见在固体浓度大于 0.15 体积分数以后，悬浮粒子的形状和轮廓曲折度的影响变得更明显了[25]

可以用来预测输送矿浆所需的能量。从图 3.17 这样的数据曲线可以推断出，当其它条件相同时，泵运两份浓度为 0.15 体积分数的矿浆所消耗的能量，还不足以泵运一份浓度为 0.3 体积分数的矿浆。另一方面，泵运低浓度尾矿所节省的能量有可能为从尾矿池中返回大量的水所消耗的能量所抵消。

前已述及，在任何使用反馈控制方法的磨矿回路中，一个重要方面是对产品粒度的检查。在选矿生产中，大量的精力花费在全自动磨矿反馈控制所需要的粒度检测和其它必要信息的提供上[27,28]。在线粒度分析一词就是用于描述自动磨矿回路中的粒度自动监测部分。在选矿工业和许多其它微粒生产工业中广泛使用的在线粒度分析是由衍射微粒仪（Eriometry）完成。在衍射微粒仪中，粒子的尺寸是由穿过任意粒子群的激光束所产生的衍射图而推测出来的。衍射微粒仪这一名称的由来这样的：建立光的波动理论和第一个研究光的衍射特性的 Thomas Young（1773－1829），当年为测量从澳大利亚进口的羊毛细度而提出这样一种技术，即用单色光照过羊毛样品，从其衍射图形判定羊毛的细度。Young 命名这种原始的仪器叫衍射微粒仪（Eriometry），因为希腊语中羊毛一词为“erios”。在现代科技英语中，衍射微粒仪指用于利用粒子或纤维产生的衍射光斑来推断粒子尺寸的任何仪器。

图 3.18 中所示的是规则排列和不规则排列的单一尺寸球体所产生的衍射图案。可以

看出，不规则排列的球体所产生的衍射图案与单个球体所产生的图案相同，只是图案的光强是单个球的 n 倍，n 是衍射粒子的数目[29]。粒子的尺寸可以从衍射图案中明暗环的位置推断出来。如果穿过不同尺寸的球体所组成的不规则阵列，那么所产生的复杂的衍射图案将由光束分别穿透每种尺寸粒子所产生的衍射图案叠加而成。在商品化的衍射微粒仪中，计算机用来分解复杂衍射图案中对应的各种尺寸的能量水平分布。此时假设参加衍射的粒子都是球体（又一个球形鸡模型）。这种假设将导致结果的较大偏差，因为粒子形状和织构引起的散射可能会对衍射图案上的能量空间分布产生重要影响[30]。

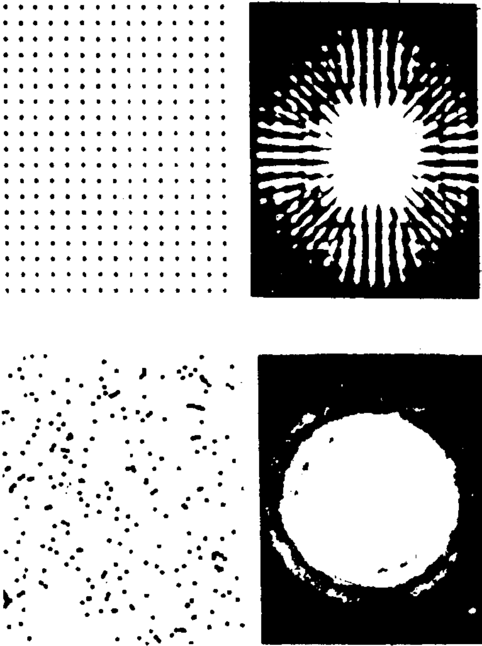
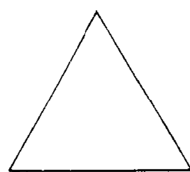


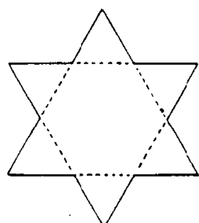
图 3.18　从规则陈列的单一尺寸球体的衍射图案可见衍射物体的规则性结构产生的干涉条纹。而随机排列的单一尺寸球体的衍射图案与单个球体衍射图案相同，只是强度增强了 n 倍（n 是随机陈列中的球体数）

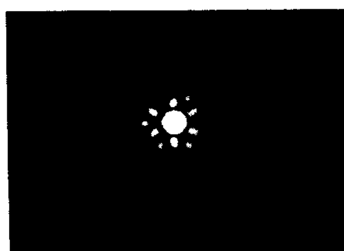
粒子结构和织构影响到衍射图案中散射光的空间分布（参见图 3.19）。Leblanc 实际测量了图 2.13 中各级三分 Koch 岛的散射特性[31]。为了给读者提供更多的信息，在图 3.20 中我们给出了不同几何形状的物体所产生的衍射图案，这些图案摘自 Murphy 的硕士论文[32]。从这些不同几何形状物体的衍射图案中我们可以看出与简单形状物体所产生的衍射图案相比，物体的复杂边缘会使光线更偏离衍射图案的中心。如果一个机器人观察一个衍射图案，而又不知道尖锐的边缘会散射光线的话，那么它一定会作出能量越远离中心，则对应的粒子尺寸越小的判断。商品化的衍射微粒仪就是这样一个简单的机器人，它通常不装有从球体衍射图案中辨别出边缘效应的控制程序，到目前为止，它还只能把衍射体作为球体来解读所有的衍射图案。而边缘和织构的散射光对衍射图案确有影响，就象图 3.19 中不同的 Koch 岛所示的那样。首先，简单三角形边缘对衍射的影响体现在从相对明亮的衍射中心向外生出的 6 条亮线。图 3.19 所示的全部照片是在同样条件下拍摄的，它们是一些用于同一光具座的同样大小的底片。虽然无法从这些照片定量地测出衍射图案的能量分布，但我们可以据此而推断不同 Koch 岛对衍射图案的相对影响。

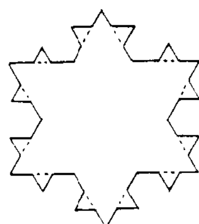
随着 Koch 岛级数的增加，岛的几何结构的基本变化是其周界变得更加曲折了。可以看出这会导致衍射图案中边界效应的减弱，但与此同时，由岛的织构所引起的从衍射图案中心向外散射的能量也增加了。因此，低级 Koch 岛的边界衍射效应将产生一个易于

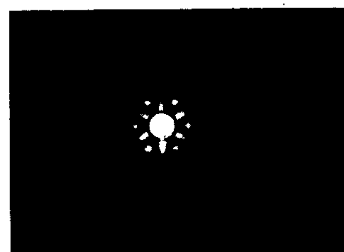

第1级

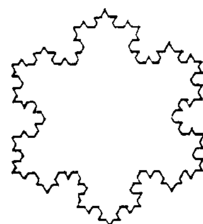


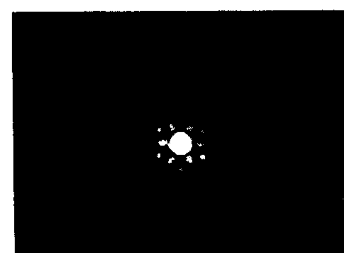

第2级

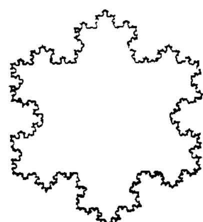



第3级




第4级




第N级

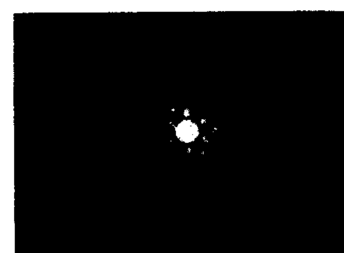


图 3.19 一系列级数递增的三分 Koch 岛的衍射图案表明岛的边界织构对衍射图案有影响[31]

引起误解的能量分布图案，以致使计算机做出一个错误的、比实际尺寸偏小的粒度报告，而当粒子边界曲折程度增加时，情况会变得更糟。上述情况对于那些在工业上用衍射微粒检测技术进行在线测量的人来说是十分重要的。Koch 岛的衍射图案提醒技术人员，如果正在监测的粒子具有分形结构，那么衍射微粒仪将产生其判断系统会作出错误解释的光学分布信息。Bickel 等曾讨论了可以完全把粒子织构的散射图案等效为球体衍射图案

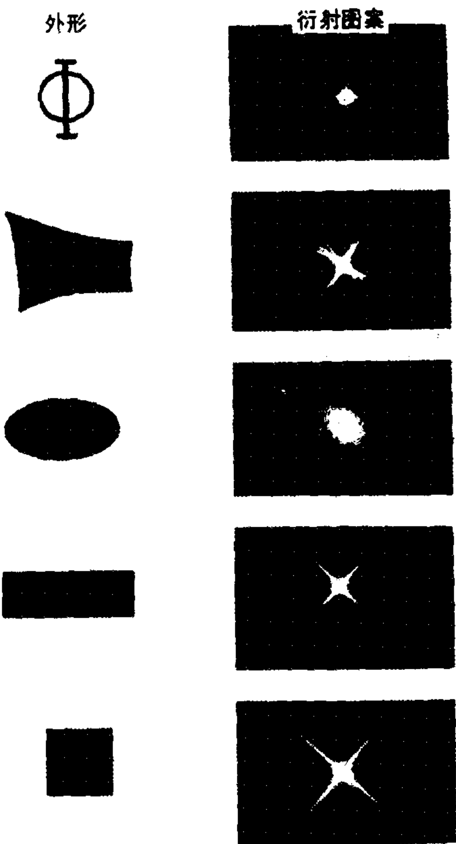
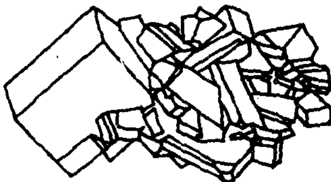


图 3.20　边缘有棱角的微粒的衍射图案（由 Murphy 在其微粒光学特性的研究中得到[32]）



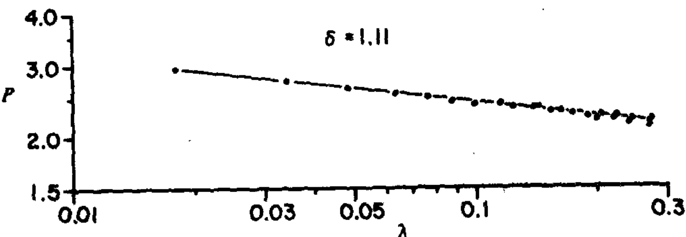


图 3.21　具有欧氏边界的单晶形成的晶簇却呈现出分形边界，如图中的重晶石（硫酸钡）聚集物所示[21]

的方法[33]，想深入了解这方面问题的读者可参看他们的论文。

在研究悬浮液中的微粒时，单个微粒的织构产生的衍射能量可能产生误导性的结果。这种情形在人们研究悬浮液中的晶体（由化合物沉积而成）生长时时有出现。我们已经指出，不同类型的晶体与不同分维数的各级 Koch 岛颇为相似。在图 3.21 中所示的是一

堆叫作重晶石（硫酸钡）的无机晶体及其边界的结构分维数曲线。这些是一个由立体子单元聚集成熔凝整体而展现分形特征的绝好例子[21]。对一系列粒子（这些粒子拟在工业条件下采用衍射微粒仪测量）的分维数的研究可以在解释具有分形边界特征的粒子产生的衍射图案时引入简单的校正因子。图 3.22 所示是另一系列微粒轮廓的衍射图案。这些衍射图案可说明粒子形状和分形边界在光散射时的交互影响[31]。

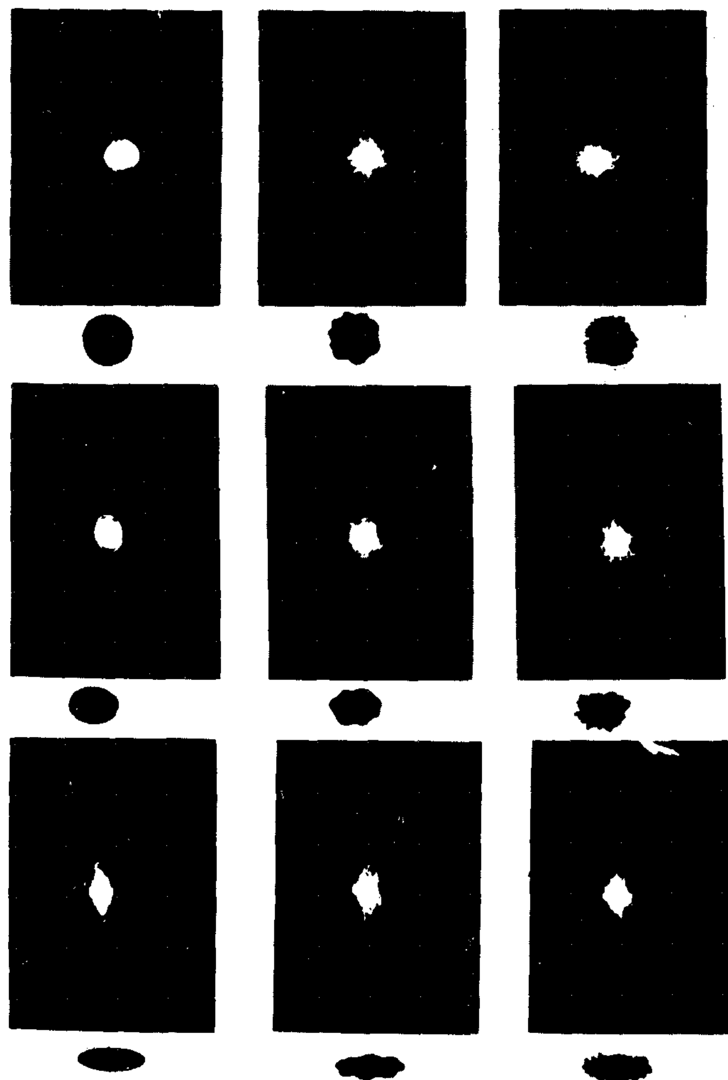


图 3.22　一组说明粒子形状和织构对粒子衍射图案影响的照片（原文中误为数据——译者注）。Laurentian 大学曾用衍射粒度仪测量由不规则形状的粒子所形成的工业浆体，测量时需对粒度仪引入校正因子，上述照片就是为研究校正因子而拍摄的[31,34]

关于三分 Koch 岛的数据是在 Leblanc 试图利用粒子边界的衍射图案来测量边界的分维数时得到的。遗憾的是，正如图 3.19 和图 3.21 中所看到的那样，由于衍射图案中形状、尺寸、织构之间的交互作用，使得解释具有分形边界的粒子衍射图案这一工作变得十分复杂[33]。

矿业工程师感兴趣的分维数的另一个研究领域是矿山污水的净化问题，污水通常被贮存在一个大型容器中，以便使悬浮液的固体能够沉淀出来。为加速沉淀过程，通常加入絮凝剂。絮凝剂是一种能产生大而松散的悬浮固体聚集物的化学物质〔聚集物（aggregate）一词比结团（agglomerate）贴切，因为简单的动作，如搅拌常常能破坏聚集物〕。这种松散的聚集物也叫絮状物（flocs），因为它看起来象漂浮在水中的绒毛；拉丁语的“floc-

cus”意为一簇毛。一簇毛比单个粒子能更快地从水中沉积出来，因此加入絮凝剂后可缩短悬浮固体的沉积时间。

絮凝机制中一个有意义的问题是预测给定絮凝剂的效率。一些科学家已对絮团生长的动力学问题进行了深入的研究。特别是 Sutherland 和 Goodarz－Nia 已经用计算机模拟了絮团的生长过程[35－38]。图 3.23 所示即是他们模拟生长出的两组不同的絮团。图 3.23 (a) 中的聚集体是通过单个粒子与正在生长的聚集体碰撞而形成的；图 3.23 (b) 中的聚集物则是单个粒子捕获以及絮团间相互碰撞的结果；前者的生长机制是后者的改进型。这些絮状物是在分形几何出现之前被模拟出来的，因此 Sutherland 和 Goodarz－Nia 发现定量描述它们的结构很困难。其实图 3.23 中的絮状物轮廓明显地表现出分形特征，已有人对它们进行了分形考查[39－42]。图 3.23 中已经给出了用侵蚀膨胀法测得的不同絮状物的分维数。看来有理由认为，通过比较沉降物中絮凝剂形成的真实絮团的分维数与图 3.23 中测得的絮团分维数，矿业工程师能够解释一定的絮凝剂有助于在一定的悬浮液中形成絮状物的机制。图 3.23 所示的不同类型絮状物的生长机制将在第 4 章讨论。

在 Mandelbrot 原书（本书第 1 章的参考文献[1]）的第 2 章，他曾引用了 Jean Perrin 1906 年所写的有关肥皂泡的讨论，有趣的是，这种肥皂泡具有不确定的性质。Mandelbrot 指出，在有关肥皂絮团的深具洞察力的讨论中，Perrin 正在向着而今已成为分形几何一部分的一种自然现象的分形描述迈进。

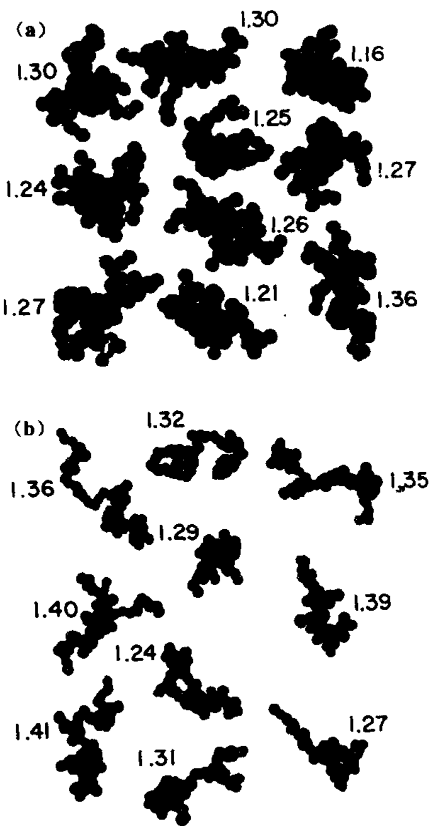


图 3.23　Sutherland 和 Goodarz－Nia 用计算机模拟聚集物的生长，他们模拟出来的聚集物可用分维数描述[35－38,42]

3.5 宇宙微粒的分形结构

当讨论矿业中应用分形描述的可能性时，我们曾经指出新碎开的岩石碎片可能比经过破碎机和研磨机处理后的碎片具有更曲折的边界，因为磨损作用会消弱新碎片的分形特征。在太阳系中有一个地方，我们在那里可以发现未经任何磨损的新鲜碎石，这就是月球表面。当阿波罗 12 号飞船从月球表面带回一些粉尘时，我们发现粉尘中包含各种形状的碎片，特别是其中的一种具有非常曲折的结构。人们请粉末科学先辈之一，当时任英国 Loughborough 技术大学化学工程教授的 Heywood 描述这种月球粉尘的特征。图 3.24 所示是由 Heywood 教授拍摄的 4 个碎片的照片[43]。那时 Heywood 教授研究这些碎片时，称它们为粪状物（Scoracious），该词在几何学上用于描述一种多孔的轮廓曲折的岩石，Scoracious 源于希腊语，可文雅地译为“粪状的”，图 3.24 中月球粉尘的轮廓明显地可以用分数维来描述，在图的下部给出的是用等边多边形法（Equipaced polygon logic）测得的 4 个月球碎片的分维数[44]。看看这种粉尘是否和地球上新碎裂的岩石的分维数相似，也许是一件有趣的事。

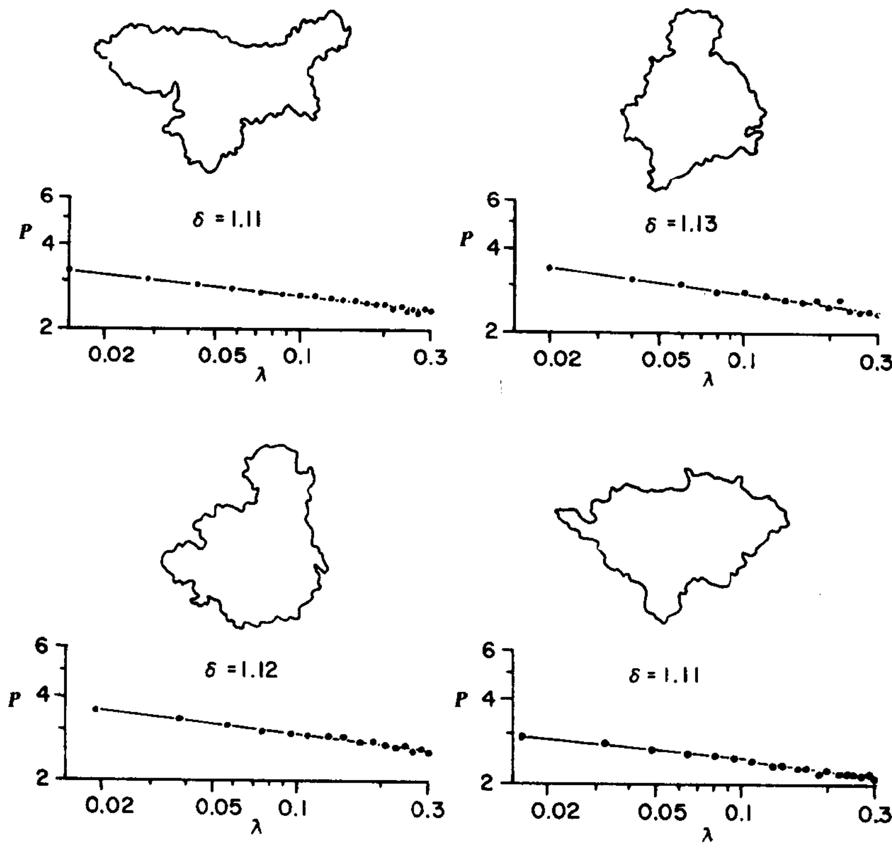


图 3.24 粪状月球粉尘微粒轮廓的曲折程度可用分维数来描述[44]

认识 Heywood 教授是我的荣幸，正是他鼓励我从事微粒子特性的研究。Heywood 教授热爱科学，对他来说，没有什么事情比发现新的研究成果更为快乐。他的这种精神，在他自己有关月球粉尘研究的评述中，已充分地体现出来。他一边看着那些月球粉尘，一边说道：“这是一个激动人心的研究计划。尽管目前还刚刚起步，但它的魅力诱使你愿意

花上几个小时，去观察显微镜下这些异乎寻常的粒子而如醉如痴。这种感觉与 Hooke 当年第一次用显微镜观察到地球上的砂粒时的心情并无两样”[43]。Heywood 教授从不停止思考。他告诉我他曾深深着迷于粒子形状的测量问题，有一天他坐在海边欣赏海浪拍打着沙滩时，竟在海滩上测量起砂粒的形状来了。Heywood 教授可能早已迷上了分形几何！1984 年他的遗孀 Francis Heywood 博士把他的全部出版物捐给了 Laurentian 大学的粉体研究机构。这些内容广泛的出版物，可追溯到 1932 年，其中有许多材料足以说明 Heywood 教授是粉体科学的奠基者之一。

另一种显示分形结构的宇宙粒子是 Brownlee 教授收集的宇宙粉尘[45,46]。在一系列旨在研究古代宇宙粉尘的试验中，Brownlee 教授曾驾驶 U2 飞机在高空飞行，通过固定在机翼上的扫描收集器捕获从外层空间进入地球大气层的宇宙粉尘[45,46]。图 3.25 所示的宇宙粉尘看来是由超微粒结团而形成的。在 Laurentian 大学曾用等边多边形技术测得了这种粉尘的分维数，结果也示于图 3.25 中[44]。这种聚团的分形结构将有助于科学家们解释聚团的形成（参见第 4 章有关不同聚团生长机制的讨论）。

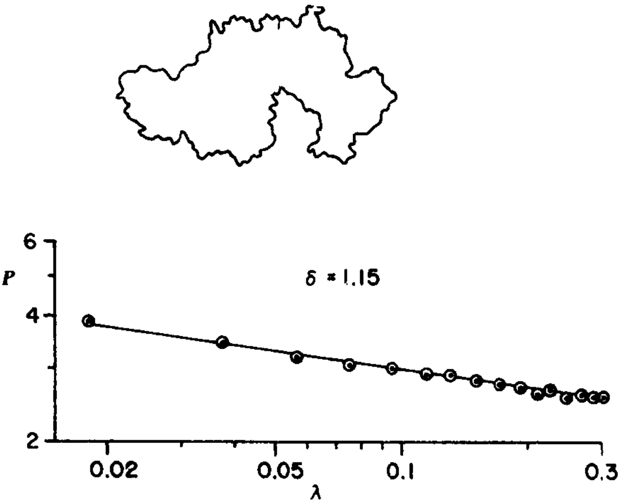


图 3.25 Brownlee 博士在高空飞行中收集到的宇宙粉尘显示出分形结构[44,45]

3.6 几类砂粒的分形结构

在前边有关分形在矿业上的几种可能应用中，我们曾提到磨损会降低新鲜岩石碎片的分维数。其实这类实验千百年来一直在大自然中进行着，今天的砂粒就是自然力长期磨蚀石英岩的结果。形成石英砂的最初阶段是石英岩的破裂。另外一些砂粒是由另一些岩石形成的，但一般来说由较软的岩石形成的砂粒在河流和海洋的冲击下，很快地就碎裂了。我们所熟悉的很多海滩的砂粒是由远古时代的石英颗粒在海浪的冲击下逐渐变圆的。海岸附近砂粒的轮廓通常十分光滑，无法用分形来描述；而对一些不规则砂粒的分形研究，其开先河者当推 Whalley 和 Orford[46,47]。

图 3.26 所示是 4 种不同外观的碳酸钙（石灰石）海滩砂粒。Whalley 和 Orford 报导说，这种特殊的砂粒依产地不同，其结构分维数介于 1.06～1.13 之间，而织构分维数则在 1.05～1.11 之间变化。这种砂粒的内部结构也许可以用多孔分形来描述，但 Whalley

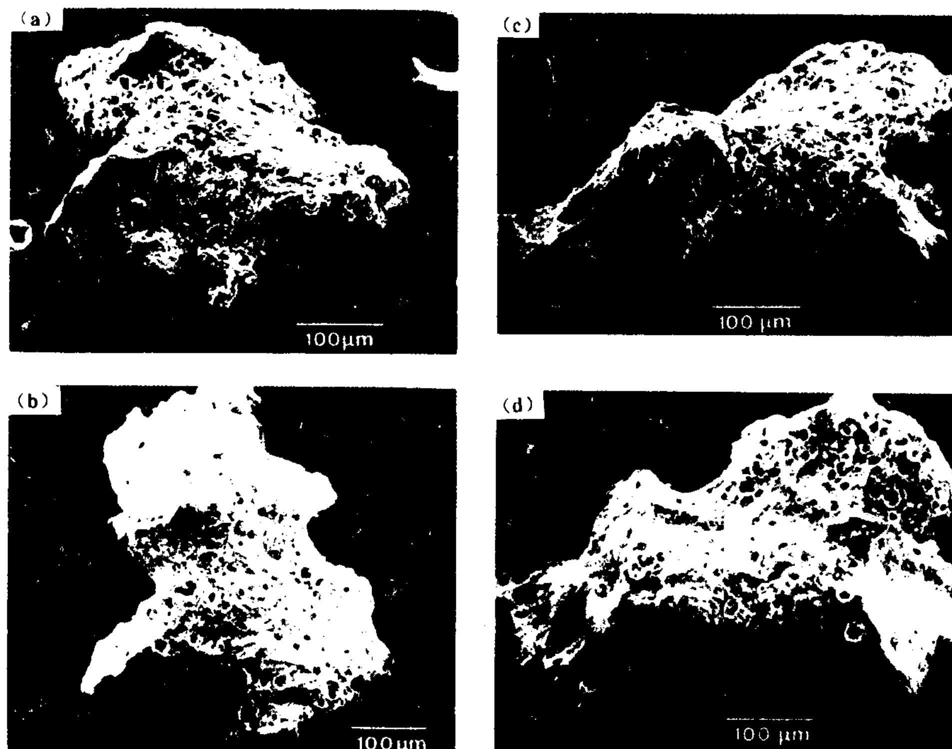


图 3.26 世界上一些地方砂粒是由碳酸钙构成的。Whalley 和 Orford 曾估算出这种砂粒的分维数。图中给出同一砂粒从 4 个不同角度得到的照片。Whalley 和 Orford 用分维数表征了这些砂粒的结构

和 Orford 在他们的原文里没有对此进行深入研究。图 3.27 所示是 Whalley 和 Orford 研究的另一些有趣的粒子，其中图 (a) i 和 (a) ii 所示的是两种不同的新碎成的石英颗粒，正是这些碎片由于周围潮水的作用而形成圆形的海滩石英砂(石英是一种硅的结晶形式，化学分子式为 SiO2)。图 3.27 (b) i 和 (b) ii 所示则是美国 Helens 火山 1980 年爆发时喷射出来的两种粒子。这类微粒叫火山灰 (Pyroclastic)，它来自希腊语词根“pyro”，意为火，而“klaein”意为碎裂，因而火山灰就是在火山爆发时由岩石碎裂而成的碎片。Whalley 和 Orford 报导说这种无孔的火山灰粒子的结构分维数是 1.07，织构的分维数为 1.02；而多孔的火山灰粒子的结构分维数是 1.05，织构的分维数是 1.04。在他们的许多文章里，Whalley 和 Orford 认为分维数对描述不规则砂粒很有价值。

3.7 某些吸入粉尘的分形结构

3.7.1 何为吸入粉尘的技术含义

正如在本章开始时所说的那样，我一生在应用科学中第一个深入研究的粉末是用于制造核反应堆中燃料棒的二氧化铀粉末，这种燃料棒是粉末冶金和陶瓷技术的结合的产物。

某技术字典中把陶瓷定义为由粘土或其它硅酸盐制成的产品。而另外一种字典里则作出如下的描述：“陶瓷从属于陶器，源于希腊词 Keramos，指用粘土制成陶器”。这两

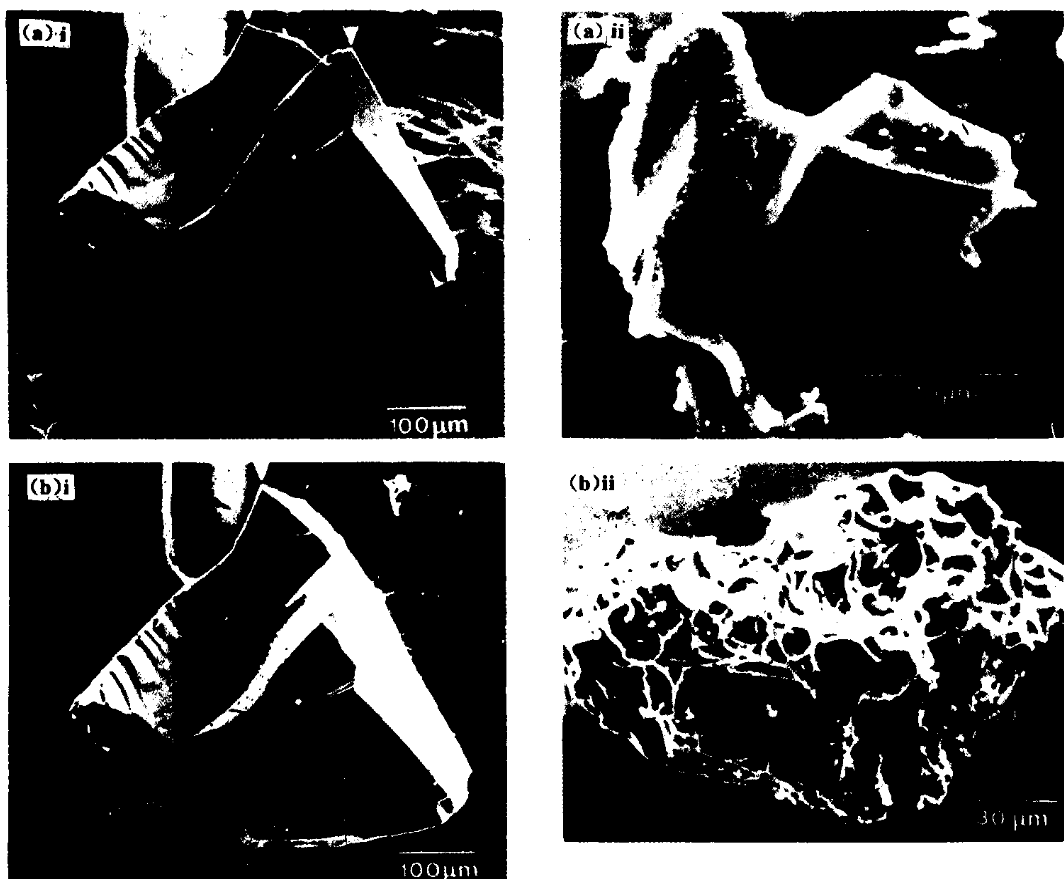


图 3.27 Whalley 和 Orford 用分维数表征新破碎的石英粒子和火山灰微粒

种定义已远远落后于 20 世纪的陶瓷技术水平了。发展中的现代工业正以空间（space-age）陶瓷取代机器和飞机制造中的金属材料，以提高内燃机的性能指标。现代陶瓷材料可定义为由金属氧化物或硅酸盐、碳化物及其它化学物复合材料等烧结而成的坚硬物质。陶瓷具有很高的热稳定性，较低的热延伸率及高电阻率等特性。现代陶瓷技术可能是应用科学领域发展最快的技术之一；陶瓷材料和复合材料将成为 21 世纪最重要的材料。现在的发展趋势要求很多陶瓷原料是很细的粉末（粉末的最大允许直径要小于 2μm），以便有足够的表面能在模型内烧结而制成陶瓷构件。尽管从烧结能量的技术角度看，这种细粉是最适宜的原料，但对那些在烧结过程中接触细粉的人来讲，这些可吸入粉尘无疑是潜在的危害。

从陶瓷粉末的制备方法上考虑，我们有足够的理由相信，确保这种粉末的危害性要比过去 50 年中职业卫生学家确定传统工业粉尘的危害复杂得多。究其原因，是这种粉尘具有更复杂的形状。相对而言，矿业粉尘，如金矿中刚碎裂的石英、煤矿中的煤灰和石棉纤维则具有较为简单的几何形状，而陶瓷工业所使用的粉末常常具有分形结构，这一点已在图 3.28 中藉两种微粒予以说明。可以看出煤粉具有简单的结构，而二氧化钍微粒的结构则可用分维数来描述[31]。

由于某种原因（这些原因将在第 5 章末尾予以讨论），二氧化钍粉末的外观表明它或

是被制成烟雾状或是制成沉淀物。也许讨论一下为何现代陶瓷粉末都是被制备成这两种形式是很有意义的。研究固体粉末的科学家不相信在破碎较大的固体粒子时会产生直径小于 2μm 的粉末，因为直径小于 2μm 的固体粉末很可能是无缺陷的高强度晶体。固体破裂时，裂纹会从一个缺陷裂向另一个缺陷，裂纹穿晶而过比穿过缺陷需要更多的能量。这一点可在切割宝石时看到：虽然猛然一击可以使宝石轻易裂开，但无瑕的宝石却非常难以切割（附带说一句，用超声波清洗宝石是危险的，因为订婚戒指上的宝石会在这种清洗设备中碎裂）。

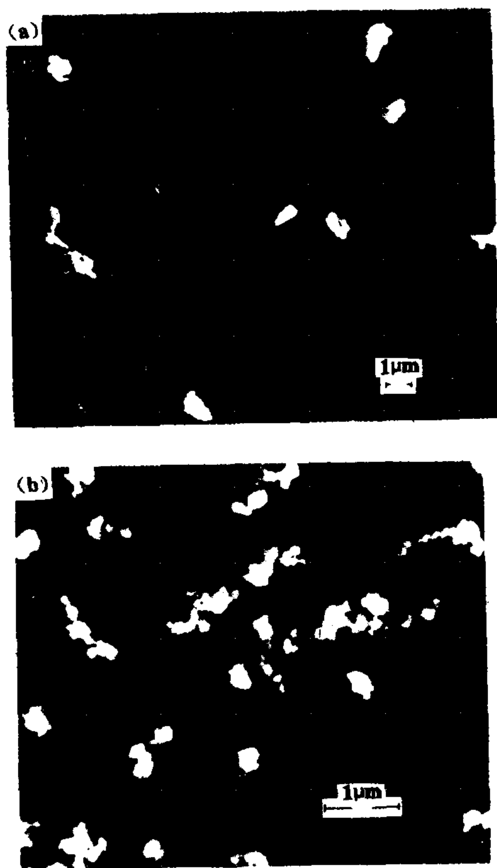


图 3.28　煤尘的单个粒子具有相对简单的结构，而一些新产生的陶瓷粒子表现出分形结构[56]。(a) 煤尘；(b) 用于核反应堆燃料棒中的二氧化钍粉末

因为用破碎和研磨的方法制备小于几个微米的粉末比较困难，因此陶瓷学家以及核工程师用化学方法制备粉末材料。一种用于制备细粉的化学反应过程是，当发生化学反应的液体里出现细微晶体时，这些晶体会沉积出来。这些由沉积产生的细小的原始晶体通常由于紊动碰撞和（或）持续的晶化作用而聚结成团。沉积法制得的聚团通常具有明显的分形结构（见第 5 章）。

烟气（fume）是极细的烟。这一词来自拉丁语描述烟的词“fumus”。使一个地方变香的原始意义是指用烟把它填满。蒸汽消毒（fumigation）意指用烟给一个区域消毒（当一个人使用香水时，不也就是对他自身进行消毒吗?）。工业上广泛使用的一种化学产品叫硅石雾（fumed Silica），我们通过硅石雾制备过程的简短讨论就可以学到很多关于烟雾的知识[48]。

图 3.29 是用来说明制备硅石雾过程的图解。四氯化硅放在氧气和氢气的火焰上烧

裂，图中所述的化学反应在火焰中进行。在火焰的最热区域产生硅石的原始球形微粒，它们一离开最热区域便迅速冷却。原始球形微粒的直径在 0.007～0.014μm 之间。在火焰温度较低的区域，这些原始球形微粒相互碰撞而结团；进一步冷却时，蓬松的结团又彼此缠结形成较大的低内聚力的聚团；在后续处理中聚团可以再分散开来，而原始结团则牢固地烧结到一起，不能轻易打开。图 3.30 所示是一系列高分辨电子显微镜下原始结团的照片，这些结团具有明显的分形结构。分形结构和火焰内碰撞动力学之间的关系将在本章的稍后部分讨论。

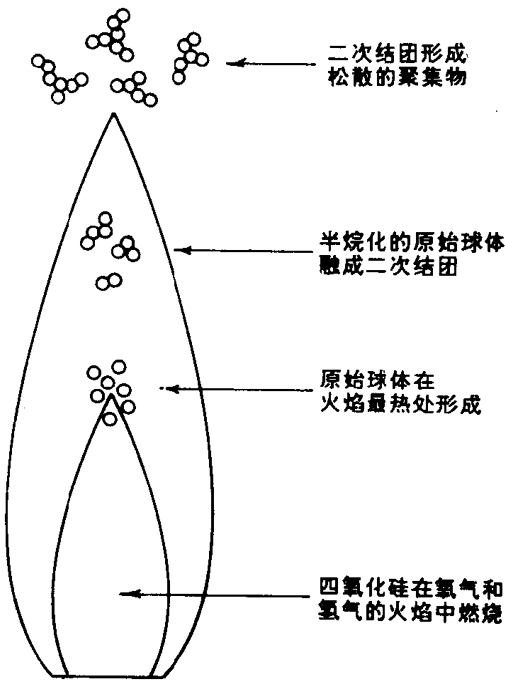


图 3.29　在硅石雾形成过程中，由四氯化硅爆炸产生的原始球体在千分之几秒内迅速冷却，并在火焰中温度不高的地方相互碰撞而形成结实的结团。这些原始的结团然后再形成松散的，能被较弱剪切力分开的聚集物[48]

在燃烧或沉积的初始阶段所产生的原始球体和单个晶体会发生第二次随机结团。这一现象在许多产生微粒的过程中十分常见。因此我们预计这种过程产生的粒子常常显示出分形结构。

为了弄清为什么吸入简单粉尘（如图 3.28（a）中的煤尘）对肺部的危害易于确定，而具有分形结构的粉尘的潜在危害却难以确定这样一个问题。我们需要考察这些粉尘是如何侵入肺部的，以及沉积到肺部的粉尘又会引起什么问题。图 3.31 所示是一幅简化的人体肺部结构图[52]（肺的分形结构将在第 10.5 节介绍），而图 3.32 所显示的则是考查微粒进出肺部运动时所必须面对的基本的流体力学问题。首先，由于口腔和鼻腔的作用，只有直径在 200μm 以下的微粒才能进入肺的上部。当微粒移动到口腔下部时，肺部的通道不断地分为越来越窄的子通道，这就必然引起空气在这些通道中流动状态发成变化〔在第 10 章中可以看到，肺部的分支结构可以被描述为“指进分形”（finger fractal）〕。为查清混入空气中的粉尘粒子的沉积行为，需要考察作用在粉尘粒子上的两个力。

首先是粒子本身的重力，它使粒子沉入肺内。另一个是运动气流对粒子的推力，它驱使粒子顺着气流的方向运动。对小于某一尺寸的粒子，由气流产生的推力支配着粒子的运动。数学家和物理学家已经解决了进入肺内的坚硬、光滑的单球体粒子在肺内的动

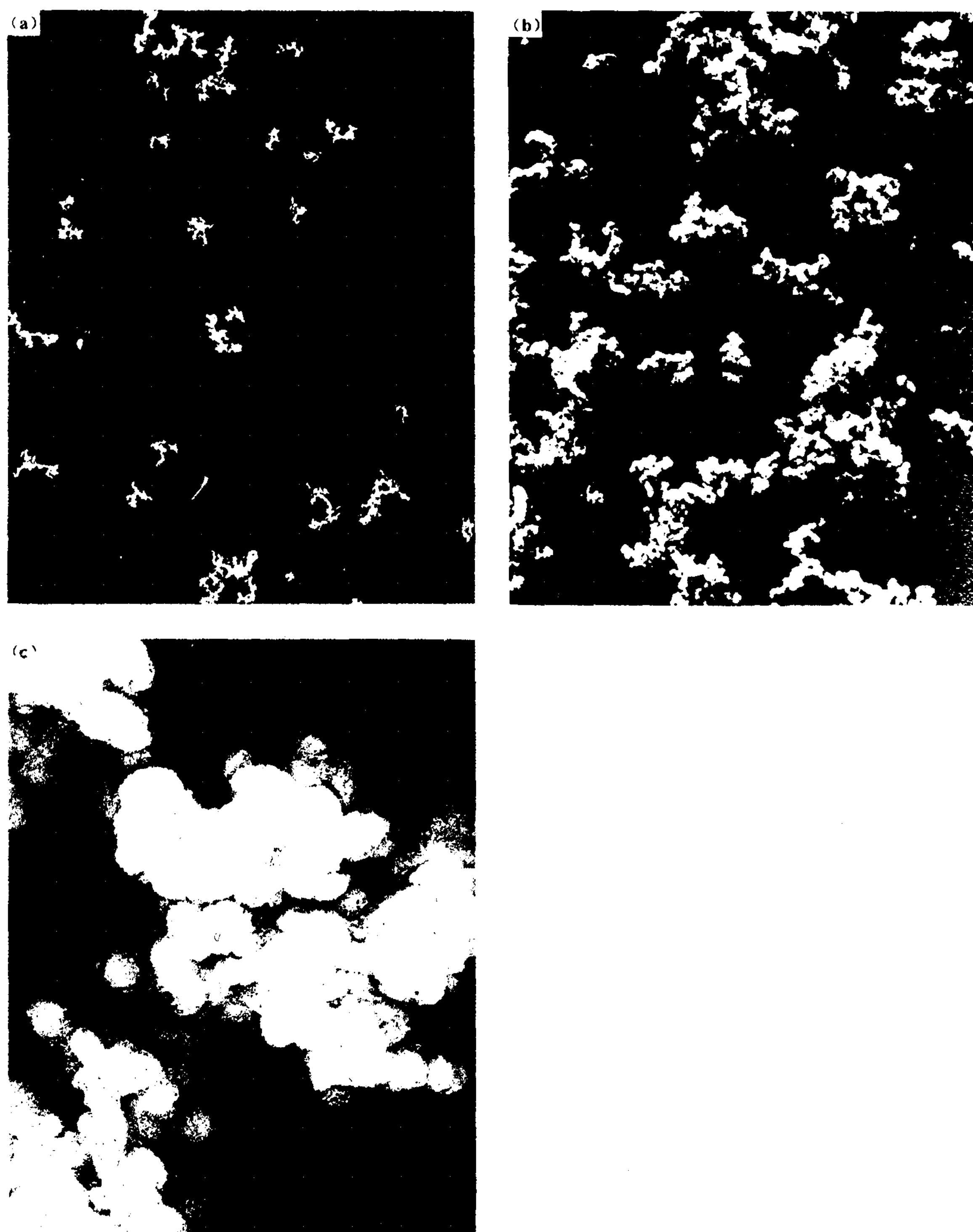


图 3.30　硅石雾微粒结团的电子显微镜照片显示出分形结构[46]

力学问题，如图 3.32 (a) 所示；但推测如图 3.32 (b) 所示的象葡萄串状的结团粒子的动力学行为看起来是一件十分困难的事。

一些科学家已经建立起特殊装置用于研究流体中不规则形状粒子的动力学问题，并且已经得出了一些关于粒子尺寸与动力学行为关系的数据。在描述不规则粒子的动力学

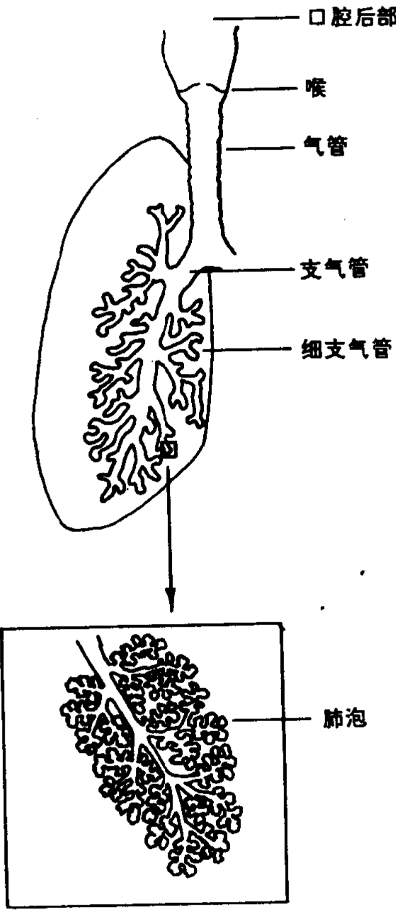


图 3.31 评估粉尘粒子进入人体肺部深处的能力是一个流体动力学问题，其研究粉尘粒子在人体肺部通道中随气流的运动[52]

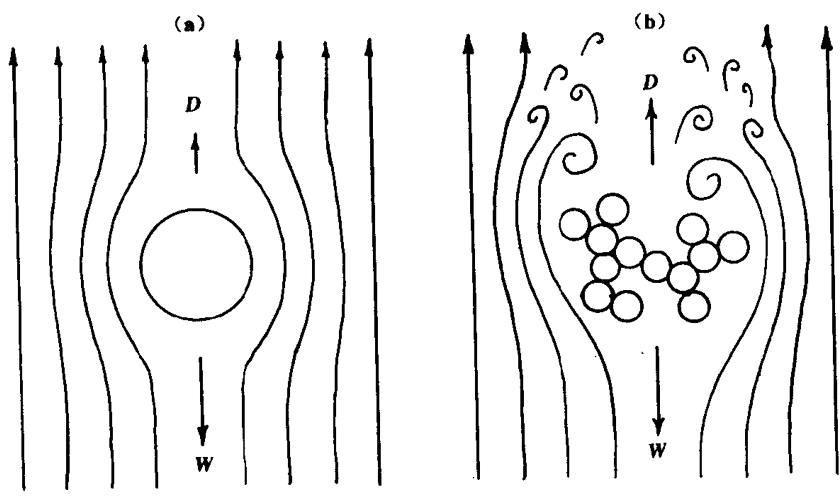


图 3.32 研究进入肺部的球形粉尘粒子的动力学问题并不困难，但要预测具有分形结构的粉尘粒子在肺内的动力学问题，在目前的技术水平上尚无可能。不规则结构的粉尘微粒的空气动力学直径必须经实验测定[49-51]。(a) 球体周围的平稳气流；(b) 分形结构物体周围的气体流动极为复杂，难以描述；D 为浮力；W 为重力

行为时，科学家们发现，定义一个叫作空气动力学直径（aerodynamic diameter）的量是十分有价值的。这个空气动力学直径是在粘性流体中与不规则粉尘粒子具有同样沉降速度的单位密度的光滑球体的直径。不规则粒子的动力学直径可以用几种市售仪器直接测

得[50.51.53.54]。

Timbrell[50]（他发明了一种可直接测量空气动力学直径的仪器）建议用一种巧妙的方法来说明悬浮微粒的物理结构和它的空气动力学直径之间的对应关系。他利用了一种涂家具的虫漆，这种虫漆滴干燥以后的密度近似等于1.0，因此球体虫漆的物理尺寸等于它的空气动力学直径。如果我们把少量的虫胶球体注入在气溶胶分光计中行将分离的悬浮微粒的雾尘之中，那么与指定空气动力学直径的粉尘一起沉积下来的虫胶微球就可以直接给出粉尘粒子的物理尺寸和空气动力学尺寸之间的差别。图3.33所示就是与虫胶球体进行比较的三组分级后的工业粉尘。Timbrell 用这些数据证明，长直纤维的直径是预测其空气动力学行为的决定性因素。

在研究相对简单的粒子结构时，通常可以认为空气动力学直径大于5μm的无毒粉尘对肺部没有特殊的危害。这要归因于这么大尺寸的粉尘会沉积在包着一层细发状粘液的肺部通道壁上，这种细小的发状细胞称为绒毛（cilia），沉积在绒毛上的粉尘在绒毛有节律的运动下被排出肺外。这一过程十分象一个伤员被很多人用手举过头顶传送的场面。由此可以推测，吸烟的人比不吸烟的人更易染上肺部疾病的原因之一，是烟草中的尼古丁麻痹了肺壁上的绒毛，阻碍它们清理肺通道上沉积的较大的粉尘粒子。因此，尼古丁使肺部对吸入粉尘的第一道防线失效了。在肺部支气管末梢上的气囊失去了这种粘液防护系统，因此进入到气囊的粉尘不会再被排出体外。实验已证明，空气动力学直径小于5μm的细小粉尘可以进入这些气囊中。这种气囊被医学专家称为肺泡（alveoli），它有几百个微米宽，因而由吸入粉尘导致的危害并不是来自粉尘对肺泡的堵塞。

在工业卫生学中，把吸入粉尘（respirable dust）定义为空气动力学直径小于5μm的微粒。当粉尘最终在肺泡中沉积时，很多迹象表明粉尘表面是一个重要因素。例如石棉粉尘和香烟混合后表现出特殊的致命危害的原因之一就是香烟烟雾中的一种致癌物质以一种特殊方式吸附在石棉纤维的表面上。由于定向吸附在石棉表面而被化学击活的致癌物比漂浮在无尘空气中的致癌物对肺的损害更为严重。

我们已经知道，粉尘的形状会影响它在肺部气管中运动时的沉积动力学行为。粉尘沉积在肺壁上的几率称为沉积因子（lodgability factor）。

对于简单的几何形状，如纤维或较结实的粉尘微粒，这些粒子的空气动力学直径、沉积因子以及表面活性等，用一种较简单的方式便可以与粒子的外观尺寸联系起来。然而，当我们考察燃烧产生的烟雾、内燃机排出的油烟等吸入粉尘时，就很难以简单的方式建立起沉积因子和表面活性与粒子的空气动力学直径之间的关系。对于这类在开放式环境中产生的粉尘，如内燃机排出的油烟和其它特殊灰尘，需要进行实验来考查粒子的捕获率（参见图3.39和图3.40）。看起来这种粉尘的沉积因子、沉积速度与粒子结构（这种粒子呈现分形特征）之间的关系可能与整个结团的分形结构有关。在Laurentian大学，我们正在建立结团的分形结构模型，并正在研究结团在粘性流体中的行为。我们希望能把结团结构的分维数与结团在粘性流体中的物理行为联系起来[49]。

当一个分形结团的粉尘沉积在肺表面时，该粉尘对肺潜在的伤害也许会和它的分形结构有关。在下面的几节中，我们将阐明分形理论在描述特殊粉尘伤害中的潜在价值。我们将发现，某些情况下，分形结构的粉尘会比简单粉尘增大吸入伤害；而在另外一些情

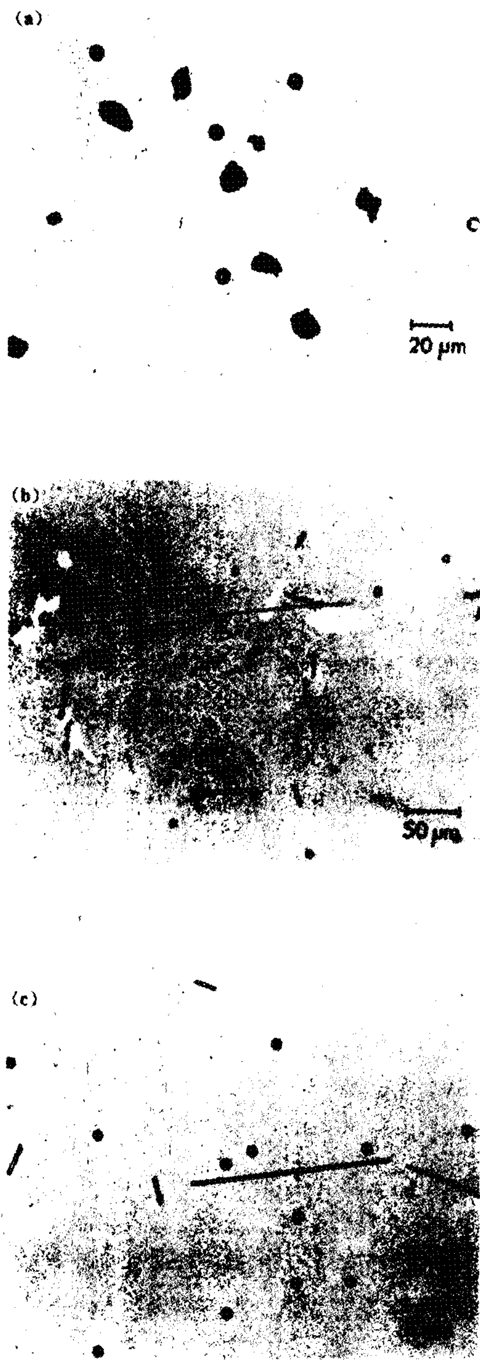


图 3.33　虫胶球体的物理直径与它的空气动力学直径相同，因而可用来直接显示分级后粉尘的空气动力学直径[54]。(a) 具有相同空气动力学直径的煤尘粒子；(b) 具有相同空气动力学直径的长石棉纤维；(c) 具有相同空气动力学直径的玻璃纤维。在上述全部粉尘粒子中，球形粒子为虫胶球体微粒

况下，与化学成份相似而物理结构不同的粉尘相比，分形粉尘可能对肺穿孔及某种特殊物质有较小的伤害作用。

3.7.2　硅石雾是否会引起吸入损害

也许最常见的由硅石粉末引起的工业疾病就是矽肺病了。在职业卫生学发展的早期，许多工人变成了化学家，他们把注意力集中在吸入粉尘的化学组成上，试图确定肺

病早期患者肺内粉尘与肺组织的化学反应。不巧的是，在大多数情况下，吸入粉尘引起的损伤都是由于化合物的物理状态。至于硅石雾，可以肯定的是其物理状态和颗粒尺寸才是导致肺部疾病的起因。我们知道，大多数海滩都是由硅石组成的，但没有一个人因为在海滩上游玩而患上矽肺病的。

如果详细研究一下产业工人患矽肺病的规律，就会发现这种病全是由下述三种工业粉尘引起的，一种是新碎裂的晶体石英粉尘，另两种是二氧化硅晶体粉尘。虽然其它形式的硅石粉尘也符合吸入粉尘的定义，单却不会导致任何损害。1984 年我们在 Laurentian 大学进行了一项由加拿大政府资助的科研项目，题目叫“科学与社会热线”。这个项目旨在为人们提供一种机会，使他们能给大学打电话询问他们日常生活中感兴趣的或困扰他们的科学问题。我们在这期间接到的一个问题是，当人们向咖啡杯中倒入咖啡粉、冰淇淋粉或糖粉时，产生的吸入粉尘能否引起矽肺病。咨询者已经注意到了这些产品的成份标签上常常提到粉末中最多含有 1%的二氧化硅；更重要的是，咨询者已经注意到了当从饮料的包装中倒出饮料时，会有一些烟雾状的粉末进入空气中，而人在闻到它的芳香时就已吸入了这些粉尘。我可以肯定地告诉这位咨询者，在这种情况下，不会有染上矽肺病的危险，因为这种粉末是一种非结晶型硅，这类硅粉已示于图 3.30 中。

硅石雾经常被加入食品和药品中以改善流动性。这种具有很大表面积的粉末有助于排出产品包装时可能存在的潮气，而且能防止产品在存储和运输时因受压而结块。这种硅粉之所以能防止食品受压结块是因为它掺入食品中以后，增加了食品粉粒之间的摩擦力。这类硅粉在食品工业和药品工业中叫做流动剂。由于构成硅粉结团的微粒在火焰中从热区移动到冷区时以极快的速度形成，因此单个球粒呈非晶态结构。它们经骤冷而固结成象窗户上的普通玻璃那样的物质。这种结构称为非晶态结构（amorphous structure）。希腊神话中，Morpheus 是梦神的名字，他在人们的梦中制造出千奇百怪的形状。在化学发展史的早期，从 Morpheus 一词（药品吗啡（morphine）亦由此得名，人服用吗啡后产生幻觉）引伸出表示形态科学的词——形态学（Morphology）。而“非晶态的”（Amorphous）在希腊语中的意思是无形状的。当分子处于非晶态时，分子内部的结合力不如晶态时强，因此破坏这种结构只需要较少的能量，这意味着非晶态物质比晶态物质更易于溶解。因此，人体很可能具有溶解作为食品流动剂的非晶硅的功能。而且人体可能更容易分解这种高表面积的松散结团。在北美州，政府法律允许食品和药品中含有不超过 1%重量比的硅石雾[55]。

3.7.3 核反应堆系统的粉尘

图 3.34 所示的是两种不同的二氧化铀粉末。其中照片（a）是由 Kotrappa 拍摄的。他把厂家提供的二氧化铀粉末经两次高速研磨处理，然后进行干燥，再经一种叫作 Wright 的粉尘给料器分散到测试室中。他用这样一种仪器对粉尘进行取样，这种仪器中有一个金属条，空气动力学直径相同的粒子会沉积在金属条上的相同位置[56]。

图 3.34（a）中的粉尘粒子具有 0.5μm 的相同空气动力学直径。对于高密度的二氧化铀粒子，从图 3.34（a）的标尺可以看出这种结实粒子的空气动力学直径比它的物理直径要大得多。从图中还可以看出，有几个粒子看起来刚刚形成，有点象图 3.28（b）中二氧化钍粉末，但只是由于磨机的磨损使本来蓬松的粒子变成了结实的碎渣。因此尽管图

3.34（a）中的二氧化铀粒子也表现出一点残留的分形结构，但它的分维数与图 3.28（b）中的二氧化钍粒子的分维数相差甚远。应该注意到图 3.28（b）中的所有粒子都具有 1.03μm 的同样空气动力学直径。对于图 3.28（b）中的链状结构来说，链状聚集物的宽度大约等于密实颗粒的轮廓直径，这一点与 Timbrell 的发现很相似[54]（Timbrell 发现，那些纤维状粒子的直径近似地等于具有相同空气动力学直径的密实微粒的直径）。然而需要注意的是，对那些明显具有分形结构的粒子来说，它们的物理尺寸远远大于与它们具有相同空气动力学直径的密实粒子的直径。当我们要确定二氧化铀粉尘被人体吸入而沉积在肺内所造成的危害时，这一点非常重要。在同样的空气动力学直径下，具有分形结构的二氧化铀粒子比密实的二氧化铀粒子对人体的危害要大得多。因此，对于具有分形结构的粉尘，如果只知到某给定空气动力学直径的微粒的吸入数量，还不能估计出吸入的放射性物质的实际剂量。

公众所关心的核反应堆对人类健康的潜在危害之一，是失效的核反应堆（包括烧毁的核反应堆）可能向周围扩散放射性粉尘。在一起核反应堆烧毁的假设性事故中，核反应堆冷却系统以某种方式失效而引起反应堆中心部件的烧毁，伴之而来的可能是金属烧毁所产生的有毒粉尘。Zeller 曾研究过由燃烧的核反应堆燃料棒产生的烟雾类型。图 3.34（b）所示的微粒就是 Zeller 博士在研究二氧化铀烟雾的蒸发和凝聚时得到的，这种二氧化铀烟雾来自于在电弧中燃烧的二氧化铀颗粒[57]。

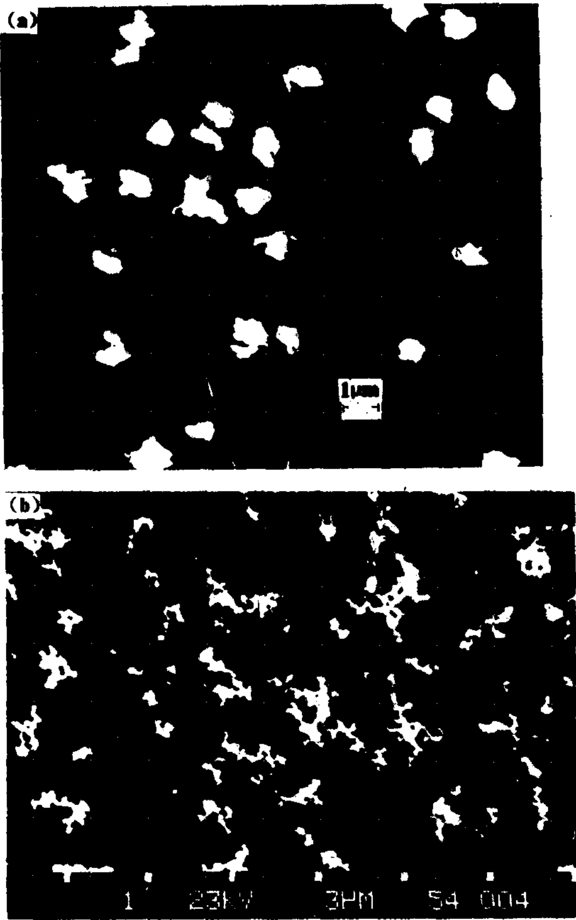


图 3.34　两种不同的二氧化铀粉尘。(a) Kotrappa 描述的经磨损后的二氧化铀粉末[56]；(b) Zeller 研究过的熔化的烟尘[57]

这种烟雾粒子的分形结构是显而易见的。它与图 3.30 (b) 所示的硅石雾粒子惊人地相似。从图 3.34 中可以看出，任何有关吸入粉尘对人体危害的定量研究，以及核反应堆放出的雾状粒子分散的空气动力学研究，都离不开对烟尘分形特征的考察。

3.7.4 熔融雾粒和焊接烟尘

当电路中负载超过安全额时，连接在电路中的保险丝就会熔断而切断电源。此时站在熔化的保险丝附近的人就会闻到从导线上传来的一股腐蚀性的烟味。Zeller 曾研究过这种由导线突然熔断而产生的微粒。图 3.35 所示是一些由铂导线升华时所逸散的二氧化铂烟雾，这些粉尘具有明显的分形结构。

也许任何金属在用炽热的火焰切割或焊接时都会产生具有分形结构的烟粒，图 3.36 中的粒子就是在焊接时收集到的[60]。在这些焊尘中大概有两种或三种类型的雾状粒子。或许要更好地弄清焊尘对人体的损害，也必须把握焊尘本身的分形特征。

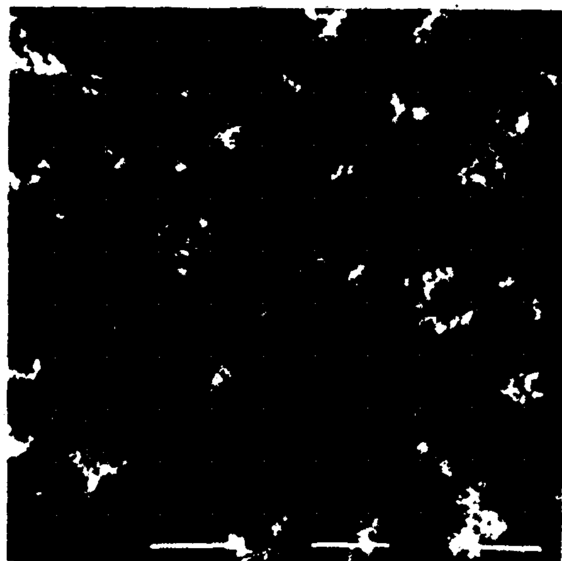


图 3.35 熔断的金属导线（保险丝）及其碎屑显示出如二氧化铂烟状聚集物那样的分形特征（放大倍数为 40 000）[57]

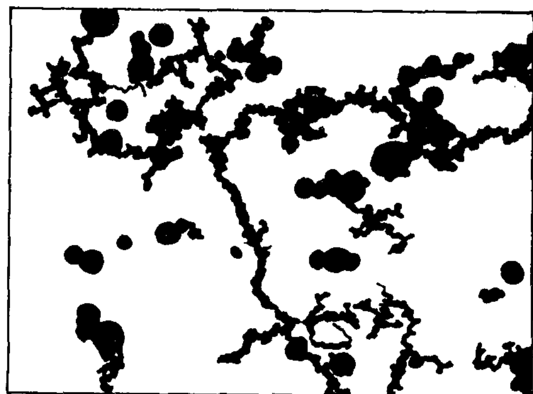


图 3.36 焊尘。焊接时汽化的金属经淬火形成具体结构的烟状物。电焊产生的金属尘也具有分形结构，这些电子显微境照片是由 Stern 拍摄的[60]

吸入焊尘的焊工患的一种病叫“焊热病”(Welders fever)，它可能是由能迅速溶入体液的那种高表面积、松散结构的非晶态金属氧化物粉尘所致。人体对这种溶入体内的粉尘的抵制可能导致了这种热病（一种焊接工人患的病）的发生。玻璃染色过程所产生

的蒸汽会凝结出可吸入的金属烟尘，这些烟尘也会给工人的健康带来问题。

3.7.5 爆炸粉尘的特性

由于地下采矿过程中形成的粉尘有一部分是爆炸产生的，因此爆炸粉尘的类型引起了人们的很大兴趣。军事部门必须尽最大努力保护在硝烟中穿行的士兵不受烟雾伤害。军事专家也要研究在野外可能遇到的烟尘，以保护发动机免受机动车辆运动所搅起的灰尘及炸弹爆炸产生的烟尘的潜在损害。

图 3.37 所示是炸药爆炸产生的一些粉尘[58]。可以看出在这些粉尘中有两种类型的分形结构。第一种具有明显的由物体碎裂产生的曲折结构；第二种看来是由原始碎片碰撞而形成的结团。显然，要弄清这种粉尘的动力学特性以及它带来的潜在危害，需要先确定单个粒子的分形结构。

卡车驶过开阔地（而不是铺设的路面）时所产生的灰尘，对我们来说是一个熟悉的景象，这一景象在坦克驶过沙漠或重型拖拉机驶过干燥的田野时也可见到。直升飞机安全飞行的问题之一就是防护起落时螺旋浆激起的灰尘对发动机的危害。显然，在任何给定条件下所产生的灰尘的类别，取决于机动车驶过的路面上的微粒。图 3.38 所示的灰尘是重型卡车驶过新墨西哥州未经铺设的路面时而扬起的，它具有明显的分形结构[58]。

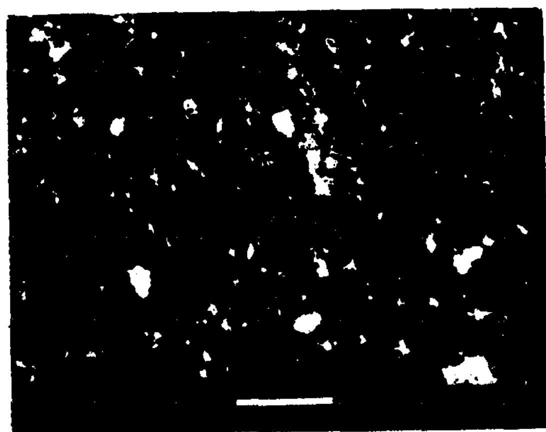


图 3.37 爆炸产生的 Pinnick 烟尘。军车在爆炸产生的烟雾中穿行时这些灰尘可能被吸入坦克的发动机而引起灾难性后果。在矿山爆破矿体时也认为会产生这样的烟雾。这些由爆炸产生的烟尘的扫描电镜照片表明烟尘具有分形结构

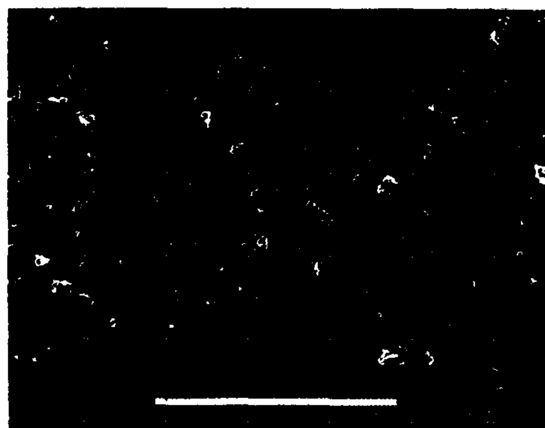


图 3.38 新墨西哥州未铺设的路面灰尘显示出分形结构

对那些必须在布满尘土的野外开行的机动车或飞机来说，其引擎吸入的空气在进入

燃烧室之前，必须排除掉其中具有潜在危害的尘粒。在设计有效的过滤器和（或）旋风除尘器时，必须考虑到野外条件下灰尘的分形结构[59]。

3.7.6 内燃机排出的油烟和灰烬

近年来，在人们日益关心内燃机排出的烟雾对身体的危害问题[60]。公众普遍认为柴油的不完全燃烧产生了许多致癌物质，但并未得到同样重视的是，当这些致癌物吸附在内燃机排出的烟雾粒子上，再随烟尘吸入体内并尘积在肺部时，这种化学物质的潜在危害便增加了。图 3.39 所示是自由燃烧的柴油所产生的油烟在高倍扫描电子显微镜下的照片。可以清楚地看到，油烟以基本与图 3.30 中硅石雾相同的方式形成。未燃尽的碳离开火焰的最热部位后沉积形成球体（有报道说一些球是空心的）[61]，这些球然后结团形成油烟微粒。油烟微粒的这种生成方式明显地导致如图 3.39 所示的分形结构。

不同的燃烧条件可以改变结团的结构，使它或是呈链状或是呈葡萄串状，但基本结构仍保留分形特征，只是分维数的大小和结团的形状改变了。内燃机油烟高度松散的分形结构，意味着它有较大的表面积去吸附化致癌物质。因此，如果不知道结团的物理尺寸和分维数，而只简单地知道它的空气动力学直径的话，就无法推测结团表面化学物质的吸附数量。解决有关人体肺部内燃机油烟的动力学问题也需要有关分形结构结团的动力学知识。

1981 年我首次提出内燃机排出油烟的结构可以用分维数来描述，图 3.40 所示就是内燃机油烟的 Richardson 曲线。Kittelson 最初对实际油烟进行了描述，而分维数的测量结果则是由 1981 年出版的一篇评论文章提供的。图 3.40（b）所示是由 Kittelson 拍摄的另两种内燃机油烟的结团照片。这幅照片的有趣之处在于由蒸汽遮挡法产生的结团斑影被刻划得非常清楚。也许把斑影的分形结构和结团的分形结构作一下比较可给出结团的三维结构信息（内燃机排出油烟所示出的分形结构的潜在重要性将在第 5 章讨论）。

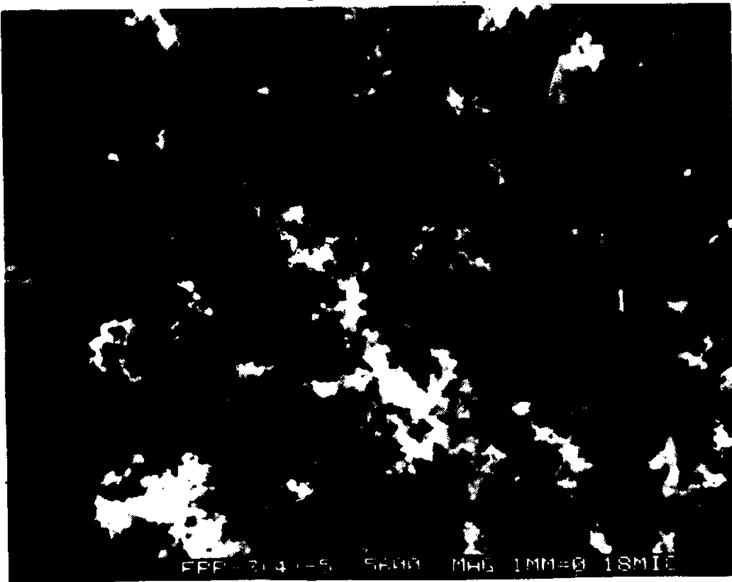


图 3.39 自由燃烧的柴油产生具有分形结构的灰烬[58]

与内燃机废气问题紧密相关的另一种危害性吸入粉尘来自汽车废气中的微粒，特别是加铅汽油燃烧的废气更为有害。废气中的铅粒子很容易通过呼吸道进入人体。最近的

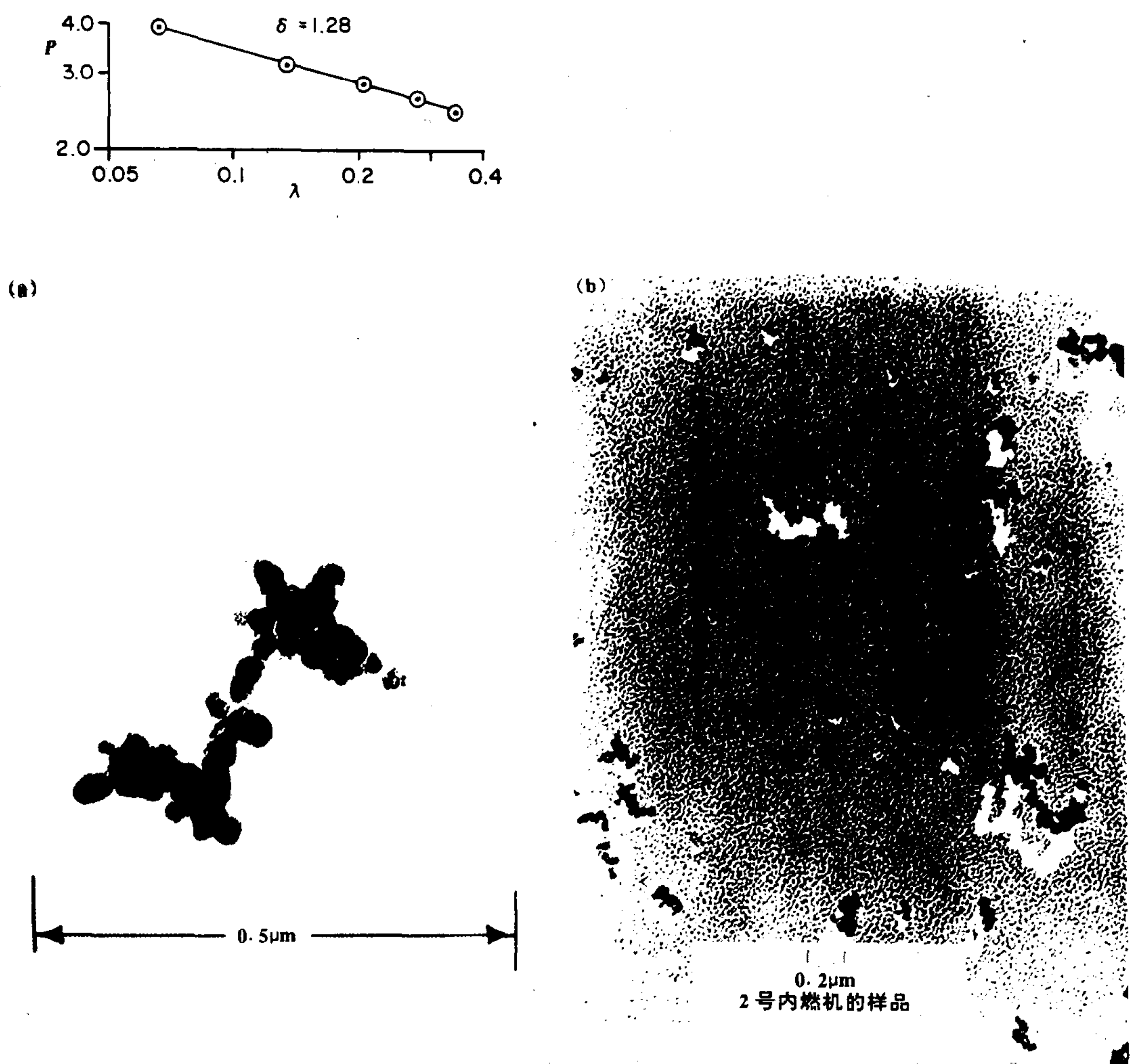


图 3.40 内燃机排出的某些油烟微粒表现出分形结构。(a) 由 Kittelson 拍摄的链状烟尘粒子的 Richardson 曲线[62,63]；(b) 由 Kittelson 拍摄的内燃机排出油烟的扫描电镜阴影照片[63]

研究表明，如果您的家离高速公路干线很近，那么室内的灰尘中就会有很多来自汽车废气中的铅尘——一种潜在的危害！

图 3.41 所示的是收集到的含有铅化合物的汽车废气微粒。原始照片中可以清楚地看到构成油烟结团的球形微粒。这幅放大 30 万倍的废气照片是由纽约大学的程博士拍摄的[64]。

当我们为军事上的安全而制造烟雾屏障时，由油料燃烧产生的烟雾粒子的松散结构则显示出其优越性。烟的结构越松散，也就是烟雾微粒的分维数越高，烟雾的不透光性越好，烟雾保持得也越持久，这是因为密实的结团比松散的结团会更快地下沉。因此从军事的角度来看，烟幕应由在燃烧过程中产生的具有最大分维数的粒子组成。

能显示最大分形结构的粒子优越性的另一个技术领域是白灰的制备。微粒的结构越松散，粉末的分散能力越强。因此，对于给定尺寸的白灰粒子，分维数越大，洁白度越

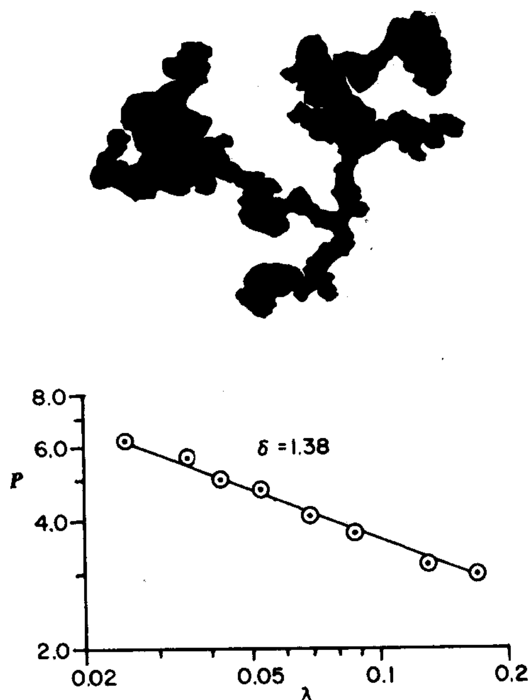


图 3.41 Leblanc 对汽车废气中含铅粒子分形结构的分析[31]。

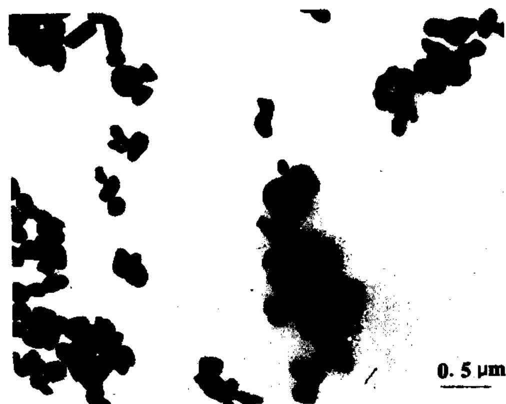


图 3.42 由燃烧工艺制得的发光涂料，如用于厕所和房间装饰的白色二氧化钛涂料。这种涂料显示出分形结构[65]

高。这样，我们对一些最好的涂料（如二氧化钛）是经过燃烧工艺制得的就不足为奇了。新制得的二氧化钛的分形结构如图 3.42 所示。热处理改变了结团中单个粒子的尺寸，也改变了结团的分维数。涂料工业已把注意力集中到靠减小颜料粒子的尺寸来增大颜料的不透光性，也许他们需要把更多的注意力放在改善生产工艺以优化产品的分形结构上。

有关具有分形结构的颜料光散射特性的理论研究是十分复杂的，因此，看起来要弄清颜料粒子分维数和光散射特性之间的关系，首先应在实验中研究由不同方法制得的具有不同分维数的颜料颗粒的光学性质。

3.7.7 飞尘的分形实例

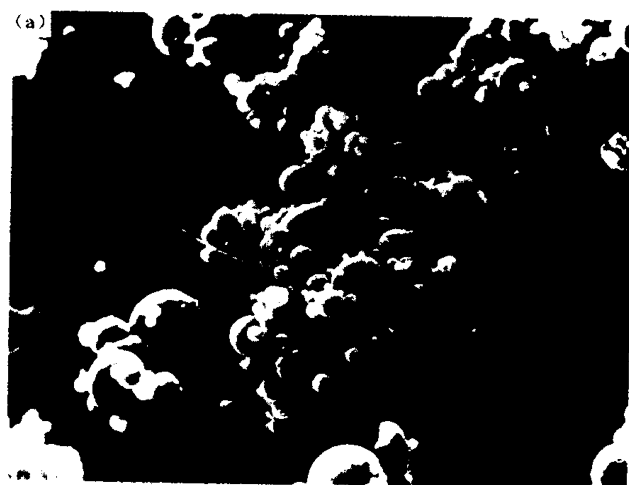
当用煤燃烧发电时，一些存在于原始煤块中的灰分变成很细的粒子逸出火电站的烟囱，这种很细的粒子叫粉煤灰（flyash）。粉煤灰的结构随发电站的不同而不同，它依赖于燃烧温度、煤的种类以及煤进入燃烧室前的处理方式。如果燃烧过程不充分，飞出烟囱的烟尘仍含有未燃尽的燃料。原煤中的一些杂质实际上是远古时埋在地下现已变成煤

的腐烂有机物中混入的砂石碎片熔化后形成细小的玻璃球。

由于玻璃球形成结团，许多粉煤灰粒子具有分形结构。任何特定粉煤灰的用途及（或）对人体的危害都与它的分形结构有关。

粉煤灰的静电学特性决定了静电除尘器的捕获效率（静电除尘器的基本概念在第4章讨论），而煤灰的分形结构与它的静电学特性又有确定的关系。关于粉煤灰分形结构的研究对进一步弄清静电除尘器的功能有重要作用。此外，正如在第4章较长篇幅的讨论中将要看到的那样，在燃烧过程中形成的结团的分形结构可能为研究结团的形成力提供重要的信息。

不同领域的研究人员发表了具有明显分形结构的不同的粉煤灰照片。图3.43(a)所示是Cabrera和Hopkins曾研究过的粉煤灰中由玻璃球粒子组成的分形结构结团[66]。图3.43(b)则是由Fisher等拍下的非常奇妙的粉煤灰粒子照片[67]。从图中可以看出粉煤灰中的很多球是空心的，而且这些空心球内又由一些空心球所填充，如此重复以至无穷。Mandelbrot增评论这种在3维空间内具有近似理论分形特征的特殊微粒。这种粉煤灰曾被赋予一个特殊的名字"多球体"（plethosphere），图3.43（b）所示的是其中的一个例子。"多球体"这个名字来自希腊语中意为"充满"的一个词，这表明，这种多球体内充



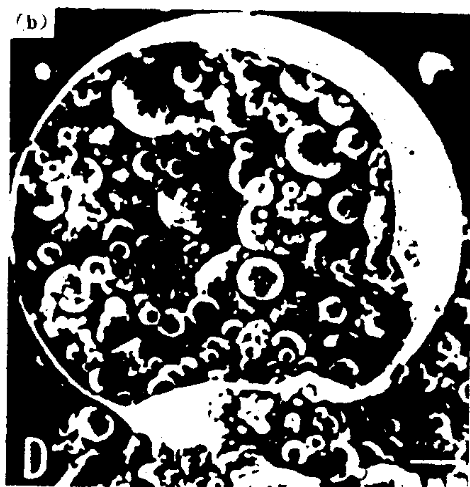


图3.43 一些粉煤灰粒子表现出分形结构。(a)由发电站传统的燃煤炉中出来的粉煤灰，是由烟尘玻璃状球体组成的结团[66]；(b) Fisher等证明一些粉煤灰粒子是中空的球，球中充填着较小的空心球，后者又包含着更小的球，如此递推下去。其最小的一级球在理论上具有无限小的表面积，这样的球形粒子叫做多球体[67]

满了球，大球套中球，中球套小球，如此反复以至无穷[67,69]。

显然，预测图 3.43 所示的不同粒子在肺内的动力学行为是一个困难的问题。估算粉煤灰结构的分维数对了解其物理特性有明显的帮助。

人们已对现有的燃油电站的燃料系统做了很多实验，以期使用煤粉。在某一燃料系统中，粉碎的煤粉与油混合形成油浆喷入油料燃烧室。在制备煤粉时，煤中的许多杂质（在未经处理的煤燃烧时，这些杂质会污染空气）在与油混合前必须除掉。经净化、粉化的煤比现在电站使用的煤尺寸要小。只要在燃烧室的供料喷嘴上做相应的较小的修改，这种含煤的油浆就可以在现有的燃油电站中使用。这样产生的粉煤灰则与在传统的燃煤电站中产生的粉煤灰不同。图 3.44 所示的是由 Kirchner 等拍摄的从含煤油浆的燃烧室里收集到的粉煤灰照片[69,70]，它具有明显的分形结构，从标尺上还可以看出它属于危害性可吸入粉尘的尺寸范围。

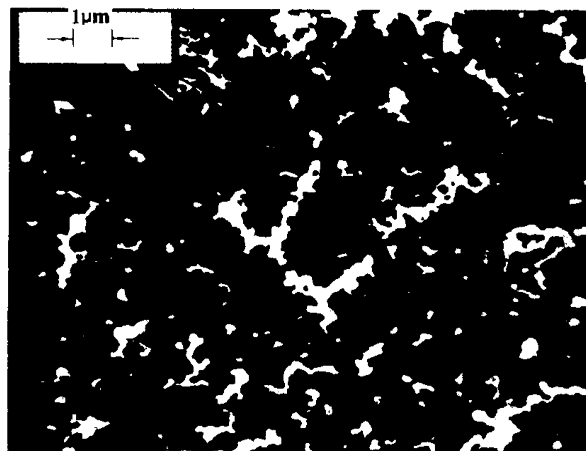


图 3.44　煤油浆体燃烧产生的粉煤灰显示出分形结构。该照片由 Kirchner 等拍摄[70]

沸腾床燃烧（Fluidized bed combustion）是一种燃烧煤粉的新技术。在这种燃烧系统中，要烧的煤粉被加到一个砂床或其它粉体的床层上，这床层在上升气流的鼓动下有如流体（气流经燃烧室底部一个多孔的金属盘上升）。图 3.45 所示即是一个沸腾床燃烧系统。砂子先用丙烷燃烧器进行预热，以便使燃料粉末加入床层时，热砂子立即使煤起火燃烧，而砂床的不停运动则可保证煤的燃烧速度。热交换管直接放入床层中，由煤燃烧产生的热使管中的水变成蒸汽。由于这种砂层燃烧系统的热交换比传统的燃烧系统要高，因此这中燃烧系统可以在煤中灰分的熔化温度以下运行。

此外，如果沸腾床层中加入一些石灰石粉末，它可以直接和煤中的硫反应生成硫酸盐，这些硫酸盐可以从床层中分离出来，用做化学肥料。这样不但不存在硫化物对空气的污染问题，还在燃烧过程中获得了副产品。然而，由于沸腾床燃烧系统的燃烧温度被控制在灰分的熔点以下，因此科学家们还不完全确信煤燃烧放出的所有潜在的有害化合物都已被炉堂中的高热所破坏，而且这样的粉煤灰与燃烧时熔化灰分所形成的粉煤灰具有不同的结构。程博士等曾对沸腾床燃烧系统中煤粉燃烧所产生的粉煤灰作过研究[71]。他们提供的粉煤灰照片如图 3.45（b）所示。可以看出这种粉煤灰的结构不同于高于灰分熔点条件下燃烧所产生的粉煤灰结构，但仍显示出分形特征。来自不同燃烧系统的粉煤灰在分形特征上的差别可以定量地反映出这些粉煤灰结构上的差别。

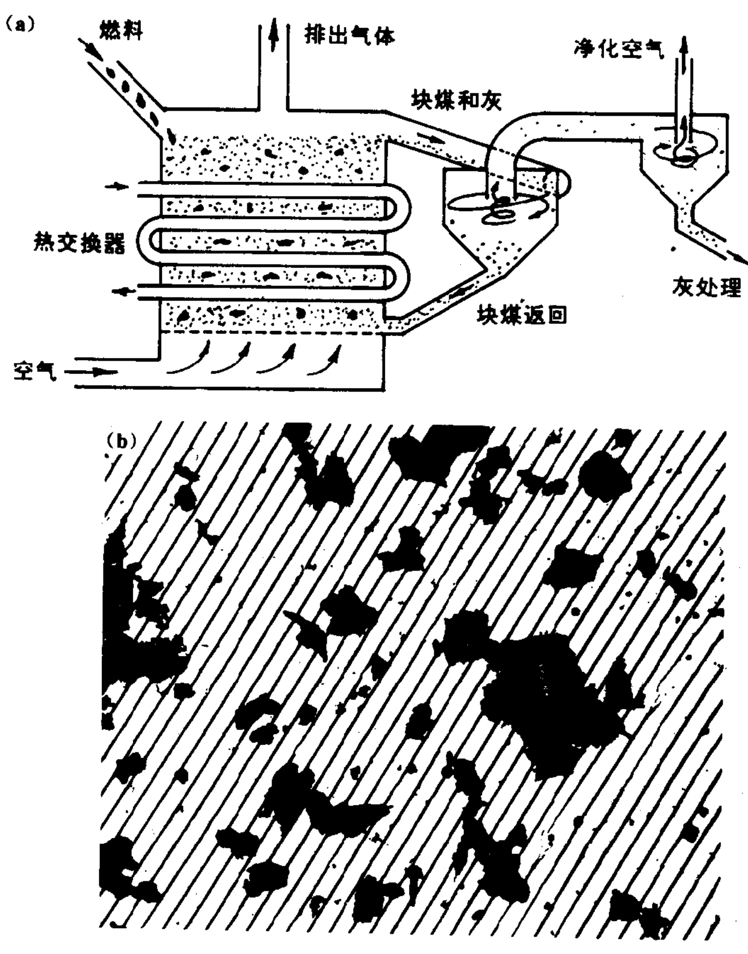


图 3.45 煤粉的沸腾床燃烧产生与传统高温燃烧时不同的粉煤灰。(a) 煤灰的沸腾床燃烧系统的基本组成；(b) 沸腾床燃烧的煤粉产生的粉煤灰

3.8 聚合物微粒和橡胶屑

图 3.46 所示是一个聚氯乙烯（PVC）粉粒的轮廓，该粒子由氯乙烯聚合而得。从图可见在 Richardson 曲线所示的尺寸范围内，这种粒子有明显的分形特征。PVC 粉末由大

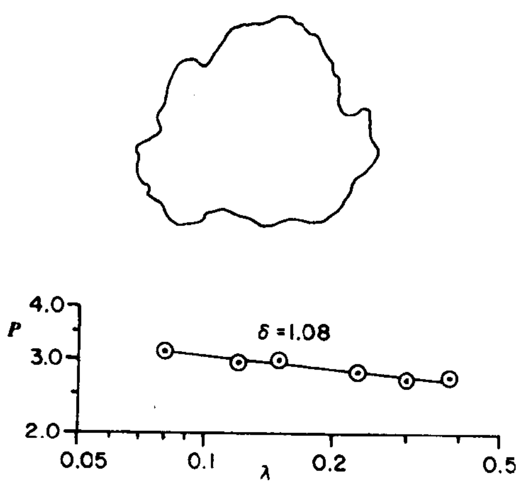


图 3.46 由聚合工艺产生的一些 PVC 粉末具有分形结构

规模生产制得，聚合工艺的变化可能会反映到 PVC 粒子结团的分形结构的变化上。

图 3.47 则是某橡胶屑的轮廓，该橡胶屑是由为促进橡胶重复利用而设计的某一工艺的产品。它的分维数可以用于描述橡胶干粉的流动性。它也与压缩橡胶粉时需要的压缩应力有一定的关系。



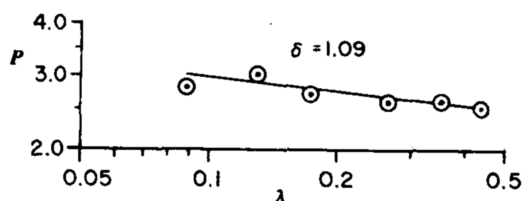


图 3.47　一种可循环利用的橡皮屑可用分维数来描述[21,72]。P 为测得的周长，λ 为步长；P 和 λ 按最大 Feret 直径标准化；$\delta=1.09$ 是测得的分维数

3.9　微粒的类似物

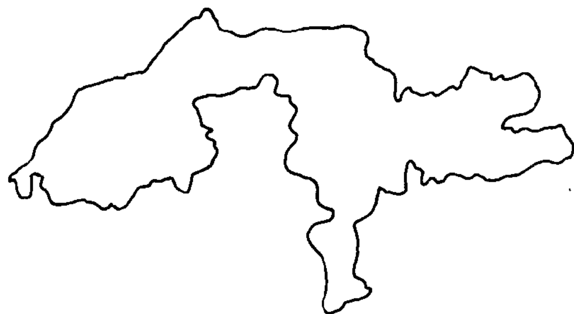
从本节的题目，读者可以看出我观察物体轮廓时的内心倾向，那就是，即使观察的对象不是微粒，我的第一个反应还是觉得它是一个微粒。此外，取这个题目意在预示一下，我们将如何把现已得到的有关粒子轮廓的经验应用到其它科学领域。第三，这个题目也给我们一个借口，使我们有理由先悄悄地窥视一下我们在今后的分形漫步中即将涉足的应用科学的不同领域。

我们经已经讨论过一个这样的事实：岛屿的轮廓看起来象一个粒子。当地面从地图上或飞机上看一个湖泊时，它也有粒子的形状。Laurentian 大学座落在 Ramsey 湖边，图 3.48 所示是由 Richardson 曲线得到的 Ramsey 湖轮廓的分形结构。可以看出在 Richardson 曲线的尺度范围内曲折湖岸的分维数是 1.12，该分维数也许与围绕湖泊的岩石的形成方式和使湖岸变得曲折的侵蚀力有关。在第 10.4 节中我们将考查一簇湖泊、云彩、群岛及其它分形几何图案的分维数。

当分形在科学界崭露头角时，我的一些研究生命科学的同事们得知我们物理系可以测量分维数，于是他们也开始讨论和测量生命科学中分维数的可能性来。例如，影响草食动物健康的问题之一是动物牙齿的损坏，牙齿的分维数随着牙齿被草腐蚀而降低，牙齿腐蚀的原因是草中有一种微小的硅晶体，这就是所谓的植物岩（phytoliths），其字面上的意思是植物石块。有关牙齿磨损和食物中植物岩成份之间关系的研究本是一个很好的课题，但这些同事由于其它工作的压力，未能将实验工作进行下去（参见第 10.4 节有关新旧山脉分维数的讨论）另外的一些同事考虑到通过测量树叶轮廓的分维数以确定生长条件对树叶轮廓的影响，同时也想通过研究受损伤树叶被扭曲的轮廓以定量反映树叶受

损的程度。为考察用分维数描述树叶结构、受伤以及未受伤的可能性，这些同事对橡树和枫树叶进行了实验研究。

用构造步长法对两片枫叶的分形结构进行了研究，该实验的数据示于图 3.49。可以看出，大致说来，两片叶子在研究的尺度范围内都呈现出分形结构。在图 3.50 中，采用同样方法考察了一株橡树上的两片叶片。结果再次表明，从可操作的角度来看，把树叶描述成具有分形结构是可能的。图 3.51 则是另一种橡树上的叶子和实测数据，可以又一次看出分维数的确可用来描述树叶的结构。目前人们正在实验中探讨用分维数来测量由生物或化学原因引起的树叶的异常状态的可能性。



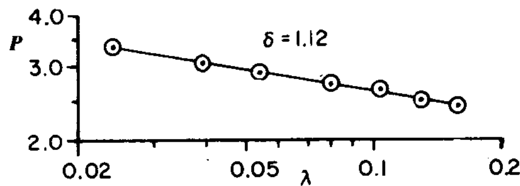
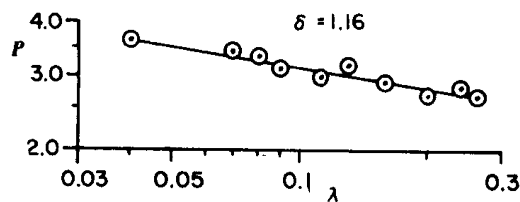
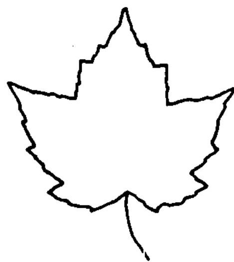


图 3.48　湖泊轮廓显示分形结构，图中是加拿大 Sudbury 城 Laurentian 大学附近的 Ramsey 湖轮廓线。P 这测得的周长，λ 这步长；P 和 λ 按最大 Feret 直径标准化；δ 是湖岸线的分形维数。在图中的分辨率下 δ=1.12





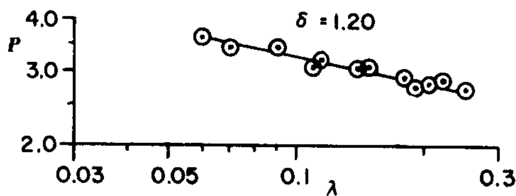




图 3.49　从实用的角度来看，枫叶的结构在较大的检测尺度范围内可用分维数来描述

当时为 Bausch and Lomb 公司分析仪器部的副总裁的 A. E. Martens 博士首先认识到在自动图象分析仪上用分形几何描述不规则形状物体的重要性。我在 1977 年末遇到

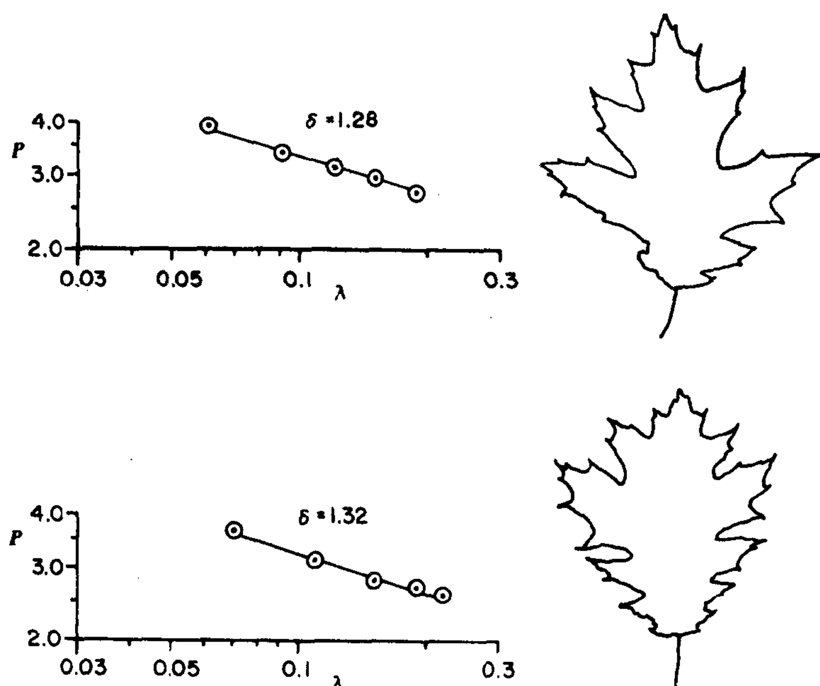


图 3.50 同一颗树上的两片橡树叶具有大致相同的分形结构

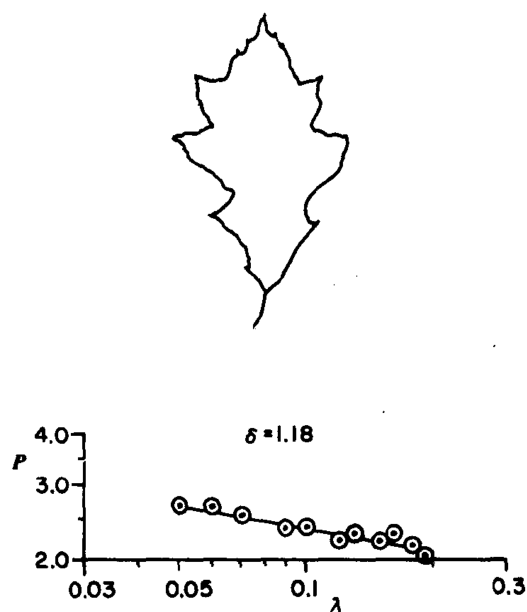
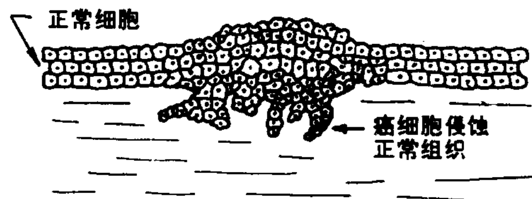


图 3.51 与图 3.50 中的橡树叶属于不同种类的橡树叶显示出不同的分形结构

Martens 博士，他当时曾指出分维数将有助于表征人体或其它组织中癌症细胞的生长结构[73]。

我并没有听说过任何旨在表征癌细胞的实验，但分形方法在描述这种细胞的生长方面表现出的潜力从图 3.52 中可以清楚地看到。癌症（cancer）一词来自拉丁语一种蟹的古称，癌细胞生长的触毛真有点象蟹爪一样伸入人体组织中。图 3.52 摘自一本描述癌细胞从细胞表面开始扩散到进入普通组织内部整个过程的教科书。图中癌细胞的分维数是 1.50。在显微镜下定量估算治疗过程中癌细胞分维数的变化看起来是一个诱人的研究领

域。



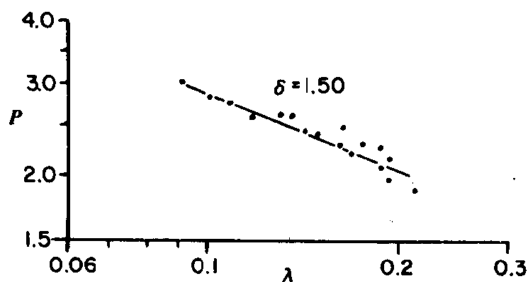
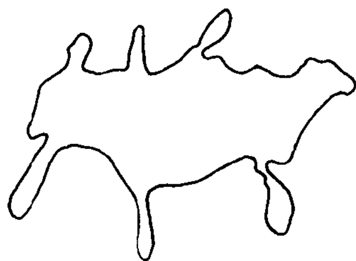


图 3.52　用分维数表征癌细胞的生长

图 3.53 所示是 Purkinje 脑细胞的外缘轮廓。在 Llinas 提供的该细胞的原图中，曾画出叶片型隆起处的神经突触[74]。尽管这种细胞不具有理想的分形结构，但从实用的角度来看，图 3.53 中的 Richardson 曲线明显地表明这种细胞可以用分形来描述，至少在所考察的尺度范围内可以这样作。最后附带指出，分维数应用到生物系统中的先驱是 Rigant 和他的合作者[75-79]。



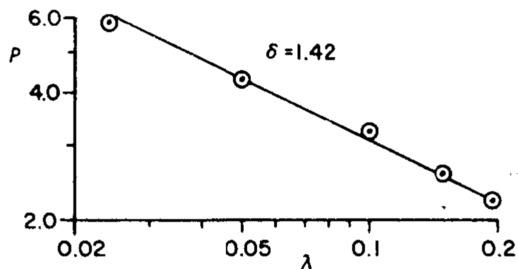


图 3.53　尽管某些生物细胞没有理想的分形结构，但从实用的角度来看，它们轮廓的曲折程度仍可用分维数来描述。在按最大 Feret 直径标准化后的 0.20 到 0.02 分辨率范围内，Purkinje 氏细胞的外缘的分维数是 1.42。P 为测得的周长，λ 为构造步长法的步长；P 和 λ 已按最大 Feret 直径标准化

Batty 博士是座落在威尔士卡迪夫的威尔士大学科学技术研究所的城市规划专业教授，他在一篇关于分形几何的有趣文章中指出，地图上的城市边缘看起来像分形体[80]。他用于说明这一事实的轮廓线很像本章前边所讨论的那些海绵铁粒子中的任何一个。Batty 博士指出分形几何有希望在城市或更大区域的形态学研究中找到很多应用。图 3.54（见

书前彩图 1）是 Batty 博士讨论预测城市发展模型的等级结构时所用的城市轮廓图。Batty 教授指出，图 3.54 所示的计算机模拟出的城市与卫星拍摄的英国伦敦的照片并非出入很大。

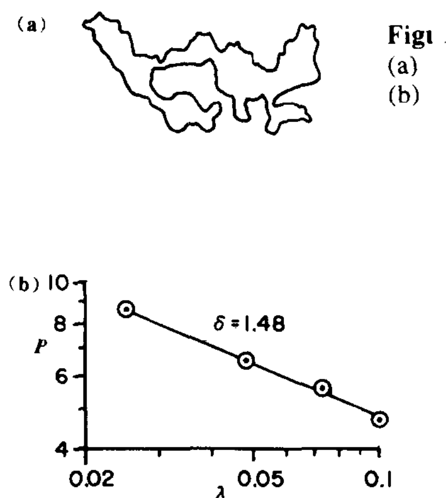


图 3.55　孔洞也经常显示出分形结构。(a) 在陨石上发现的某一孔洞轮廓；(b) 陨石孔洞的 Richardson 曲线

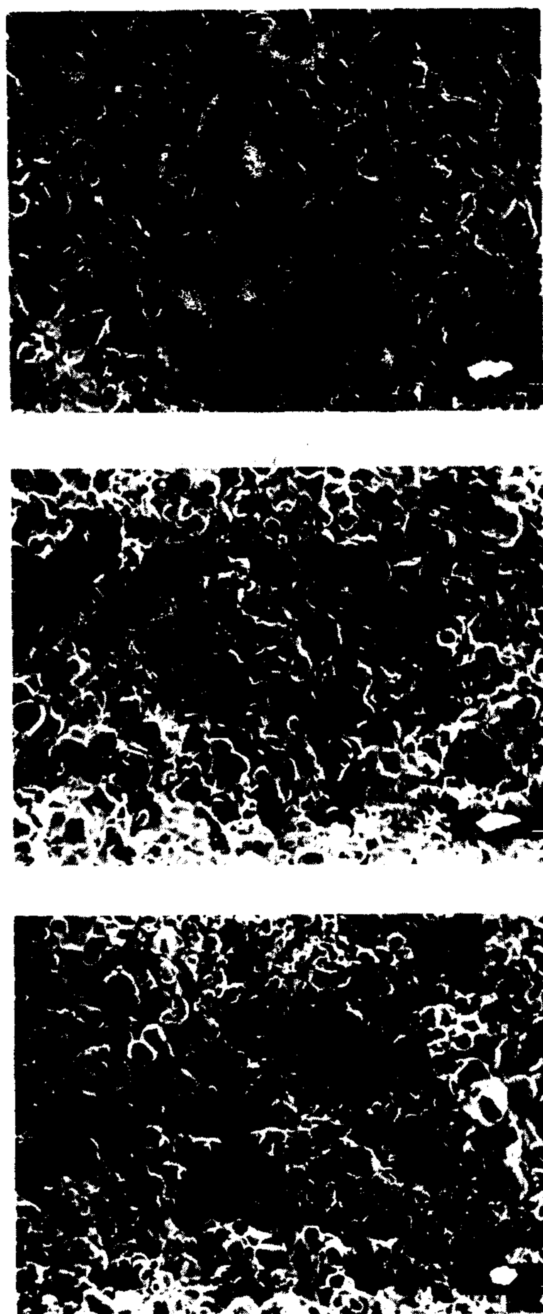


图 3.56　烧结金属坯块表面孔洞的分形结构可用来研究金属粒子群的烧结行为[82]

图 3.55(a)所示的轮廓可能是太阳系中最早的分形了[81]【注：在 Mandelbrot 那本书（见本书第 1 章参考文献〔18〕）的第 2 版中，作者出示了一张有关上帝把分形设计到太阳系中的有趣的图片 C1】。正如从图 3.55 (b) 中可看到的，在陨石上发现的孔洞轮廓的分维数在检测范围内是 1.48，也许这一孔洞的分维数与形成这颗陨石的动力学过程有关。

如果读者认为有关陨石孔洞的发现并不使他激动，那么像图 3.1 所示的那些用金属粉末制成的粉末冶金坯块上的孔洞却是冶金学家的兴趣之源。图 3.56 中的一些孔洞是在烧结处理过程中从粉末冶金坯块上发现的。孔洞的分维数有助于估算粉末冶金坯块的残存空隙。有关孔洞的研究将帮助人们找到预测烧结金属材料结构的方法。

据说如果一个人在原始森林中随意漫步，并且不能辨别方向，他可能会重新回到出

发点。我们正是这样的人，从图 3.1 中的粉末冶金微粒开始，现在又不经意地回到了起点。看起来，在我们继续进行下一章的漫步之前，该在这个出发点稍事休息一下了。下一章中，我们将科学地考察在 1 维或 3 维条件下漫步可能遇到的问题。我希望本章随意走过的这些曲曲弯弯的道路已使读者觉得分形还是有用的。当我们把我们的分形漫步延伸到多维空间时，我们将遇到其它一些有用的分形结构，同时结识一些奇妙的数学模型。

参考文献

[1] The profiles in Figure 3.1 are outlines of profiles originally reported by Balasubramanian and co-workers; see R.E. Balasubramanian, P.N. Singh and P. Ramakrishnan, "Effect of Some Particle Characteristics on the Bulk Properties of Powder," *Powder Metall. Int.*, 16, No. 2, (1984), 56-59.

[2] S.P. Mehrota, "Mathematical Modelling of Gas Atomization Process for Metal Powder Production," *Powder Metall. Int.* , 13 (1981) 80-84.

[3] H.C. Nuebing, "Production and Properties of Aluminum Powder for Powder Metallurgy," *Powder Metall. Int.*, 13 (1981) 74-78.

[4] B.H. Kaye, J.E. Leblanc and P. Abbot, "Fractal Description of the Structure of Fresh and Eroded Aluminum Shot Fineparticles," *Part. Charact.*, 2 (1985) 56-61.

[5] F.T. Fong, J.K. Beddow, and A.F. Vetter, "A Technique to Show Effects of a Chemical Reaction Upon Particle Morphology," in Proceedings of the Powder and Bulk Solids Conference, Rosemont, Illinois, 1978., published by the Cahners Exposition Group.

[6] J.K. Beddow and T.P. Meloy, "Advanced Particulate Morphology," CRC Press., Boca Raton, FL, 1980.

[7] M. Matsushista, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjo and Y. Sawada, "Fractal Structures of Zinc Metal Leaves Grown by Electro Deposition,"*Phys Rev. Lett.*, 53 (1984) 286-289.

[8] The theory of electric storage batteries (called accumulators in UK are discussed in many first-year level physics textbooks). The one that I found particularly useful is by C.G. Wilson "Electricity and Magnetism," English Universities Press, London., 1958,

[9] W. T. Elam, S. A. Wolf, J. Sprague, D. U. Gubser, D. Van Vechten, G. L. Barz, Jr., and P. Meakin, "Fractal Aggregates in Sputter Deposited Niobium Germanium Films," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 54 (1985) 701-703.

[10] D. A. Weitz and M. Oliveria, "Fractal Structures Formed by Kinetic Aggregation of Aqueous Gold Colloids," *Phys. Rev. Lett.*, 52 (1984) 1433-1436.

[11] The fractal agglomerate in Figure 3.10 described by Weitz and Oliveria is also to be found in a review article by T. C. Lubennsky and P.A. Pincus, "Super Polymers, Ultra Weak Solids and Aggregates," *Phys. Today*, October (1984) 44-50.

[12] D.M. Bigg and D.E. Stutz, "Mounded Composites as EMI Shields," *Ind. Res. Dev.*, July (1979) 103-105.

[13] K. Nangrani and S. Gerteisen, "Conductive Composites Blunt EMI Effects," *Res. Dev.*, July (1985) 60-63.

[14] M. Peleg and M.D. Normand, "Characterization of the Ruggedness of Instant Coffee Particle Shape by Natural Fractals," *J. Food Sci.*, 50, (1985) 829-831.

[15] M. Peleg and M.D. Normand, "Mechanical Stability as the Limit to the Fractal Dimension of Solid Particle Silhouettes," *Powder Technol.*, 43(2), 15th July (1985) 187-188.

[16] Personal communications from Dr. Peleg, Dept. of Food Engineering, University of Massachusetts, Amherst, MA, U.S.A., Dr. Riley, University of Bath, UK and Dr. J.C. Williams, Honorary Fellow, Chemical Engineering Dept., University of Bradford, UK.

[17] J.H. Brown, "Unit Operations in Mineral Engineering," International Academic Services, Kingston, Ontario, 1979.

[18] A.M. Gaudin, "Principles of Mineral Dressing," McGraw-Hill, New York, 1939.

[19] E.G. Kelly and D.J. Spottiswood, "Introduction to Mineral Processing," Wiley, New York, 1982.

[20] B.H. Kaye, "Application of Recent Advances in Fineparticle Characterization to Mineral Processing," invited contribution to the Symposium "Challenges in Miner-al Sciences,"

23rd Annual Meeting of the Metallurgical Society of CIM, Quebec City, August 19-22, 1984; published in *Part. Charact.*, 2, (1985) 91-97.

[21] B.H. Kaye, "Fractal Description of Fineparticle Systems," in K. Beddow (Ed.), "Particle Characterization in Technology," Vol. 1, CRC Press, Boca Raton, FL, 1984, Ch. 5.

[22] The detailed data generated in the measurement of the roughness of the surfaces were presented in B.H. Kaye, "The Description of Two Dimensional Rugged Boundaries in Fineparticle Science by Means of Fractal Dimensions," first presented at a workshop on fractal dimension, Rosemont, Illinois, May, 1985; also published in *Powder Technol.*, 46 (1986) 245-254.

[23] The profilometer traces in Figure 3.16 were originally described by E. Rabinowiez, "Polishing of Surfaces," *Sci. J.*, 22, January 1970, 45-48.

[24] B.J. West and M. Shlesinger, "Random Model of Impact Phenomenon," *J. Phys. A.*, 127 (1984) 490-508.

[25] S.K. Akhter, "Fineparticle Morphology and the Rheology of Suspensions and PowderSystems," MSc Thesis, Laurentian University, 1982.

[26] This type of viscometer is widely used in teaching laboratories. A discussion of the theory of the instrument can be found in many standard textbooks. see, for example, "Scholarship Physics," by M. Nelkon published by Heinemann Educational Books, London, 1966, 68 and 69.

[27] J.A. Herbst, D.J. Kenneberg and K. Rajamani, in "Proceedings of the International Symposium on Instream Measurement of Particulate Solid Properties, Bergen, Norway, August, 1978," Volume 1.

[28] J.A. Herbst and K.B.S. Sastry (Eds.), "On-stream Characterization and Control of Particulate Processes," report of a workshop held at Asilomar Conference Grounds, Pacific Grove, CA, June 18-23, 1978, The Engineering Foundation, New York, 1978.

[29] For the non-specialist an understandable discussion of the diffraction pattern of regular and random array fineparticles is given in W. Bolton, "Patterns of Physics", McGraw-Hill, London and New York, 1974. This book has rescued many struggling first-year physics students at Laurentian University who find the more usual University first-year text heavy going. The paperback edition of the book has a beautiful picture of the fractal structure of lightning on the front cover.

[30] The various commercial eriometers are continuously developing and it is not possible to give a complete guide to which instrument uses which logic in the breakdown of the energy pattern in a complex diffraction pattern generated by a laser beam passing through an array of rugged fineparticles. The technical literature of the various companies manufacturing eriometers should be consulted if one is interested in an extensive study of this problem. The basic theory for breaking down a diffraction pattern to yield a size distribution of the scattering fineparticles was first worked out by J.H. Talbot; See J.H. Talbot, in M.J. Groves and J.C. Wyatt-Sargent (Eds.), "Particle Size Analysis 1970," Society for Analytical Chemistry, London, 1972, pp. 96-100. A good review of the basic theory was given by B.B. Weiner, "Particle and Drop Sizing using Fraunhofer Diffraction," in H.G. Barth (Eds), "Modern Methods of Particle Size Analysis," Wiley, New York, 1984, Ch.5. Commercially available eriometers include the following instruments: The **Microtrac** eriometer is manufactured by Leeds and Northrup Instruments, Microtrac Products, St. Petersburg, FL, U.S.A. The **CILAS** Eriometer is marketed by CBL Compagne Belge Lasers, Meersstraat 130-B, 9000 Gent, Belgium.

[31] J. Leblanc, "The Shape and Size Characterization of Respirable Dusts," *M.Sc. Thesis*, Laurentian University, 1986.

[32] R. Murphy, "Optical Information Processing Procedures for Determining the Essential Features of Particle Shape," *M.Sc. Thesis*, Laurentian University, 1972.

[33] W.S. Bickel, H.A. Yousif and W.M. Bailey, "Masking of Information in Light Scattering Signals from Complex Scatterers," *Aerosol Sci. Technol.*, 1, (1982) 329-335.

[34] B.H. Kaye, "Fractal Dimension and Signature Waveform Characterization of Fineparticle Shape," *Am. Lab.*, April 1986, 55-63.

[35] D.A. Sutherland "A Theoretical Model of Floc Structure," *J. Colloid Interface Sci.*, 25, (1967), 373-380.

[36] D.M. Sutherland and I. Goodarz-Nia, "Floc Simulation - the Effect of Collision Sequence," *Chem. Eng. Sci.*, 26, pp. 2071-2085.

[37] I. Goodarz-Nia, "Floc Simulation: Effects of Particle Size and Shape," *Chem. Eng. Sci.*, 30, (1975) 407-412.
[38] I. Goodarz-Nia, "Floc Simulation: Effect of Particle Size Distribution," *J. Colloid Interface Sci.*, 52, (1975) 29-40.
[39] H.G.E. Hentschel and J.M. Deutch, "Flory and Type Approximation for the Fractal Dimension of Cluster-Cluster Aggregates," *Phys. Rev. A.*, Vol. 29 (3), March 1984, 1609-1611.
[40] R.C. Ball and T.A. Witten, "Particle Aggregation versus Cluster Aggregates in High Dimensions," *J. Stat. Phys.* 36 (1984) 873-879.
[41] A. G. Flook, "The Use of Dilation Logic on the Quantimet to Achieve Fractal Dimension Characterization of Textured Surfaces," Powder Technol., 21(1978) 295–298.
[42] B.H. Kaye and G.G. Clark, "Characterizing Fractal Structure of Flocculated Suspensions," in preparation.
[43] H. Heywood, "The Origins and Development of Particle Size Analysis," Plenary Lecture given at the Conference on Particle Size Analysis, 1970, in M.J. Groves and J.L. Wyatt-Sargent (Eds.), "Particle Size Analysis 1970," Society for Analytical Chemistry, London, 1972, 1-18.
[44] B.H. Kaye and G.G. Clark "Fractal Description of Extra Terrestrial Fineparticles", *Part. Charact.*, 2 (1985) 143-148.
[45] G. Taubes, "U2 Mission to Catch the Dust of Comets," *Discover* (1983) 74-77.
[46] W.B. Whalley and J.D. Orford, "The Use of the Fractal Dimension to Quantify the Morphology of Irregular Shaped Particles," *Sedimentology*, 30, (1983) 655-668.
[47] W.B. Whalley and J.D. Orford, "Analysis of Scanning Electromicroscopy Images of Sedimentary Particle Form by Fractal Dimension and Fourier Analysis Methods," *Scanning Electron Microsc.* 11, (1982), 639-647.
[48] This discussion of the formation kinetics of fumed silica and the photographs of fumed silica fineparticles are from trade literature from Cabot Corp., Tuscola, IL., 61953, U.S.A.
[49] B.H. Kaye, J.E. Leblanc, G.G. Clark, "A Study of the Physical Significance of Three Dimensional Signature Waveforms," *Part. Charact.*, 1 (1984) 59-65.
[50] V. Timbrell, "Inhalation and Biological Effects of Asbestos," T.T. Mercer, P.E. Morrow and W. Stober (Eds.), "Assessment of Airborne Particles," C.C. Thomas, Springfield, IL, 1972, Ch. 22.
[51] W. Stöber, "Dynamic Shape Factors of Non-Spherical Aerosol Fineparticles." in T.T. Mercer, P.E. Morrow and W. Stober (Eds.), "Assessment of Airborne Particles", Published by Charles C. Thomas, Springfield, IL, 1972, Ch. 14.
[52] W.A. Bloor, "Dangerous Dust," review in Spectrum Notes No. 170, (1980) 12-14. Spectrum Notes is produced by the Science Unit of the London Press Service and published by the Central Office of Information, Hercules Road, London, SE1 7DU, UK.
[53] G.J. Sem, "Aerodynamic Particle Size: Why is it Important," *TSI Quart.*, 10, No. 3, (1984) 3-11. *TSI Quart.*, is a house journal published by TSI Inc., 500 Cardigan Road, P.O. Box 43394, St. Paul, MN, 55164, U.S.A.
[54] V. Timbrell, "An Aerosol Spectrometer and Its Applications," T.T. Mercer, P.E. Morrow and W. Stober, (Eds.)," Assessment of Airborne Particles," Charles C. Thomas, Springfield, IL, 1972, Ch. 15.
[55] A.M. Hollenbach, M. Peleg and R. Rufner, "Effects of Four Anticaking Agents on the Bulk Characteristics of Ground Sugar," *J. Food Sci.*, 47 (1982) 538-544.
[56] P. Kotrappa, "Shape Factors for Aerosols of Coal, Uranium Dioxide and Thorium Dioxide in Respirable Size Range," in T.T. Mercer, P.E. Morrow and W. Stober (Eds.), "Assessment of Airborne Particles," Charles C. Thomas, Springfield, IL, 1972, Ch. 16.
[57] W. Zeller, "Direct Measurement of Aerosol Shape Factors," *Aerosol Sci. Technol.*, Vol. 4, 1985, 45-63.
[58] Photographs provided by and used with kind permission of R.G. Pinnick, Department of the Army, White Sands Missile Range, New Mexico, 88002-5501, U.S.A.
[59] R.G. Pinnick, G. Fernandex, B.D. Hinds, C.W. Bruce, R.W. Schaefer and J.E. Pendelton, "Dust Generated by Vehicular Traffic on Unpaved Roadways, Size and Infra Red Extinction

Characteristics," *Aerosol Sci. Technol.*, 4, (1985) 99-121.
[60] Personal communication of Dr. Stern, World Health Organization, Regional Office for Europe, 8 Scherfigsvej, DK-2100 Copenhagen, Denmark.
[61] C.A. Amann and D.C. Siegla, "Diesel Particulates What They Are and Why," *Aerosol Sci. Technol.*, 1, (1982) 73-101.
[62] B.H. Kaye, "Trends in Fineparticle Characterization," in the proceedings of Particle Size Analysis, N. Stanley-Wood and T. Allen (Eds.), September, 1981, British Institute of Chemistry, London, 1982, 3-15.
[63] D.B. Kittelson and D.F. Dolan, "Diesel Exhaust Aerosols," Particle Technology Laboratory, Mechanical Engineering Department, University of Minnesota, Minneapolis, publication No. 387, 1978.
[64] R.J. Cheng and A.W. Hogan, "Microscopic Study of Lead Iodide-Nucleated Ice Crystals," *Microscope*, 18, No. 4 (1970) 299-302.
[65] Photo provided by Dr. Brownbridge, Kerr-McGee Corporation, used with permission.
[66] J.G. Cabrera and C.J. Hopkins, "The Measurement of Particle Size of Pulverized Fuel Ashes," in T. Allen and N. Stanely-Wood (Eds.), Particle Size Analysis, 1981 , John Wiley, New York, (1982) 127-142.
[67] G.L. Fisher, D.P.Y. Chang, and M. Brummer, "Flyash Collected from Electrostatic Precipitators: Micro Crystalline Structures and the Mystery of the Spheres," *Science*, 192, (1976) 553-555.
[68] G.L. Fisher, B.A. Prentice, D. Silberman, J.M. Ondov, A.H. Biermann, R.C. Ragini and A.R. McFarland, "Physical and Morphological Studies of Size Classified Coal Flyash," *Environ. Sci. Technol.*, 12, (1978) 447-451.
[69] J.A. Small and W.H. Zoller, "Single Particle Analysis of the Ash from the Dickerson Coal Fired Power Plant," in "Methods and Standards for Environmental Measurements," Proceedings of the Eighth IMR Symposium, September 20-24, 1976, Gaithersberg, MD, NBS Special Publication No. 464, National Bureau of Standards, Washington, DC, 1977.
[70] F.R. Kirchner, P.F. Dunn and C.B. Reed, "Toxicologic and Physiochemical Characterization of High Temperature Combustion Emissions," *Aerosol Sci. Technol.*, 2 (1983) 389-400.
[71] Y.S. Cheng, R.L. Carpenter, E.B. Barr and C.H. Hobbs, "Size Distribution of Fineparticle Emissions from a Steam Plant with a Fluidized Bed Coal Combuster," *Aerosol Sci. Technol.*, 4 (1985) 175-189.
[72] "Process for Recycling Vulcanized Rubber," Gould Inc., Cleveland, OH, 1978.
[73] A.E. Martens, Bausch & Lomb, Rochester, NY, personal communication.
[74] R.R. Llinas, "The Cortex of the Cerebellum," *Sci. Am.*, 232, No. 1, January (1975) 56-71.
[75] J.B. Rigaut, P. Berggren and B. Robertson, "Resolution - Dependence of Stereological Estimations: Interpretation, with a New Fractal Concept of Automated Image Analyzer Obtained Results on Lung Sections," *Acta Stereol.*, 2 Supple. 1, (1983) 121-124; Proceedings of the Sixth International Congress on Stereology, Gainesville, FL, October 9-14, 1983.
[76] J.P. Rigaut, "An Empirical Formulation Relating Boundary Lengths to Resolution in Specimens Showing Non-Ideally Fractal Dimensions," *J. Microsc.*, 133, Part 1, (1984) 41-54.
[77] J.P. Rigaut, C. Lantuejoul and F. Deverly, "Relationship Between Variants of Area Density and Quadrant Area - Interpretation by Fractal and Random Models," Proceedings of the Fourth European Symposium on Stereology," *Acta Stereol.*, in press.
[78] J.P. Rigaut, P. Berggren and B. Robertson, "Stereology, Fractals and Semi-Fractals, the Lung Alveolar Structure Studied Through a New Model," Proceedings of the Fourth European Symposium on Stereology, *Acta Stereol.*, in press.
[79] J.P. Rigaut, "Fractals, Semi-Fractals," in G. Cherbit (Ed.), "A Biometri in la Dimension Non Entiere et Ses Applications," Masson, Paris, 1986, in press.
[80] M. Batty, "Fractals–Geometry Between Dimensions," *New Sci.*, April 4, (1985) 31-35.
[81] L. Grossman, "The Most Primitive Objects in the Solar System," *Sci. Am.*, No. 2 (1975) 30.
[82] J. Lezanski, and W. Rutkowski, "Infiltration of a liquid in Sintered Tungsten," PMI, April 1987.

4 失职的硬币和摇晃的醉汉

4.1 随机事件描述中捉摸不定的术语*

一位北美的读者，如果对本书随意组织的分形研究的正文，从第 1 页到目前这 1 页做系统地追踪探究，得出“该书作者的第二职业（to moonlight）是词典编纂”这样一个结论，是毫不令人吃惊的。欧洲的读者可能不知道，在北美，“to moonlight”的意思是，在日常工作以外的时间从事另外一种职业。与那些将在这一章予以讨论的词汇一样，“to moonlight”在普通的字典中也是找不到的。编写第一本最全面的英语字典的约翰斯顿博士，把词典编纂者定义为“一位编制词汇表的苦工，他的工作与人无害但乏味之极”。从技术上来说词典编纂人就是“写字典的人”。

我第一次做词典编纂人是在 1963 年，当时，我应邀修订一本“Chambers 技术词典”中有关粉尘技术的部分[1]。我提出的每个词条，如能被收入词典，我就能得 1 先令 6 便士（大约合 20 加分）的酬金。我对词典既爱又恨的感情始于 12 岁，那时有人给了我一本“Chambers 词源英文字典”[2]。在“Chambers 字典”中，词源学的定义是“考察词的派生及其原始含意的科学。词源学(Etymology)一词源于希腊文中的 ETYMOS 和 LOGOS，前者意为真实的，后者则意为评论”。在词源学字典里，你会发现许多你十分熟悉的词都有你意想不到的极其有趣的由来。我还清楚地记得，当我发现 Scrutiny（细看、细阅）是来自意为破布或垃圾的拉丁文“Scruta”时，感到多么有趣。原来，“仔细查看某地”最初的意思是，彻底检查那个区域，找找有没有破布。在提到理想分形具有相同的结构时（无论我们是用怎样的尺度上去查看这些结构），我们正是在用一种生动的方法，形容我们检查分形时的认真程度。数学家研究分形曲线的态度，与罗马武士从一群野蛮的俘虏身上的破布中搜寻藏匿的武器时一样专心致志！

我对词典痛恨的一面在于，如果你第一次试着拼写一个词就拼错了，那你就很难找到藏在字典某个地方的那个词的正确拼法。比如说，如果一开始你就把 Cabbage 拼写成

---

* 那些认为自己能定义随机性的读者，可跳过这一节

了 Kabbage，那你就永远别想在以 k 字母起始的单词中找到它的正确拼法了。因为我自己特别不善于拼字，所以我常为查字典耗费大量的时间，却所获无几。尽管那些比较务实的科学家对于词意的争论常会表现出不耐烦，不过，在解释实验数据时，如果使用意义不确切的科学用语，就会给人以模棱两可的印象。随着分形几何的日益发展，如同我们在 5.5 节中论述过的那样，使用分维数这个词时，它有很多不同的含义；而研究随机事件这种难度较大的问题，也会因词汇的随意使用变得更为困难。作者写这一章的目的就是想澄清我们所讨论的随机事件究竟是什么意义。

一些听过早期分形讲座的学生向我抱怨说，他们的词典里找不到分维数的概念。曼德勃罗特（见第 1 章参考文献[18]）在他的著作中说，由于他开创了一种新的理论结构——现在我们知道这便是分形分析和分形几何——他需要不停地为他的新思想和新概念创造新词汇。在介绍曼德勃罗特创造的新词中，我们通过研究这些词的词根发现，曼德勃罗特不仅借用希腊文和拉丁文，他还从丰富多彩的日常用语中汲取词汇。在 70 年代早期，在曼德勃罗特创造分形这一术语时，常用的词典中收入分形和分维数这些词也许还需一段时间。

日常用英语字典存在的一个主要问题是，它仅能收入单词的传统用法而无法编入老词的新意义。我曾给 Laurentian 大学翻译学校的学生开设过有关科学术语的起源和历史的讲座，学生们常来找我请我帮他们解决翻译中遇到的某些难点。有一个学生正在翻译一篇论述用一套国际象棋布局的“全息摄影”（holograph）创造 3 维空间影象的文章。他在“Chambers 词源字典”中查到了 holograph，其定义为：“一种完全由建立它的人亲笔书写的文件，如遗嘱”。这个词派生于希腊文，“holo”的意思是全部，“graphein”的意思是书写，二者合起来的意思仍然是 holograph 现在的法定意义。不过，它对这个学生正在翻译的文章显然没有意义。原来，远在这本字典问世之后很久，世界著名科学家 Gabor 发明了一种用于记录 3 维影象的新方法，他用光的全息摄影（optical holography）这样一个术语描述他的新系统。Gabor 没有意识到 holograph 原有的作为“手书”的法定意义，而是创造了 holograph 这个词以区别于照片（photograph）。照片的意思是用光线画的画（来自于希腊文的 photos，意为光线），而 holograph 含有 3 维影象的全部（“holos”）信息之意。

由于字典中普遍缺乏专门性术语，人们很难从中找到技术性专门用语的准确定义也就不足为奇了。尤其是从我个人的经验看，很多学生从来不查字典，他们总是试图通过琢磨那些不懂的词而大概了解它的意思，这可能是相当危险的。比如，对于随机（random）这个词，读者自己就可以证实，实际上大多数人对随机变量的性质的直觉认识很差。如果请某人从数字 0 到数字 9 中产生一串随机数，他的回答多半与正确答案有偏差。在表 4.1 中，我列出了一个学生产生的 100 个随机数字，还给出了 100 个数中每个数出现的频度。由表可见，这个学生给出的数中数字 1 的频度较低；他也没有给出 1 对数字或 3 个连续相同的数字，而这种情况一般来说在 100 个随机数字中是会出现的。值得注意的是，如果从垂直方向看这 100 个随机数，就会发现出现一对相同的数字的机会很频繁，而在这个学生“随机”产生数字行中却一对相同的也没有。

为便于对比，在由这名学生生成的随机数表的旁边位置，我们给出了从已发表的随

学生	行中相同的一对数	数表	行中相同的一对数
0 3 4 6 8 5 2 7 6 4	0	0 9 2 1 4 5 0 2 3 8	0
5 8 2 1 3 8 7 9 2 3	0	8 0 5 4 7 9 4 4 5 7	1
2 4 8 5 7 6 9 8 2 3	0	7 2 8 3 9 8 5 9 3 3	1
2 8 9 7 5 6 4 9 7 1	0	3 3 5 0 4 0 5 1 1 0	2
9 5 8 7 6 2 4 9 5 4	0	7 7 1 2 2 1 9 4 3 4	2
7 6 9 2 3 8 4 3 7 9	0	1 4 9 3 6 6 9 1 7 7	2
8 2 4 3 5 7 9 0 4 0	0	0 0 6 9 2 2 8 9 7 5	2
9 8 0 9 6 0 4 5 0 2	0	0 5 1 6 9 2 0 6 9 5	0
8 4 5 2 1 0 8 9 4 2	0	3 7 9 9 7 4 0 2 3 3	2
7 4 5 1 9 3 8 7 8 6	0	0 4 1 3 8 2 7 0 7 4	0
列中相同的一对数：1 1 1 1 0 1 2 1 1 2		1 0 0 0 0 1 2 0 1 1	

数字	出现的频度	
	学生	表
0	7	13
1	4	9
2	12	11
3	8	12
4	13	10
5	10	9
6	8	5
7	11	12
8	14	6
9	13	13

表 4.1 大多数人对于发生在随机系统中的事件模式缺乏识别力。这一点，从这个学生随机猜测的这 100 个数字串中没有 1 对或 3 个连续相同的数就可以看出。如果把从 0 到 9 的数字组成 100 个数的方阵，即使学生产生数字串时没能给出 1 对相同的数，垂直排列的数字也产生了几对相同的数和 1 组 3 个相同的数字，如表中的左上方阵所示。为了对比，从随机数表中选取了一个相似的表，表中的右上方阵所示，该表的数字是放大电子计算机的随机噪音生成的

机数表中截取的 100 个数字。这个短序列随机数摘自图 4.1 的大随机数表[3]。建立随机数表的方法，是使得沿着表头移动时，数字 0 到 9 间的任意数字出现在任一位置的概率相等，而且这一概率与前一个位置出现的是什么数无关。也就是说，如果选取大量的随机数，那么，每一数字都是以等概率出现在表中。本书将谈到的几个实验中都要用到图 4.1 中的随机数表。很多小型计算器和微机的内部线路中都设有随机数发生器，这样，学生们做模拟研究时就可以自己生成随机数了。但是，准确产生随机数表始终是一个难题，也一直是学术争议较多的问题。一些小型计算机的随机数发生器生成的一长串的随机数，可能并不是真正的随机数[4]。有关产生随机数在技术上的困难已经超越了本书涉及的范围。本书假设，我们研究分数维所用的所有随机数表，都是先进的计算机技术所能实现的充分随机的随机数表。

随机一词的词源还不太清楚。“Chambers 词源学字典”上说，它来源于一个古老的法国词“randon”，意思是跳跃；另一本字典上说，这个词派生于一个意为猛烈和迅急的词，即“randir”，意为狂跑。如果我们想到在中世纪的战争中，很多战斗都是人与人直接对抗的话，那么，这两个定义也许可以合二为一；而且，在这种人与人的战斗中，并不注意斗士们是否清醒冷静。随机这个词自然使我们联想到，在一场战斗中，喝醉了的斗士骑马朝各个方向狂跳的情景。由于在文艺复兴时期拉丁语和希腊语是学者们的国际性语言，法语是文化上的国际性语言，所以直到二三十年前，在英语国家中，新的科学词汇通常都是用拉丁语、希腊语或法语创造的。然而，由于科学发展的势头转向了美国，而且也逐渐不再要求新生把希腊语和拉丁语做为基础课程的一部分，用英语构成科学术语的趋势便日益增加了。比如，激光（laser）就不是来自传统语言，而是意为“受激辐

09214	50238	04991	38139	54996	24342	44496	45239	11940	19241
80547	94457	70275	12913	66313	27041	82993	54067	94659	52521
72839	85933	25735	97083	95520	67343	92772	82290	64448	51612
33504	05110	71056	23827	81160	98154	74567	24323	54782	49874
77122	19434	53361	96189	74674	12911	51085	38413	89676	48350
14936	69177	88984	77642	21103	86088	01892	98501	52334	48965
00692	28975	18511	94665	02539	61959	66426	70460	86063	47929
05169	20695	38413	33058	58268	99421	40918	71663	20459	89178
37997	40233	37986	47625	58328	72816	47809	63172	53068	60343
04138	27074	19521	92675	81223	10821	09372	44162	13190	23149
57018	48311	85683	24918	92363	02657	95035	27533	44350	30630
36833	12647	23317	33589	70249	43025	47726	00697	19107	10206
02407	50852	93431	50190	22752	88188	54086	96633	48277	74546
18262	28862	26009	73861	58056	30040	45701	93153	70875	90002
16299	72896	27331	12010	25253	14297	00219	64076	37103	37204
83640	49766	48898	92471	86275	30263	63327	12406	10596	24572
88542	58925	70098	51059	29124	48902	56164	57073	89487	47870
74431	18037	47466	66705	64853	25188	22771	74068	75267	09929
93015	96164	58353	71861	74252	80911	00949	94873	33572	13311
30959	26102	54232	20634	61525	39054	67094	89310	67315	40704
31807	13883	34418	40128	14012	45972	01955	53691	43651	97139
00222	19051	57923	78178	27208	64159	08611	35303	64406	13668
30819	51795	51846	13614	02299	61338	42121	49239	70620	40624
97938	50482	67045	66065	09955	96300	90516	85318	02907	03587
52515	24368	33672	06587	99830	03793	03969	20378	20910	08181
50610	75873	91321	09540	40859	32448	92396	23883	45388	28647
69717	83974	54937	87844	17886	53805	87912	77475	44639	71482
97249	47377	74593	18857	58058	73848	46648	21447	36373	92867
29923	21615	41497	37024	18455	08032	25195	25157	26079	74194
83705	32600	58350	14916	25111	27417	75832	49646	06111	04891
95881	86318	91286	01200	21988	20193	38483	29150	66153	63363
14228	78493	28896	91083	04917	64476	32721	34551	53512	31049
43389	41211	42779	99658	17407	81851	93136	00686	34511	26308
71780	97671	23274	08354	93647	09487	09249	39115	95321	68868
19546	86817	33871	46810	96289	20999	82234	14439	01055	12694
91929	37078	93994	57510	76568	53999	61956	30806	70581	82932
32445	63790	53392	65969	02655	61789	34890	21801	93593	46397
01539	00404	48532	59423	10216	94216	72663	29584	32825	40985
87021	20496	85498	54783	52784	55271	95869	45431	02404	68955
55838	41225	90745	91552	69416	17585	25440	14883	68111	87329
43363	15251	72228	65696	22481	35882	38551	66715	15694	64788
08244	50246	34789	39353	30361	29346	63729	30748	50760	68964
11922	05779	18851	47404	71310	13814	68904	00435	25596	90325
29716	71306	87109	65844	21539	35310	87619	04578	76573	86447
09802	59796	45679	32349	04003	09420	73664	68922	75476	57222
15762	62552	03655	50339	07854	69253	62467	00350	80773	79359
64387	30766	06075	35803	53746	84275	27068	35636	96885	27993
15568	22973	99027	09790	16180	26516	91008	27747	90740	21530
19376	21862	00109	81002	15985	40199	48350	17593	62201	37421
50855	98963	36084	32781	40027	49365	87493	11055	34100	67092

图 4.1　可用来模拟许多不同系统的随机数表，在这些系统中，各种变量都是随机的[3]

射光放大”的词组（Light amplification by stimulated emission of radiation）的首字母缩略而成（首字母缩略词的意思是，一个词由短语中每个单词的首字母合成）。如果用古代英语形容随机事件，我们可能会把随机数称为“熊皮（berserk）数”，berserk 在古英语中意为熊皮，而其现代用法则是形容一种疯狂的、无法预测的行为。该词来源于这样一个典故：斯堪的纳维亚的武士出征时习惯身穿熊皮，并且，在战斗中都乱砍乱刺。这种漫无目标的作战方式，可能是因为武士们经常在出战之前大量饮蜂蜜酒（一种用发酵的蜂蜜制成的酒精饮料）的缘故。

如果学者们不使用法语，而是回到拉丁语中找一个描述随机数的词，他们可能把随机数称为“水性杨花的数”，水性杨花（capricious）出自拉丁语，是用来形容淫妇的。可见，无论怎么表述，随机变量的基本意思都是无法预测的变量，它的变化是以一种胡乱的方式，从一个值变幻莫测地变到另一个值。

在研究随机变量多年之后，我觉得有些时候，把随机系统定义为这样一种系统可能更为明智，这种系统的行为和结构组成表面上看是随意的，但其实蕴含着一系列原因，只是这些原因尚未弄清而已。“随机”变化系统的不可预测，与其说是由于因果关系悬而未决的缘故，还不如说是由于我们对观测到的“随机”行为的确切原因缺乏理解所致。分形几何学吸引人的部分原因，正是在于它发现了明显的浑沌结构和无常变化中存在着有序模式。本书中，我们将用“随机”这个词描述一些事件的模式，这些事件的行为方式看上去是变化无常的。不过，我们会发现，在某些情形下，在弄懂由实验产生的事件模式之前，“随机”的准确含义正是我们要反复思考的重要概念。

4.2 机会、概率和误差

真正的“随机性”，通常是赌徒们所玩的机会游戏的重要组成部分。日常讲话时，机会与概率经常是相互替用的。自从人类的活动有记载以来，就有人开始玩机会游戏了。不过，当一个人想知道“上帝的旨意”的时候，机会游戏就会与做出行动的决定密切相关了。1984 年秋，我在南非一次讲座旅游之后的休假中，访问了一个叫祖鲁（Zulu）的村落，访问的最大收获是请教了当地的巫医。这个巫医在一大群游客中选中了我，然后她向地上扔出一堆小骨头。她仔细察看小骨头形成的图案，然后告诉我她从中看出关于我的事情，她说我已为这次旅游在经济上准备了很长一段时间。一般来说这应该是一个很不错的猜测，因为我的口音表明我是北欧人。但是事实上，已经有人为我付了机票，她猜错了！不过，这位巫医仍不失是一个非常精明的人。向地上扔骨头并观察其图案，她是沿袭了这种历史悠久的预测未来的方法。机会（chance）一词来源于拉丁语的“cadentea”，意为掉下来（a falling down），这是专用于指骰子的。骰子（dice）来源于一个意为“那是给予你（机会）的东西”的拉丁词，与现代的基督教教名 donna（意为“来自上帝的礼物”）有关。因此，当用向地上投掷物体的方法预测生活时，所发生的就是机会。而之所以称为“骰子”，是人们认为把物体扔到地上时，它显示的数字是在告知未来的信息；甚至在北美的现代英语中，还有“那是甜饼屑铺就的路”或“那是油煎土豆片掉下来的方式”等说法，意思都是说有些人相信自己的命运是由一些随机产生的事件图

案决定的。

概率（probability）一词派生于拉丁语的“prebare”，意为试验。字典中它的定义是：“假设或者被证实的可能性”。早期科学研究中遇到的最简单的随机事件就是投掷硬币。假设现在我们有一枚均质的硬币，可知这枚硬币落地后，其正面朝上和反面朝上的概率相等。在概率研究中，为使所有不同事件的概率总和为1，常常要调整概率的陈述；也就是所谓的一枚硬币落地后，其正面朝上或反面朝上的概率是1，而某一具体硬币落地后，其正面朝上的概率为0.5。若摇动的一枚6面体骰子（每面有一个数字），我们会发现骰子落到桌面后，每一个数字出现的概率都是1/6（约为0.166）。严格地说，概率是由经验或理论决定的偶然事件发生频度的数值估计。

与同时代的许多学生一样，我最初是在讨论实验误差时遇到概率和统计科学的。我参与过的一个最枯燥的实验是用一种叫做螺旋测微器的测量仪器测量一段铜线的直微，共需测量20次。测量这段铜线直径所得到的精确值，取决于许许多多的微小变化。如果你把测微器拧得过紧，实际上就把铜线压扁了，它的直径也就变化了；还有，这段铜线已经被几届学生用过了，因为磨损、用力搬挪或者线的不同区域已有积尘，它的实际直径也就有所改变。在我测量它之前，已有很多学生反复测量这段铜线了，所有这些因素都使我这次对铜线直径的测量成了一桩无法得到确定结果的任务。计算20次测量所得数据的平均数的方法，是先将所有20次测量的结果相加，然后除以测量次数。平均（average）这个词有一段很有趣的历史，这个词最早是一个用于海上保险的术语[5]。那些中世纪的商人，虽说他们把商船驶向很远的地方，总是希望获得很大的利润，但有时也会受挫。如果商船遭遇风暴，为了减轻船体重量以驶出风暴区，就要把部分货物扔下船。“平均”的意义就是风暴过后船上所余货物的价值，也就是商人们（包括那些货物被扔下船的货主）要分的总钱数。记住这样一点非常有用：所谓“平均值”是某些实验确定的重要细节“扔下船”之后所计算出来的数[4]。

一位试图涉水过河的统计学家的悲剧性故事，证实了不考虑原始数据的重要性，而只计算平均数的危险性会有多大。这位统计学家手中的资料是：从一条河的一岸到另一岸，以2英尺为间隔，每一点的河深分别为0，2，3，9，9，3，2，0英尺。这位统计学家很快算出，河的平均深度刚刚超过4英尺，而他自己身高6英尺，他便决定走过河去。不幸的是，这位统计学家不会游泳，他淹死于河心处的“统计变量之中”。

由于平均数不能告诉我们任何有关实验测量的范围，所以应该教给学生们如何计算测量的标准偏差。我们将在这一章的稍后部分讲述一种估算标准偏差的方法。

学生们第一次遇到的统计推理问题通常与实验测量的误差有关，于是他们会认为统计学的思想与误差有关。用统计的方法处理数据，对没有本事的工程师来说是一种救急措施；对于普通物理专业的学生来说，开始思考统计变量的确需要一种思维方式的转换。在统计变量中，数据值的变化并不是因误差（这里的误差可理解为测量中发生的错误——译者注）引起的，而是由实际变量的随机波动造成的。

描述随机波动形式的定理的发展，要晚于西方世界科学革命的发展，M. G. Kendall曾对这一奇怪的事实有过论述[6]。他指出，由于在普通人的头脑中，命运与上帝决定事件的模式有关，而且任何一种观测的模式都可能因为上帝情绪的变化而变化，所以没有人

研究通过不断掷骰子产生的事件模式。Kendall 在他的一篇文章中提到：

“可以猜测，在长达几千年的骰子游戏中，比如说在公元 1400 年前的几千年中，可能出现过一些有关统计率的永久性概念和概率频度理论的雏型。尽管据我所知还没有这方面的证据……。但我想很有可能是在基督教改革运动以前，那种无论多么琐碎的事都是在神的天意下发生的感觉，严重阻碍了机遇理论的发展”[6]。

一般认为，对随机事件概率模式的科学研究的发展是由于 17、18 世纪贵族的刺激，因为那时这些人沉醉于高额赌注的赌博中。Montroll 和 Schlesinger[7]曾对随机行走理论做过资料翔实的评述，在评述的开始有这样一段言论：

“由于旅游辛苦而昂贵，而吃喝、打猎和嫖妓通常也无法占满男士们的日子，于是只有两件事可能打发剩下的时光——祈祷和赌博，而很多人更偏爱后者。所以，估计打赌输赢的命中率不仅与计算技艺的最前沿状况紧密相连，而且事实上是计算技术的主要动力也就不奇怪了”[7]。

Montroll 和 Schlesinger 还提到，巴斯噶（Pascal，1632－1662）和 Demoivres 等科学家对赌博机会早期研究的真实意图，使得他们的研究结果不可能迅速发表。Montroll 和 Schlesinger 对此的评论是：

“概率计算的书面参考资料很少，并不意味着人们对此领域缺乏兴趣。由于有关机会的知识非常初浅，因此任何一种能精确地计量赌博输赢的能力都十分值钱。1657 年，Huygens 访问法国时发现，数学家们对机会学说产生了浓厚的兴趣，只是他们也不愿意透露结果”[7]。

在人们对赌博数学的兴趣不断加深的同时，保险业也迅猛崛起。社会上大量需求这样的人，他们能计算出那些参加人寿保险的人的估算寿命。关于不同职业的人的“估算寿命”这一“随机变量”中的事件模式，一般被视为绝密资料，以确保人寿保险总能在对客户的估算寿命所做的赌博中赚取利润。

可以把诸如“掷一对骰子出现数字 12 的频率”这样一些问题的探讨，作为对随机过程的研究。随机过程是在其结构中有某些概率因素的过程，一本权威的词源学字典给出的该词的起源是一个意为“猜测”的希腊词[8]。

赌博做为一种活动，其兴旺却建立在这样的事实基础上：大多数人对于随机过程产生的事件模式的理解非常肤浅。让我们再引用 Kendall 的一段话：

“在那段黑暗的时期，赌博风行欧洲。教堂和政府为控制与此有关的罪恶，做了种种努力，不过，就象今天采取的许多措施一样不起什么作用。似乎再也没有比赌博对反赌博更显顽固的事物了”[6]。

我在芝加哥工作时，曾有一位数学教授，我偶尔与他共进午餐。当时有一个组织正在设法接近他，请他计算一种特殊的赌博游戏中的事件概率。过了一段时间，这位数学家才醒悟到，原来，想利用他做顾问的组织是一个有组织的罪犯辛迪加，该组织想借助他们有关游戏中概率模式的知识，在游戏中保持不败。这位数学教授费了很大一番周折才远离了那群想要资助他的人。

70 年代，加拿大联邦警察局在 Laurentian 大学资助了这样一项工作，他们要 Laurentian 大学研究在一种特别的弹球戏（一种把小球打入插钉的板上的凹洞中的游戏——译

者注）中的机会是否均等。根据加拿大的法律，游戏只有具有合理的赢的机会才能合法。确定这种游戏赢的概率的唯一办法就是雇一些学生多次地玩，这样才能通过实验确定概率模式。赌博机安装在学校的地下室，付给学生们钱让他们玩到玩腻（ad nauseum，是拉丁语“直到厌倦”的意思。ad nauseum 与拉丁语中的 nauta，意为“海中的事物”有关；ad nauseum 即是你晕船时的感觉）为止。如果某人为确定一长串实验事件的概率形式做实验直做到厌烦为止，那么这一长串事件在技术上就被称为遍历过程（ergodic process），来源于一个意为倦殆或腻烦的希腊语的词。

我们已经定义了若干用于随机事件讨论的数学术语，现在我们可以着手建立随机过程的模型，并由此产生具有分形结构的系统。

4.3 用于研究随机过程的蒙特卡洛法

许多赌博者对随机过程事件模式的知识少得可怜，这一点可以在一个普遍流传的赌博谬论（fallacy）中得以验证。这一谬论是，如果某个数在多次掷骰子中始终没有出现，那么在下一次掷骰子时，这个数出现的可能性就比较大（fallacy 的定义是：看上去是真的，而实际是违反逻辑的论点。这个词起源于拉丁文的“fallere”，意为欺骗）。比如，我们考虑掷骰子时数字 6 的出现情况。如果有人每次掷骰子都把运气押在数字 6 上，而掷了一圈以后，出现的数字都是小于 6，他就总是输。如果连续掷骰子出现的某组特定的数字中，数字 6 一直没有出现，那么打赌的人会试图对下次出现数字 6 压下更大的赌注。他做这样的决定的根据是，既然 6 已经有一段时间没有出现，那么下一次掷时它出现的机会一定比较大。

我们可以用图 4.1 中的随机数表进行模拟实验，考察一下数字 6 出现在掷骰子中的频率究竟是多少。在这个模拟实验中，我们忽略表中的数字 0，7，8 和 9，因为 6 面体骰子中没有这几个数。我们沿着随机数的最上一行，把表中的数字解释为掷骰子的结果，便可得到下面这一数字串：

2 1 4 5 2 3 4 1 3 1 3 5* 4 6

如果这个模拟数字串发生在一次实际的游戏中的话，那么到赌博中第 12 次掷骰子还没有出现过数字 6 时（就是上列数字串中标有星号的数字 5 之前的情况），因为“数字 6 姗姗来迟”，他便会在下一轮中增加赌注。但第 13 轮他又输了，而他的第 14 轮下了大赌注的对手却会非常高兴，因为迟到的数字 6 在第 14 次掷骰子时出现了。事件没能按赌博者预料的那样发生，从而诱惑他押下更高的赌注，这便是通常所说的“赌博者的灾难”。

如果某一随机事件长时间内尚未发生，那么这一事件发生的可能性就增大，这一谬论是一个流传广泛的通俗观点。1985 年 8 月 14 日的加拿大报纸上的一条新闻，就表明了人们对于事件群的看法。1985 年的 7 月底到 8 月初，发生了几起惊人的空难，其中包括印度航空公司的一架飞机在接近爱尔兰海的大西洋上空发生的灾难，一架 L1011 飞机在美国德克萨斯州坠毁，以及日本航空公司一架波音 747 坠入山坡。这架日航飞机坠毁后，当地一家报纸的头版有下面这样一段声明：

*“统计发生了混乱”*飞行员协会国际联合会主席说：“*最近发生的许多空中悲剧，不*

过是一种统计混乱，而不应引起对飞行安全的新恐惧”。

这位主席借用了赌博者灾难性的谬论，只是反过来说：“不用担心，我们并没有亲眼目睹飞机安全性的退化，这不过是统计混乱。”

为了说明我们如何能模拟在随机事件中，那些意外发生的事件的“模式”，我们来模拟一个雇员很多的公司意外事故的发生情况。假设，以往的记录表明，平均每 10 天有 1 个小的意外事故。为了模拟每任意 10 天就有 1 次意外事故，我们用图 4.1 中的每个随机数字代表一个工作日，数字 9 代表一次意外事故。仍然从表的起始部分开始，我们就可以模拟连续几天中，工厂意外事故的发生情况了。我们将无事故日记作 0；有事故日记作 1（即数字 9 出现在表中的时候），那么在连续的一段日子里事件发生的次序如下：

010000000000110000110000000100000（疑原文有误——译者）

大多数人会对这个结果感到高兴，因为他们认为意外事故会按这个平均预测发生。然而，如果用表的第 35 行从右至左的数字模拟意外事故，我们又会看到如下的结果：

0100000000100000000011100010001（疑原文有误——译者）紧急保险开关!!!

在模拟事件的次序达到第 30 天之后，有人可能会去按紧急保险开关了，因为意外事故不应发生得如此频繁。如果这种事件发生的次序是实情的话，那么，即使意外事故的发生率与 10 天 1 次意外事故的随机波动是一致的，公司工会和管理人员大概也要召开一次紧急会议，商讨如何对付这么多的工厂意外事故了吧；而且会议结束之后，管理部门可能要加强所有的操作规程。不过，即使他们不采取任何措施，紧急保险开关后的进一步事故次序模拟表明，紧急点之后随机地有 18 个无事故日。虽说上述的事故发生次序与其后的 18 个无事故日完全是随机的，但因受到“紧急保险开关阶段”的刺激，工会也许会认为一连串的事故发生日确实是一个大问题，不过值得欣慰的是，其后的 18 个无事故日正是经过他们的努力得来的。如果工厂的发言人想平息工人们对“紧急保险开关”的恐慌，但只是说“工厂将有一连串大受欢迎的无事故日，10 天中有 5 天出现事故的模式仅是统计混乱”的话，恐怕就不会有谁相信，如同没有人会相信飞行员所说的统计混乱一样[9]。在以后的讨论中，我们将试着给出类似上述讨论中的事件次序的分形的意义。

如果说人们对于随机事件次序中的事件群缺乏思想准备的话，那么当随机事件在 2 维空间中产生成簇（clustering）现象时，可能就会更感意外了。我们设想，图 4.1 的随机数表是涂料膜的一个剖面，涂层体积的 10%为颜料，且颜料微粒的大小相等。也就是说，我们可以利用图 4.1 中的随机数表，以每个数字 9 代表一个颜料微粒，那么图 4.2 即是颜料微粒随机配位形成的模拟丛团。

首先需注意的是，描述这些丛团的结构是极为困难的，不过，它们的外观与我们第 3 章中讨论过的炭黑团极为相似。较大的团簇似乎具有分形结构的雏形，这暗示着用分形维数描述空间中由随机集聚形成的系统的可能性。由于英国语言中用于描绘形状的词汇比较贫乏，所以很难用普通术语刻划图 4.2 中的丛团。我听过的一些报告中把这样的簇描述为“分形动物”或“渗透昆虫”等等。说真的，在一次讲座中我看见那么多形形色色的分形昆虫时，我还以为自己听的不是分维数的报告，而是一次关于昆虫学（entomology，研究昆虫的正式名称）的讲座呢！。

当我们运用随机数发生器模拟某一系统的随机行为并改变之时，我们就是在运用著

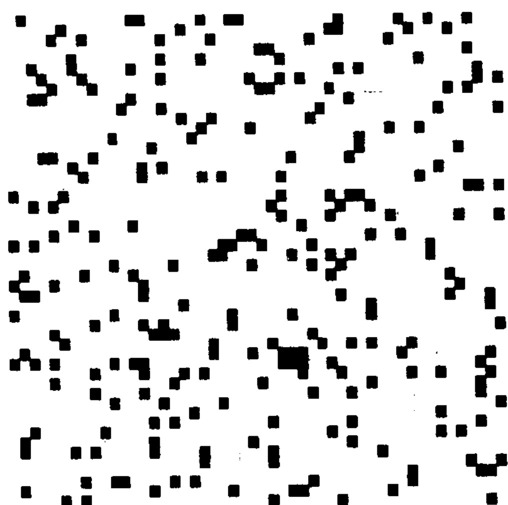


图 4.2 为模拟一个涂料薄膜的结构（在薄膜中，含有体积浓度为 10% 的尺寸相同的涂料颗粒），我们把图 4.1 的随机数表中 9 以外的每个数字看作图中空白的部分，数字 9 则变成了薄膜中的微粒

名的蒙特卡洛程序。蒙特卡洛程序这一术语，是在 Metropolis 和 Ulam 在 1949 年所著的论述随机过程的著作中首次出现于科学界的[10]。在历史上，第二次世界大战期间，蒙特卡洛曾被用作一绝密计算方法的代号，该计算的目的是预测原子弹中的中子通量。因为数以百万计的中子，沿着大量铀分子中的随机通道的幅射情况，只能在计算机上模拟而无法进行理论上的预测[11]。蒙特卡洛（Monte Carlo）是小公国摩纳哥的首府，也是世界著名的赌城，之所以把它作为上述计算的代号，一是由于中子通道的变化是随机的，二是生产原子弹具有高度的冒险性，其本身就是一次大赌博。现在，计算机的威力越来越大，成本也越来越低，使得在计算机上用蒙特卡洛程序模拟许多系统的行为成为可能；而仅在 70 年代初，还因这类技术的耗资太大而难以实现。在本书中，我们将引用几个蒙特卡洛程序，以模拟可用分维数描述的系统的结构及行为。

4.4 一维空间的随机行走

1905 年，随机行走首次用于描述布朗运动或近似于布朗运动的物体运动。那一年，伦敦大学的 Karl Pearson 教授写信给《自然》杂志（一本非常著名科学杂志），求助解决这样一个问题："一个人从 0 点出发，沿一条直线走了距离 A。然后，他任意转了一个角度，沿着另一条直线又走了一段距离 A。他重复这一过程 N 次。我想知道经过了 N 次之后，他离起始原点 0 的距离介于 R 和 $R+\mathrm{d}r$ 之间的概率"[12,13]。

让我们从最简单的一维空间的随机行走开始研究。我们考虑在一维空间里，有一个醉汉作朝向灯柱或离开灯柱的随机行走。为建立一维空间，我们将醉汉引入一条沟里，这样，醉汉只能走向或离开灯柱（也就是在沟里来回走动）。为使讨论简单起见，我们假设醉汉每一步移动的步长相等；而且，醉汉已经完全醉了，无论他要走的下一步是离灯柱越来越近还是越来越远，他都是或者走向灯柱或者远离灯柱，二者的概率相等。我们可以借用随机数表模拟醉汉的行为的方法模拟醉汉的行走。假定随机表中的奇数代表醉汉

走向灯柱，偶数代表他远离灯柱（为此，我们暂且把 0 看作偶数）。图 4.3 (a) 就是我们绘制的某一阶段内模拟醉汉的行进图。在这张图中，D 是共走了 N 步之后醉汉与灯柱的距离。前 50 步之后，我们发现醉汉离灯柱只有 2 步远，而且我们注意到在这个具体的模拟随机行走中，醉汉共有 15 次到达灯柱。

我们可以通过记录醉汉是否在灯柱处来描述醉汉的行走情况，且不必计数步数，而只记录醉汉在灯柱的次数。假设醉汉走 1 步需 1 秒钟，并把水平轴记为“时间”，我们对这一简单记录在时间轴上标注的事件集合，如图 4.3 (b) 所示。值得一提的是，为什么“时间”轴上的这一点集，看起来很象一个“团簇”。与上一节谈到的模拟事故记录相仿，对随机过程不很熟悉的人，会对这随机截断的事件群感到惊奇。

对图 4.3 (b) 所示的一条直线上的堆集点，可用数学方法予以描述。为使读者对此更感兴趣，有必要指出，现实中确实存在一些行为方式与摇晃醉汉类似的物理体系。我们建立的有关随机系统中事件群的概念，在应用科学领域有重大意义。例如，一种用于捕收工业过程排放到空气中的微粒的重要装置——静电除尘器（图 4.3 (c) 是这类设备的基本构造图），就是该应用的实例之一。用这种设备进行空气除尘时，设备的中心导线相对于圆筒壁在高压下工作。带有正电荷的微粒受到中心导线的排斥，而被捕收到器壁上。为了评价设备的效率，除了研究靠随机扩散收集灰尘微粒的机率，我们还希望弄清在中心导线未加电压之前，微粒在设备中的运动情况。

假定流过除尘器的空气流是紊流，则其中的单个微粒作随机运动。因为在除尘器模型中，我们关心的并不是微尘绕中心导线的运动，而是它朝向器壁的运动，所以可用 2 维而不是 3 维空间的随机行走来模拟微粒的行为。在此基础上，可以把图 4.3 (a) 的随机行走看作是简单除尘器未加捕收电压之前，微粒随紊流的空气在除尘器内的运动轨迹。图 4.3 (b) 时间轴上的事件就变成了尘粒与中心导线的碰撞。用这个简易模型研究静电除尘器中的微粒，我们就能通过改变微粒移向或远离导线的概率，模拟相对于外部圆筒给导线加上电压后的效果了。例如，我们可以改变随机行走的条件，使得微粒远离中心导线的步长等于朝向导线步长的 5 倍，这就模拟了在中心导线上加上电压后的效果，此时，导线会尽力将微粒推向器壁，以减弱紊动气流的随机影响[14]。

在建立静电除尘器模型时，我们假定，当微粒距导线距离等于 D（模型内的单位步长）的 20 倍时，就可认为微粒已被器壁捕收。从提高和不提高微粒离开中心导线的运动概率（即有外加电压和无外加电压时——译者注）进行的随机行走模拟所获得的数据，我们就能计算出紊流扩散把微粒随机带到圆筒形器壁时所需圆筒长度，并把该长度比之为增加的捕收频率，（捕收频率的增加，是由于中心导线加上电压后，更能使微粒离开中心而吹向器壁）。

在工业上，因为这种除尘器需要高电压，而不加电压的设备性能不会使工程师们感兴趣，所以恐怕会有人认为研究上述模型没有助益，然而，从学术的角度看，讨论这样一个简单的模型的意义在于，它初步说明了随机行走模型怎样才能使应用科学家们感兴趣的问题。

由于在随机波动系统中会发生很大变化（这种变化会使对随机过程经验不足的人感到吃惊），所以使用随机行走的蒙特卡洛进行模拟时需要格外小心。例如，图 4.4 是另一

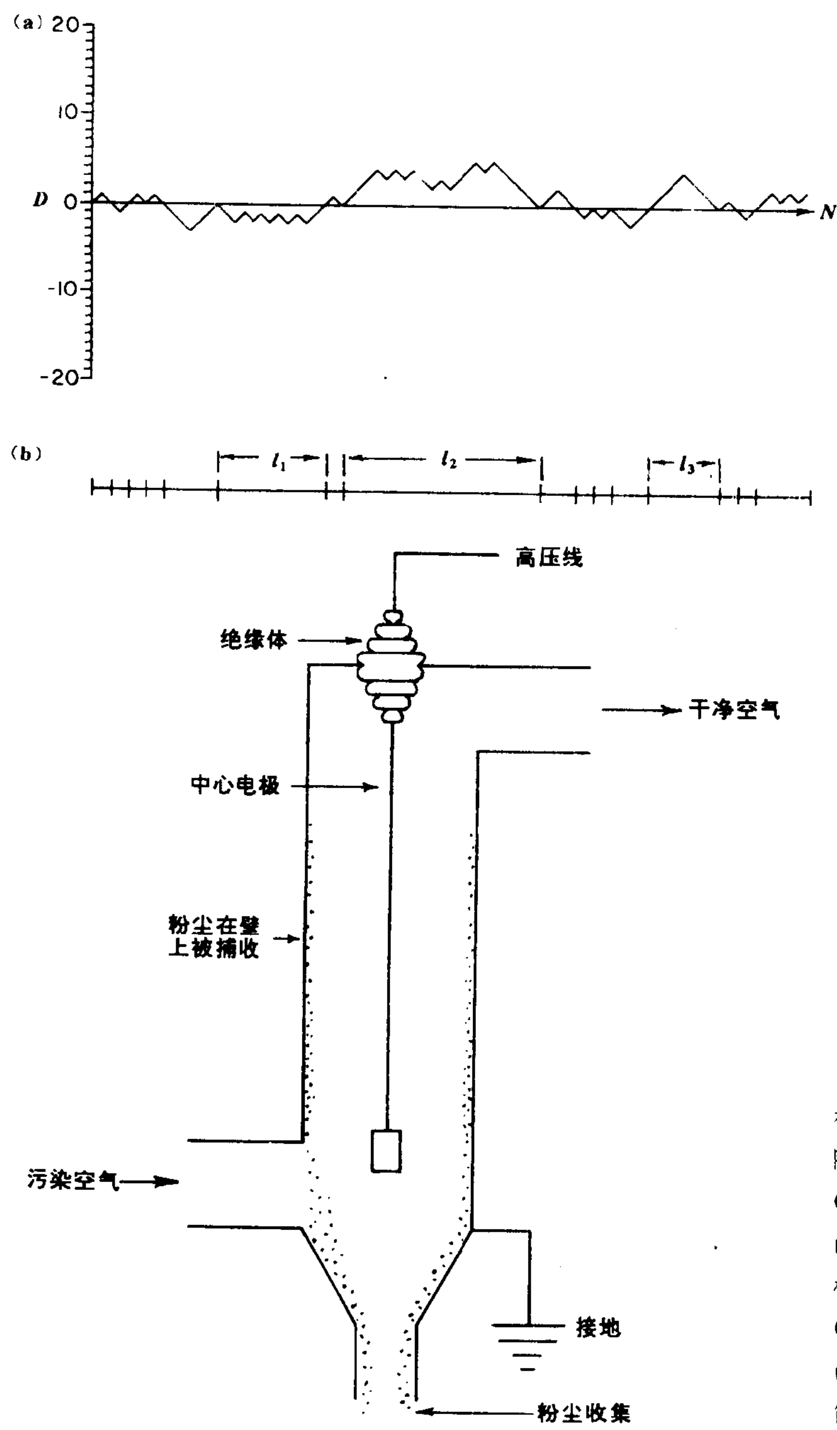


图 4.3 醉汉在一维空间上的随机行走在时间（步数）轴上产生的事件集。(a) 随机行走的步数；(b) 醉汉回到灯柱的事件记录；(c) 简单的静电除尘器

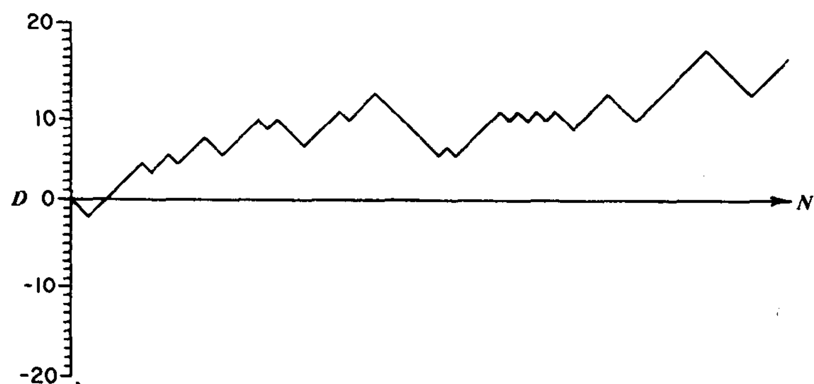


图 4.4 在任意一组随机行走后，摇晃的醉汉离开灯柱的情形都会有很大的变化，这一点可以通过本图的50步随机行走与图 4.3 中的50步的随机行走的比较中看出

张随机行走图，它的形成方法与图 4.3（a）完全相同。在这第二次随机行走中，我们发现醉汉仅有一次到过灯柱，而且 50 步之后，他实际上离开灯柱 16 步远。如果图 4.4 是对醉汉的随机行走进行的第一次实验模拟，那么很多学生可能会想随机数发生器一定出了毛病，或者认为这个模拟醉汉摇摇晃晃每走 1 步时，他其实都能“看见”灯柱的在哪儿。对于这类问题，在能估计出醉汉 50 步以后离灯柱的平均距离期望值以前，我们必须几百次地模拟这 50 步的随机行走，才能得出 50 步以后的平均分布模式。

图 4.3 与图 4.4 的随机行走的区别，同时也提醒读者在探究随机模式的含义时务必谨慎从事。如果一个物理系统变化的随机行走记录难以重复或重复起来需要较高的费用，人们就可能试图仅依据随机模式的几个迹象而创造关于整体的理论。比如，Jacchia 就注意到，记录下的全球气候变化与图 4.3（a）和图 4.4 的随机行走中发生的变化类型相似[15]。一张按年份绘制的温度变化图，如果看来象图 4.3（a），科学家们有可能将其看作一段时期内气候状况稳定的记录；而象图 4.4 的一套数据，则又可能被解释为是全球气候正开始变暖的证据。而实际上，如果有两组气温记录象图 4.3（a）、4.4 那样的彼此不同，那只是证明全球气候正随机波动而已。把复杂的因果模式与某一可被理解的“含义”联系起来，而此“含义”只存在于少量不可重复的数据中，对于这样的思维方式，应用科学家们总应有所小心才是。

4.5 失职的硬币和康托尘

图 4.5 是 1950 年 William Feller 所描述的随机行走[16]。这一随机行走是记录赌博者的输赢过程的，赌博者玩的是一种简单的名为“抛掷”的游戏。假设玩游戏的两个人是亨利和托马斯，游戏开始时每个人都有一堆硬币。每次旋转一枚硬币，如果它正面朝上停在桌上，亨利就从托马斯那儿赢一枚硬币；反之，亨利就输给托马斯一枚硬币。在图 4.5 中，直线上面的点的高度，代表的是亨利从托马斯那儿赢的硬币数；直线下面的点代表托马斯从亨利那儿赢的硬币数。对不熟悉随机过程的读者，这一输赢记录有一点是令人奇怪的，那就是在前 500 次扔抛中，托马斯赢的记录极少，亨利几乎每次都是赢家，这使人们认为亨利是一个走运的人或者至少他正处在一段走运的时期。Feller 在其著作中提供图 4.5 的数据时曾说明过，因为他从实验制作的赌博进程图中，有很多看起来过于杂乱，可能会令人难以置信，所以他特别从中挑选了图 4.5。他对这一数据的论述值得详

细引述：

“一位现代的教育学家或心理学家，如果去研究长时期抛掷单个硬币的游戏（如我的记录），他会认为大多数硬币都是不正常的。如果把许多枚硬币中的每一枚都抛掷 N 次，会有多得惊人的结果使某位游戏者几乎每次都处于领先地位；只有在很少的情况下，才会改变领先的方向并变动方式，而这种情况的出现只能寄托于一枚表现好的硬币”[16]。

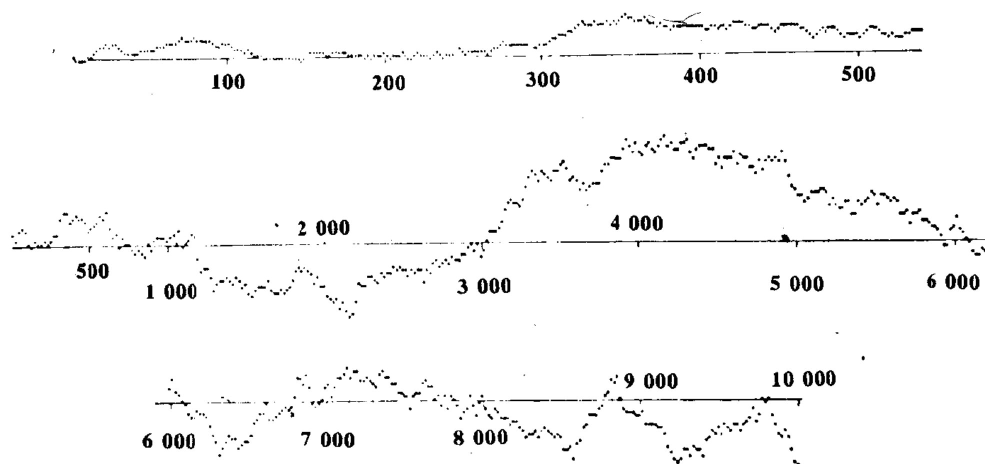


图 4.5　一个有名的随机行走的记录，它是描述赌博者在“抛掷”游戏中的输赢的模型。Feller 描述的这一随机行走，使曼德勃罗特产生了用分形维数描述一条直线上点的分布的想法[16,17]

现在读者们知道了，为什么失职的硬币与摇晃的醉汉在本章的标题中占据同等的地位。Feller 在评论上面记录的随机行走的态势时强调，大多数人对于依据什么判断随机行走的进程缺乏经验(或许，我们对很多心理学家对观测行为做出的解释也不能坚信不疑!)

图 4.5 中记录的随机行走对分形几何的问世曾起过重要作用。曼德勃罗特在其著作中谈到，60 年代曾有人请他研究数据传送线上产生的噪音信号。在研究传送线的噪音事件模式时（那种模式看起来与图 4.3（b）中的事件相似），曼德勃罗特记起了他曾在一本概率教科书中学习过的图 4.5[17]。他突然意识到自己正在研究的电话线上的噪音信号聚集，与图 4.5 对赢输的随机行走记录线与轴线交点的分布相似。曼德勃罗特告诉我们，在他看出诸如图 4.6 中的线上的点与直线上三分康托集的直观关系时，他领悟到了发展分数维的要点所在。三分康托集是著名的数学图形，是以德国的一位名为乔治・康托（1845－1918）的数学家的名字命名的。康托发展了数学领域中一个特别的分支，这一分支涉及无穷大数问题，比如，康托研究了在一条线上有多少点的问题。他认为，人们可以在不知道线的长度的情况下回答这一问题，答案是：“所有的线都有无数个连续的点”！数学家们宣称，两条长度不等的线包含相同数目的点——无数个点，这样的说法似乎违反常识。专家们对于一条直线上的点的数量争论不休的原因，将在本书的最后一章中谈到，那一章的标题是“分形几何的哲学影响”。在本章中，我们要找出的是这个问题的答案，“一条直线上有多少点？”，这取决于对于“一个点”你指的是什么。

为了理解曼德勃罗特怎样应用三分康托集，把分维数用于描述线上的点集的，让我们考虑下述情况。如果我们那位摇晃的醉汉，在一段无限长的时间内，在灯柱处前后徘

徊，那么可能发生什么呢？[18]。对于无限长的行走来说，与记录醉汉行走的时间轴相比，醉汉的步长就显得无限小；并且，记录了醉汉随机行走曲线图的时间上会有无数个点，这些点连在一起就形成一条一维的线。尽管代表醉汉到达灯柱次数的点集包含无数个点，但它是一个不相连点的集合，其线上的充填密度比形成该直线本身的无穷多点的充填密度要小。因此，虽然这些交叉点有无数个，却不能完全占满形成时间轴的所有点的位置，并且，可以用一个小于 1 的分维数来描述这些点的充填密度，它们代表着越过时间轴上的事件集合。曼德勃罗特这样描述直线上的点的充填：在构成维数小于 1 的康托尘时，这些点虽有无穷多个却不能形成一条连续的直线。

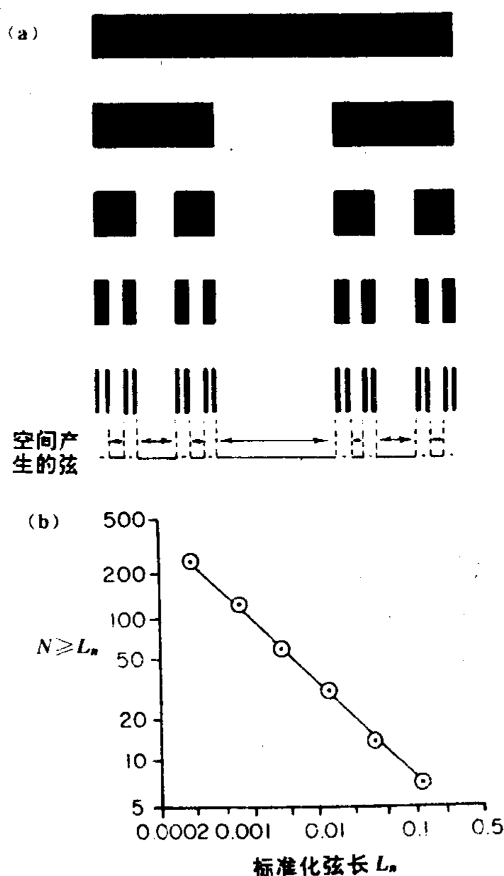


图 4.6　通过比较时间轴上的点集和三分康托集在一维空间的分布模式，曼德勃罗特以描述时间轴上由噪音信号产生的点的聚集情况。(a) 分数维为 0.63 三分康托点集的构造方法；(b) 三分康托集各点间距离的弦集，体现了弦长的分布特征

为了理解曼德勃罗特所指的康托尘的意义，我们考虑图 4.6 (a) 的情形。曼德勃罗特用这张图来描述在一维空间三分康托集的结构。为使康托集的结构形象而具体，曼德勃罗特请我们考虑下面这个理论实验：如果一位能力非凡的铁匠能把图中最上面的铁条砍成两段，并把这两段反复击打，直到它们只占据原来那块铁条 2/3 的空间，其结果会怎样呢？这样接连地锤打将增大铁条的密度，从而形成如图 4.6 (a) 自上而下的第二个图所示的体系。然后，铁匠重复这一系列的砍压过程，每一次剩下的铁条都被一分为二，再继续锤打，直到它们能占有原有铁条 2/3 的空间。图 4.6 (a) 即是这一砍压实验的过程示意图。曼德勃罗特认为，这一过程可以一直进行下去，直至：

“印刷机的字模或者视觉都到了无法再跟随这种压缩过程了，而这些金属小条最终会成为密度无限大而体积无限小的薄片”。

如果穿过图 4.6（a）底部的薄片集合画一条线，在图中的分辨率下，线上的点就代表康托描述的三分康托集中的无数多点。从理论上说，如果我们有无限高的分辨率的话，就可看出在直线的两端标记密度无限大的金属薄片的点有无穷多个。然而这些点之间也有可测出的空间，这正是它们充填在直线上的特征，从图 4.6（a）即可看出金属薄片间的间隔及其出现的次数。仍从理论上讲，可把记录金属薄片间隔长度的过程，一直延续到间隔变得无穷小而间隔数目变得无穷多为止。定义三分康托集的点的数目是无穷的，而这些点却不能把一条线充填到维数为 1，这一事实本身就是一个悖论。所谓悖论，即是某一陈述似乎是荒谬或自相矛盾的，但它却是或可能是真实的。

用集合理论的语言来说，我们把构成线上的三分康托集的点称为点的子集。康托集理论在数学上的悖论在于，一条线上有许多点的子集，它们包含无穷多个点，但这些子集却不能有效地占满空间以产生 1 维的线。既然计数线上的点，会使我们陷入无数个悖论中去，那么我们就从“数点”的研究，转向考虑点集占据直线空间的效率问题，比如，从数学推理上看，用 0.63 的维数去描述图 4.6 的康托集在线上占据的空间密度是很有用的，那条线若无限充填，它的维数就会为 1。

曼德勃罗特指出，三分康托集的结构过于规则，难以描述现实世界中的自然事件；不过，可以想象，如果将图 4.6（a）中的点的分布模式相互间随机化，就会得到与三分康托集有关的一个统计自相似的点集。曼德勃罗特曾证明，小于 1 的分形维数能描述传送线上噪音的分布情况。在应用科学中，当研究线性扫描时（线性扫描是用以探索更高维数空间的分数维的），就会出现小于 1 的分维数，对此我们将在第 6 章中做更详尽的论述。

曼德勃罗特首创了用康托尘描述直线上点的子集的方法。在曼德勃罗特在其分形几何著作中创造的所有专门名词中，康托尘是唯一我但愿曼德勃罗特先生不曾发明的一个。我对这个特殊术语缺少热情的原因在于：分形几何在微细粒科学的应用之一，就是利用康托点集的维数描述空气污染中尘云的结构，以及描述实验中沉积在过滤器上的灰尘。如同将在第六章论述的那样，可以穿过沉积灰尘画一条直线，线上所碰到的微粒点构成了康托尘，该康托尘可能与积灰尘的粒度分布有关。可见，在这个例子中，康托尘与积尘容易使人产生混淆，虽然两种“尘”的意义截然不同。不过，既然这一术语已经广为应用，我们也就随行就市吧。

曼德勃罗特给出康托集的点定义的弦集的概率分布函数为：

$$P\ (L>1)\ =1^{-D}$$

式中 P 为给定的弦长 L 大于或等于 1 的概率；D 为康托尘的分维数。

这一等式是决定康托尘维数试验技术的基础。考查图 4.6 中的康托尘，我们便可测出弦的长度分布，该弦定义了康托尘的点间距离。最长的弦为 L_1，其次是 L_2，第三长的是 L_3，以此类推。如果由康托尘定义的弦的概率是可由上述公式表示的类型，则在双对数图纸上绘出的弦（弦的长度等于或小于给定长 L）的数目分布曲线，是一条斜率为 $-D$ 的直线，D 为康托尘的分维数。

图 4.7 所绘的是图 4.3（a）中随机行走的弦长分布。由图可见，该分布是一条斜率

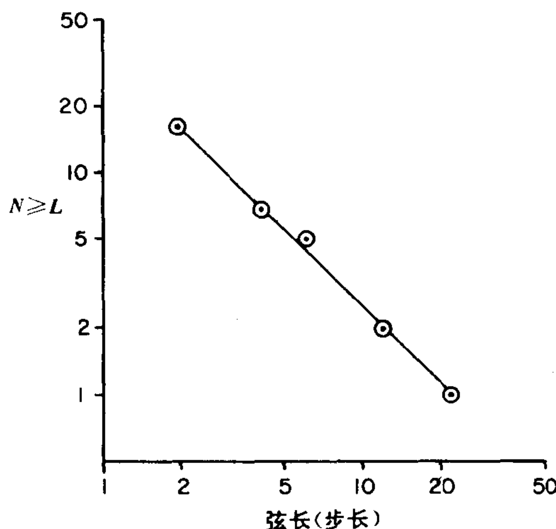


图 4.7　图 4.3 中醉汉回到灯柱的时间间隔的弦长分布，说明了测定一维空间康托尘分维数的方法

为 m 的直线。不过，因为由 50 步随机行走产生的弦的分布变化剧烈，把图 4.7 的直线的斜率解释为该线上点（这些点代表醉汉在灯柱处）的分维数的精确估计值并不可靠；也正是由于这个原因，应该产生相同数据线的图 4.4 中的数据，只产生了一根弦。因此，欲得到代表醉汉回到灯柱处这一事件的康托尘的分数维的可信估计，就需要有远远多于 50 步的随机行走。

很多学生可能会对明显的随机变量——在本例中是一维空间摇晃的醉汉——能产生可被标准数学函数（如图 4.7 所示的数据线类型）定义的弦集感到吃惊。希腊人对宇宙的观念是，在上帝使万物有序之前，事物都处于一种完全没有秩序的状态，他们称之为“混沌”。从某种观点看，我们可以把图 4.7 中的数据线称之为惊人的混沌模式之一。揭露混沌体系中存在未知的模式，是现代物理学的一个重要分支[19]。在希腊神话中，混沌的反义词是“有序（cosmos）”，研究宇宙如何生成的理论即是“宇宙论（cosmology）”（许多人都使用化妆品（cosmetics），然而，有谁知道该词的来源呢？原来，它的出处在于它能把人们脸上的“混沌”状态改变为“井然有序”）。在对分维数的探索中，我们会发现在明显混沌的系统中有几种惊人的模式。每当我们在明显的随机系统中偶然发现有序的模式时，总希望能找到为什么会在那个特别的系统中出现那种特别的模式，不过，有些时候，我们无法解释其中的原因，这时，人们只能先接受模式已被发现这一事实，并希望随着对系统更深入地理解，我们最终能对所观测到的模式的根源给出一个合理的解释。

图 4.3（a）和图 4.4 中的两个随机行走，即是数学家们称之为“马尔可夫链”的例子，“马尔可夫链”是根据俄国数学家 A. A. Markov（1856—1922）的名字命名的。一本数学字典上把马尔可夫过程描述为“一个未来由现在决定，且不依赖于过去的随机过程”。所以，醉汉的摇晃前进中，他每一时刻的移动方式（我们称之为当前的状态），与过去的状态无关。醉汉走的下一步不取决于他过去怎样摇晃，而是由概率决定的。不过图 4.3 和图 4.4 中的曲折线是他过去移动的记录，他在某个时刻所处的位置与他过去的移动有关。对马尔可夫过程结果的记录即是著名的马尔可夫链。

我们发现，每当事件的马尔可夫链存在，分形模式就有可能隐蔽在事件模式中。对摇晃醉汉这一例子来说，既然他的进行是一个马尔可夫链，那么，他全程的轨迹与零位移线的交集就形成了一个有分数维的康托尘。

如果不读轴上的标注，矿物工程师或冶金学家看到图 4.3（a）和图 4.4 时，可能会有 Rorschach（来自 Rorschach 测验，叫人解释十张墨水点画，以测验个性的方法——译者注）反应，以为自己是在看岩石或一块金属上裂纹的延伸情况。如果想确定裂纹构造的界限，他可以穿过裂纹画一条线，并用所形成的康托尘维数表征裂纹的构造特征。这两位工程师还有选择的余地，他们不需等裂缝穿过任意一条参考线，如零位移线，而只要通过裂缝的平均进度画一条直线就能确定裂缝的结构（我们将在第 10 章中讨论这种结构的分形描述）。

如果有人不加指点地把图 4.3 中的马尔可夫链拿给一位地理学家看，他的 Rorschach 反应可能是以为自己看到的是一片陆地的纵剖面，该剖面是用以描述这一区域的地形的。中心参考线之下的马尔可夫链看来象湖水的深度分布，而链的中心部分看起来象有二条或三条河谷的山区。曼德勃罗特告诉我们，他认识到描述随机行走的马尔可夫链与一片陆地的剖面之间的相似性后，紧接着，他通过在 2 维和 3 维空间的随机行走建立了一种程序，这种程序可以用来创造真实可视的风景和地理实体（见参考文献〔17〕，第 240 页）。

4.6 魔鬼的阶梯与晶体结构

如果画出图 4.6（a）中用于说明三分康托集结构的被压缩铁棒制成金属薄片的分布图，我们就构成了著名的魔鬼阶梯，如图 4.8 所示。假定初始铁棒的质量为 1，由于锤压

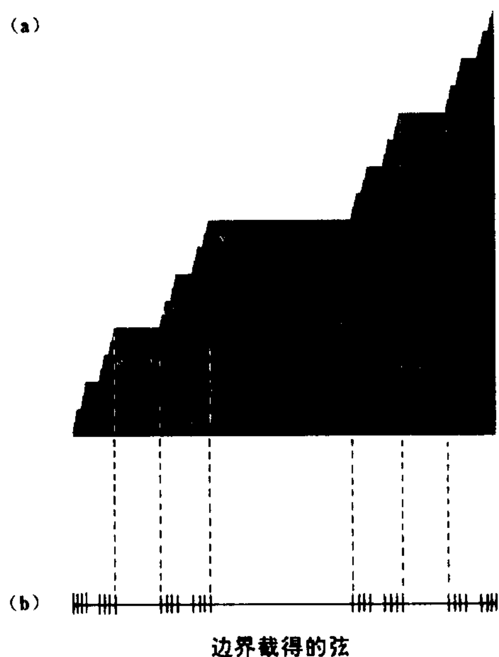


图 4.8 用使三分康托集形象化的金属薄片的质量分布图制成的魔鬼阶梯。该阶梯在高度上的增加是“无限多次、无限小的集团式跳跃，这些跳跃与金属薄片的质量相对应”；这一引号中的话定义了图 4.7 中的三分康托集（参考文献〔17〕，第 82 页）。(a) 魔鬼阶梯；(b) 识别晶体边界投影的边缘模式，可以产生康托尘，其分维数正是晶体结构的特征

已分离的金属薄片（这些小块使三分康托集更形象化），并不改变原始铁棒的质量，所以薄片的质量之和与铁棒初始质量相等。因此，若某人从定义三分康托集的薄片序列的一端开始累加薄片的质量到另一端时，他将得到质量总和为 1。在这一过程中，每当遇到的密度无限大的小块时，总质量必有微小增加，且增加的次数为无穷多次。因此，魔鬼阶梯中的阶梯数也是无限的。已经证明，定义魔鬼阶梯的无限跳跃的曲线，其有限长度为 2，维数为 1。曼德勃罗特在其著作中强调，魔鬼阶梯的轮廓曲线是连续的，但不可微分。

每本微积分的教科书中都有魔鬼阶梯的照片，它是提醒教师讲授微积分时，应向学生们说明自然界中的许多曲线并不是可微分的。

我对魔鬼阶梯的 Rorschach 反应是，它使我想起在很多基础物理教课书中的一种简图，该图是用来说明为什么拉长一根电线，超出其弹性极限时，电线的颜色会由亮变暗。受拉电线变暗的原因是：过度拉长的电线中的晶格界面相互滑移，从而产生粗糙的表面，这样的表面对光的反射能力比电线未变形前的表面降低了。

如果在冶金学或地理学上遇到看上去象魔鬼阶梯的晶界，就可以在一个边缘结构图的坐标轴上制作分形尘，也就是把边缘投影到横轴上得到康托尘，如图 4.8 (b) 所示。用这种方法形成的康托尘的维数，与被检测的锯齿状不可微分的晶体边界可能有某种联系。

4.7 弹球机与分形维数哲学意义之随想

我们可以认为图 4.3 (a) 和图 4.4 中的马尔可夫链，是应用蒙特卡洛程序模拟某一问题的第一步，这个问题是微粒专家们所感兴趣的。我们设想，图 4.3 (a) 中随机行走时间轴的零点，是灰尘微粒排向空气的烟囱出口。由于从实际烟道流出的微粒流，从远处看好像羽毛落向地面，所以我们称之为烟囱羽烟。假设当产生随机行走的紊流使微粒绕羽烟的时间轴弥散开时，有一股稳定的风沿羽烟的时间轴吹向微粒。

为模拟微粒在羽烟中的扩散，我们可以进行多次诸如图 4.3 (a) 和图 4.4 中那样的随机行走，然后把这些随机行走叠加起来，就能得出微粒在烟囱下风口任意给定距离的分布情况。当然，我们也可以用模拟计算机建立微粒的随机扩散的模型。在数字计算机中，变量是由数字表示的，系统的行为是用数字计算的；而在模拟计算机中，是用可模仿所研究系统物理行为的某种事物建立系统模型进行研究的。这种方法中，变量控制较易实行。在价格低廉的电子计算机问世之前，工程上的许多难题需要借助模拟计算机解决。比如借助电网电流的测量，模拟管网中的水流过程；模拟时将电线中的电阻设计成与管道对水流的阻力相似。模拟计算机在应用科学中的作用几乎因微型、大容量及超数字计算机的出现而黯然失色。不过，因为模拟计算机能使随机行走非常直观，所以用模拟计算机研究随机行走也有它的优势。

用模拟计算机研究微粒在羽烟中的扩散如图 4.9 所示。在一块倾斜的板上，对称地排列了一些图钉，板底部有一排挡板；钢球穿过图钉阵列，一次一个地落下，并允许堆积在挡板上。这种形式的板最早是由弗朗西斯·卡尔顿先生 (1822—1911) 设计的，他是进化论的创始人达尔文先生的堂弟，因而对遗传与智力之间可能存在的联系很感兴趣。卡尔顿在 1889 年写的一本名为《自然遗传》的著作中，对图 4.9 的这套系统进行了说明。

他把这一系统称为5点型板，这是因为骰子上数字5（拉丁语中数字5是quinque）的图案“∵”像钉子的图案[21]。堆积在5点型板底部的钢球形成的图形，可视为一条钟形曲线；若用羽烟的术语来说，钢球在5点型板底部的分布，可以描述微粒在羽烟断面上的浓度分布。请记住，在模型中我们允许钢球在5点型板底部堆积；而在实际的羽烟中，单个微粒要经受多次紊流扩散，而且所有的微粒都会同时出现在羽烟的横断面上[22,23]。

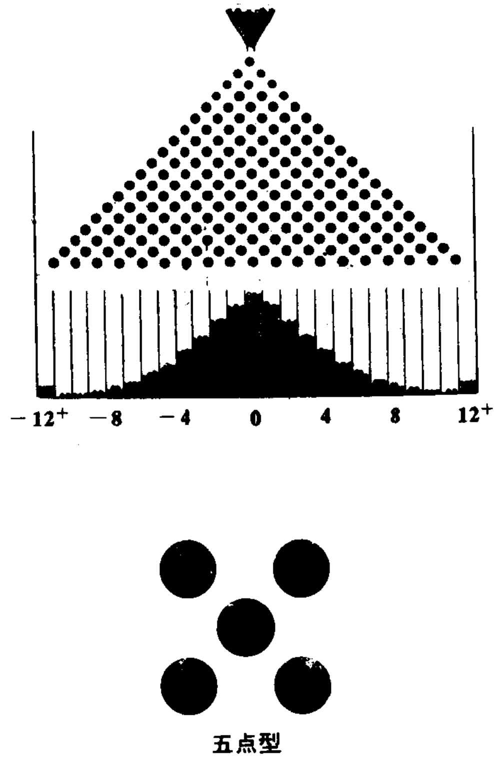


图4.9 可以在简单的模拟计算机上，用图钉和钢球模拟紊流羽烟中微粒的弥散

在应用科学研究的许多系统中，都有我们在简单模拟计算机中，用堆积钢球定义的这种“钟形曲线”。Warren Weaver在一本叫做《幸运女士》的书中告诉我们，这种曲线可用来描述：

（1）大群学生的智商测试结果；（2）炮火和投弹瞄准点的偏差；（3）新兵的高度；（4）烟草植物的叶子长度。

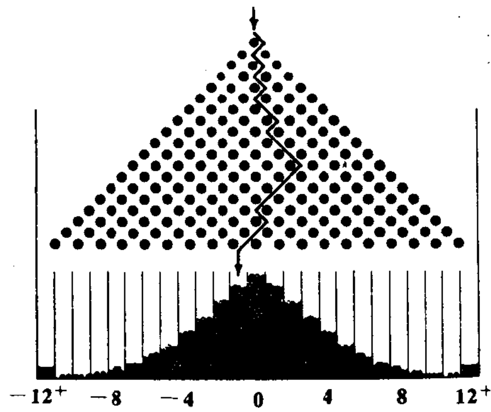


图4.10 可以认为，表示钢球落到5点型板底某一给定位置的下落轨道的马尔可夫链（如图所示），是由19层或19行图钉代表的19种原因造成的

因为钟形曲线在科学上经常出现，所以通常把这种曲线称为“正态（normal，意为“通常的”）分布曲线”。为了纪念数学家 Johann Carl Friedrich Gauss（1777－1855），正态概率曲线也称“高斯概率曲线”。钟形曲线的另一个名字是“算术概率曲线”。本书中，我们认为还是称“高斯概率曲线”为好。

现在让我们想一想，为什么卡尔顿会对这类模拟计算机饶有兴趣。可以想象一只钢球通过图钉点阵的情况。钢球遇到第一只图钉时，它既有向左运动的概率又有向右运动的概率，而向左还是向右取决于许多微小的因素：如钢球接近图钉时的角度，钢球的能量以及球和图钉自身的粗糙度等等。不过，在遇到第一只图钉而向左或向右反弹之后，钢球在板的下一层又会与另一只图钉发生完全独立的碰撞，且钢球向左或右运动的概率相等。某一单个钢球穿过图钉向下运动的情况如图 4.10 所示，该图是球向下穿过图钉时形成的完整的马尔可夫链的示例。从某种意义来说，钢球在图 4.10 的 5 点型板底部的最后位置，对于本例来说，可看作是由 19 次不同碰撞（或原因）决定的。由于每层图钉都可以认为是一组原因，因此，钢球的最终位置是由作用于球的 19 种因素的随机相互作用确定的。可以这样讲，5 点型板证明了这样一个事实：当许多微小的因素无序地也就是任意地相互作用而产生了一个物理变量的终值时，该变量的分布通常服从高斯分布函数。换一个角度说，就是由许多等强度的变量随机相互作用产生的一组观测值，为一条钟形曲线。尽管这样的表述并不常见，但是这种钟形曲线确实是发生于明显随机波动系统中的那些令人惊奇的模式之一。卡尔顿曾希望进行研究的一种智力遗传理论，说的是两个人的一群后代的智力水平服从高斯概率分布。5 点型板模型曾被用以研究这种“随机”形成的智力分布。很明显，5 点型板与娱乐场所的走廊中设置的弹球机类似。如果把图钉的位置稍稍加以随机化处理，则某个球落进弹球机底部给定槽中的概率就有可能不受影响。5 点型板所建立的模式证明，既然过多的随机量并不改变随机过程的统计性质，人们就可以对随机过程物理模型中的随机量数目加以限定。一个穿过对称图钉方阵随机运动的球，有充分的偶然性产生一个随机分布的变量；而且，人们显然可以有目的地改变图钉的位置，以“限定”球到达板底板的概率。图钉位置的这种非随机变化，可用于固定弹球机的输赢机会，以迎合赌博的需要。现实生活中没有所谓的机会定律，机会也不遵守任何定律。我们称之为机会定律的，其实是在混沌中隐藏的那些令人意外的模式，而在我们试图重复观测某一随机过程时，这些模式仍会令我们吃惊不已。为了证明实质上不存在什么原因会引起所谓的机会定律，让我们考虑 50 名学生课堂测验成绩分布的特点。决定学生在某次考试中的表现的因素，可能是下面若干原因的综合：

（1）学生天生的智力状况；

（2）学生对考试课目的兴趣；

（3）教师对待测验概念的授课情况；

（4）学生头脑的清醒程度（看午夜电视会对学生的表现起到消极作用）；

（5）所考问题是否清楚；

（6）考试时学生情绪的稳定程度。

这些作用于许多孩子身上的诸多微小的因素，会使每个学生有一个分数，把他们的成绩绘制成图就是一条钟形曲线。不过，这一分布函数只能用于描述一组学生当时所达

到的水平，而不能预测他们中的每个人将来的表现。部分或所有上述原因，都可能改变某个学生在班中的排名，或使所有学生的名次都发生相当大的变动。在两个连续的学期中，我曾从学校同年级的 82 名学生中的最后几名一跃到前几名，但我不认为学期间的一个假期就会对我的智力有所改变。

一些教育家似乎被钟形曲线迷惑住了，他们甚至不再运用自身的判断力去衡量学生的表现了，而他们的判断实际上是至关重要的。某学期，我们学校另一个系请我讲授一门“科学技术对社会的影响”的课，那一回，我对错误应用钟形曲线给学生评分的作法有了一次切身体会。那是一门选修课，我教的班共有 16 名学生，如果哪个学生估计自己这门课不能取得好成绩，就可以在学期刚开始时退出。那么，实际上，这部分退出的学生就削去了钟形曲线的较低一端，而有的人可能还幻想着曲线仍能说明学生的情况呢！在上交学生成绩时，我给班上 5 名学生的成绩打了“A”，而该系的系主任却告诉我，按这个班的规模只允许一名学生得 A，他将依据钟形曲线调整成绩。最终的结果是，学生的平均成绩被下调了 10%。我强烈抗议这样不恰当地使用钟形曲线，并向他指出，假如课程开始学生们就知道全班只有一个“A”，会对鼓励全班学生力争好成绩起反作用。

我还指出，如果他们坚持用钟形曲线，那就永远无法证明经过教学努力后，学生的质量是否有所提高。然而，由于我的意见没能改变系主任的态度，我就不得不绕着弯子地向他说明概率的不严谨问题，因为我觉得自己也许是一位教得也不错的好老师，学生们理应得到更好的成绩。不过，这最后的争辩又彻底失败了，这位系主任下定决心要做现代的普罗克拉斯提斯。普罗克拉斯提斯是希腊神话中的一位人物，他在雅典郊外开了一个旅店。如果你下榻到他的旅店后，当晚你会受到免费友好的款待，不过，没人向你提起，要得到这种款待，你必须完全适合旅店里的床。如果你比床稍长，他们就砍去你躯体中长出床的部分，使你身体的长度与床很好地符合。相反，如果你比床短，他们就把你放在架子上拉长，直到你的长度与床长相同（普罗克拉斯提斯在希腊语中的意思就是“负责拉长的人”，这名字与我们给那些从剧场里撵走捣乱分子或从小酒店和俱乐部里把那些好吵闹的家伙驱逐出去的保镖、保安这类现代人物起的名字相仿）。我认为应该为使用钟形曲线给学生评分的教师提供一周免费假期，让他们在由当今的普罗克拉斯提斯开的汽车旅馆里住上一住；而且，我特别地要给改变我的学生分数的那位系主任请求一次这样的优待。

在解释数据时，我们偶尔也会用到做为形容词的普罗克拉斯提斯。例如，普罗克拉斯提斯装置，就是通过强行处理而达到均一性的装置。很多图形的纵坐标和横坐标建立的刻度不标准，于是就在表示数据点时强求一致（procrustean）。在一些分维数的研究中，研究者是从什么样的分数维应该适合给定的自然边界这样的先入之见开始的，然后，有时便强行调整数据，以适合所需的分维数，而明智的应用科学家会采用这样的策略．他会使一个具有分形结构的系统体现它固有的分维数，而后对预计的和测出的分维数之间差别的本质意义，谋求进一步的理解，而不是强使所得的数据与预想的相吻合。

图 4.9 引自于 Lyman Parratt 的一本书中关于实验误差的论述部分[22]。Lyman Parratt 利用图 4.9 中的数据讨论了这样一个实验事实：物理测量中的误差通常都是服从高斯分布的。遗憾的是，在讨论准确性与精确性时，他常常使用“误差”一词，尽管这时

使用“不确定性”可能更好些；同样，在日常用语中，准确性与精确性也经常是交替使用的，虽然这两个词的意义有着显著的不同。物理量数值估计的精确性是指反复测量时可能发生的偏差，是测量过程极限的估计。例如在我们前面讨论过的学生用螺旋测微器测量电线直径的简单实验中，如果测出直径的平均值是 1.02mm，这一说法的精确性在于：电线直径的平均值介于 1.01 与 1.03 之间，因为我们知道这种测量方法精确到小数点后面两位，尽管 1.02 的提法已经足够精确，但是，如果螺旋测径器只校准到 1/10 英寸，而没有对毫米进行校准，而且学生又误读了刻度，那么，测出的值虽然可以说是精确是，但并不是准确的。标明英寸而不是毫米是一个误差，测量值合乎于 1.01 到 1.03 之间算不上误差，而只是测量中的不确定性或缺乏测量精确性的结果。如果我们把这些学生对电线直径测量所得的 20 个结果制成表，不确定性的范围多半可用钟形曲线来描述。由钟形曲线表示的不确定性的原因可能有二：首先，每次微小的测量都有小范围的不精确；其次，如前所述，由于很多学生都测量过这段电线，也许已经在电线的不同位置产生了相应的直径范围，这样，直径的测出值的某些不确定性就表示了电线直径的实际偏差。至少有二种原因可使 20 名学生的测得值的范围有变化：

(1) 测量精确性不够；

(2) 由于直径自身随位置变化，因此，对于“电线的直径是多少”，这样的问题无法直接回答。

“误差”一词起源于一个意为“从一个位置游离开”的拉丁语。在研究者无法精确而且准确地估计一个给定量的值时，“误差”就留给不确定性了。“不确定性”用于描述数值的某个范围，这个范围也许与被测对象的实际偏差有关。应用科学中对数据的重要处理过程之一，就是检验实验所得值的范围并将误差与不确定性区别开来。某一提出的测量结果，因为存在误差或被测物理量的实际波动，会有缺乏精确性和不确定性的问题，人们应能清楚地区分两者，并能定量地对其予以表述。新生们经常用“烹饪书”上的方式（即机械地逐条照办——译者注）学习处理实验数据的统计方法，就是说，尽管他们学会了如何计算平均值和标准偏差，但实质上对统计推断的方法还是不能应用自如。Parratt 谈到，科学家们通常对概率模式缺乏基本理解，因此他们在自己的领域内常会有“精神上不舒服”的感觉；这样的科学家所描绘的科学，很难与人类社会的其它活动和知识完全吻合。区别变量的固有偏差与测量数据的实验误差，对于测量一个系统的分维数是非常重要的。构造一个边长为 λ 的多边形去估计一个粗糙的微粒轮廓的周边长度时，测量该多边形的精确度可能比较高。但是，由于边长为 λ 的实际多边形的结构会随构造多边形起始点的位置而发生相当大的变化，这样，λ 一定时的周长估计范围就会偏大。这一周长估计的偏差，并不是由于误差或缺乏精确性，而其实是不平边界的反映。特别是对于曲折边界的粗分辨率考查结果来说，给定步长下的周长估计偏差与边界的分维数有关。

在教了几届学生有关物理系统的统计描述的技术及给定系统分形维数的偏差估计之后，我得出这样一个结论：学生们对于浑沌中的隐藏的那些惊人的模式感到不舒服，这是因为他们未能辨别科学的叙述性的定律与确定性的定律之间的不同。哲学家们一直在辩论为什么西方科学会在 17 世纪奇迹般地繁荣起来，不过，在这一点上他们的观点基本上是一致的，即现代科学发展的一个重要因素，是人类不再相信世界上的事情是诸神的

反复无常的行为的体现。当人开始认为宇宙只是一个神的理性的行为体现之后，人类开始寻求并发现了这种行为的秩序（或者，用某些无神论者的话说，人类自认为“发现”了它）。因此，象伽利略、开普勒和牛顿这样的虔诚的宗教信徒，他们是通过对宇宙秩序的探索，求得对神的行为的了解的。开普勒是被迫发展他的行星椭圆轨道原理的，因为在他准确测量行星轨道并检验轨道为圆形的假说时，他发现呈直角正交的轨道直径有 2% 的偏差，这或许是一个使大多数学生感到自我安慰的量！开普勒说，他寻找行星轨道的另一几何结构的动力是“上帝不制作坏圆”，而正是这一动力导致了行星运动椭圆轨道的发现！

过去近三个多世纪的科学进步，已经改变了不向学生们讲授宇宙结构的哲学观点。学生们被直接或间接地告知，人们在这个世界上所见的一切都是因果关系的体现；灌输给学生们的是，牛顿创立的三大运动定律支配着这个世界，而且每一个结果必有其原因。因此，学生们自然就乐于接受牛顿运动定律，即质量和速度与力的关系了。牛顿定律是一个确定性定律，其确定性在于：如果我们给球一个已知大小的力，同时知道飞行的条件，那么球的飞行就由其周围的条件决定了。学生在察看微粒在羽烟中的分布时会发现，某特定微粒在经历了马尔可夫链运动之后，其位置就无法预测了，于是他会为单个微粒运动的缺乏确定性而不安。他所受的训练就是找出事物之间的因果关系，于是他对钟形曲线自然地感到别扭，因为在使用“可能性描述”时，他必须放弃“因果”决定论。

法律界是很难容纳概率论的，因为法律是建立在“有罪”或“无罪”这两个简单的选择之上的。一位审讯律师曾来问我，“石棉会致癌吗?”，我对他说：“会，也不会”。之所以这样说是因为，某些种类的石棉，对某些人、在某些场合下会致癌。当时这位律师的脸上露出迷惑的神情，他被石棉纤维与癌症之间不存在简单的因果关系搞糊涂了[24]。

如果我们坚持辨别确定性与说明性之间的区别，就可以避免哲学上的不安，这种不安经常在介绍概率模式的研究之初就随之而来了。一个物理变量可以用高斯分布描述，但二者之间的这种关系并不能决定系统的行为，而只是说明了观测行为的结果。比如，钟形曲线只能用来描述学生的分数，而对于没有强求一致思想的教师来说，曲线并不能决定学生们的成绩。

许多物理专业的学生对“量子力学”的课程感到吃力。因为他们开始接触这门学科之前，他们的头脑中已经灌满了力学的预见性定律。而在量子力学中，不存在完全的确定性，学生们会发现自己必须应付的是一种可能的关系；而目前的知识水平，还不能给这种关系一个合乎逻辑的解释。例如，数百万个光子穿过狭缝时产生的事件模式，就形成了我们称为衍射图的能量分布。学生们通过衍射图中实测的能量分布时感到困惑，因为他们认为自己应该能理解这种图，就像他们能理解用网球拍击球时球的运动一样。而事实上，量子力学中的关系式不是由预见定律得出的，而是观测到的行为模式，这种模式通常不符合人们由直觉得出的理解。

科学家们自身对于量子力学的说明性关系式的确定含义就有分歧。一些科学家认为，量子力学中的关系式与随机过程中混沌的惊人模式类似，而且，量子力学中的关系式正说明宇宙从整体来说是一大碗随机汤。

另一些科学家则认为，描述光子穿过狭缝运动的关系式，对实际情形的刻划很有限，

他们还要继续对此进行研究，直到对单个光子的运动有更深刻的预见性的理解。因此，对这些科学家来说，随机的描述只是一种暂时的权宜之计。愿意接受后一种想法的人，更关心量子力学的哲学蕴意，要把事实的本质找出来，这正是爱因斯坦的主张。爱因斯坦拒绝相信宇宙是一大碗随机汤的论调，并对此发表过一句著名的评论："上帝不与宇宙玩掷骰子的游戏"。爱因斯坦的宇宙观，是在观测到的行为模式下面，隐藏着理性创立的宇宙中尚未发现的原因。林肯·巴尼特在一本爱因斯坦的传记中写道：

"爱因斯坦不止一次地表示过，他希望能够证明，量子力学的统计方法是一种权宜之计"。

那些相信"机会定律"支配着宇宙的人，在思想上又回到了文艺复兴前的宿命论者中去了。宿命论者相信，世间万物都是诸神（不管是什么神）反复无常意志的体现。

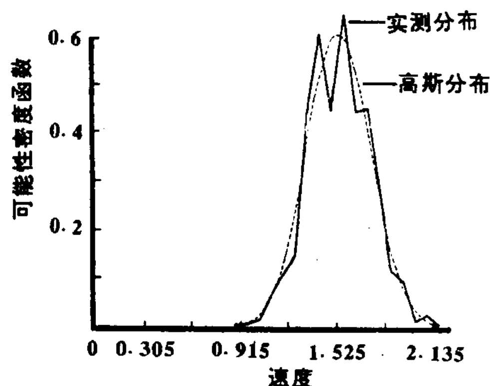


图 4.11　汉德尔森对学生随意散步的研究数据，表明钟形曲线表示的一种有用的说明性关系

汉德尔森已经发表了一些有关随机行走的有意思的数据，这些数据说明了说明性关系与预见性定律之间的区别[27]。汉德尔森研究了在澳大利亚的悉尼附近散步的几组人群，其中一组是在悉尼大学图书馆外的人行道上行走的大学生，他对此的研究数据如图4.11所示。由图可见，被研究的639名学生的速度分布近似一个钟形曲线，并可由高斯分布函数予以描述。不过，这一关系并不能说明某个学生以某个特定速度运动的原因。如果我们进一步假设，学生们正在人行路上被一只饿虎追赶，他们新的速度分布也许仍服从高斯分布函数，但可以肯定地说，这次运动的平均速度比图4.1中的平均速度大，那么新的速度分布就与汉德尔森观测的不同，这是因为有新的外界因素作用于学生的缘故。事实上，在观测学生的运动时，测出的学生速度的骤然增加，也许就是找到那到处漫游的老虎的途径之一！

分维数与高斯分布有许多共同之处：首先，可由分维数描述的结构，其构造方式通常可用随机行走的过程模拟；可由分形描述的系统边界，一般是由许多相对平等的因素间相互随机作用形成的；其次，与高斯分布一样，用来描述系统特征的分维数，体现的不是确定性的而是说明性的关系。倘若产生分形结构的基本原因间的相互作用发生变化，就会明显改变分维数的值（参见第5.3节，关于静电力对模拟碳墨聚团结构的影响的讨论）。

用于表示物理结构特性的分维数的功用在于：首先，它具有说明和描述功能；其次，分维数的大小，为关心相互作用的原因（这些原因产生了我们观测到的现象）类型的研

究者提供了线索。

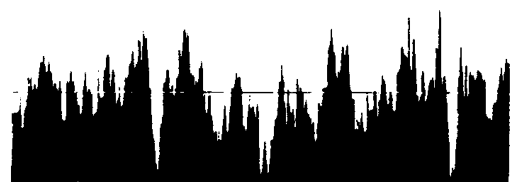
有时候，尽管我们能够理解在总体中每一个体发生的潜在原因，但是对于某一特定的研究目的而言，详细研究单体发生的原因对于正在探讨的那个问题并不恰当，这种情况就会用到高斯分布或其它概率分布模型。比如，如果要为军队提供军服，我们只要了解士兵身材的概率分布情况，就能给各身材组的士兵提供尺码合适的军服。假如某人是单件军服的服装设计师，可以对每个士兵进行调查以确定他们的高矮尺寸，并为每个人设计一套定做的军服。但是，对军服制造商整体来说，每一位士兵的身材尺寸并不是他们的兴趣所在。

同样道理，通过分维数对数据进行描述有时是大有益处的，否则，这些数据会使研究者陷入困境。例如，在着手研究多孔体结构时，我们发现，一方面，我们可以搜集到有关多孔体中不同孔穴的个数及大小的各种资料；另一方面，在某些情况下，我们可用一个介于 2 维与 3 维之间的分维数表征多孔体的孔隙情况。有迹象表明，使用这种分维数相当有利，它使我们得以与其他人方便地讨论孔体的结构，而无需淹没在上百万个孔隙的亿万个数据之中。

图 4.12 是一些有趣的轮廓图，它们可以说明分形边界是如何由诸多原因的相互作用而产生的。图（a）是用轮廓曲线仪测得的氧化铝片的表面轮廓，这种氧化铝是由生产厂家提供的。轮廓曲线仪是一种定量检测粗糙表面结构的仪器，安在仪器活动臂一端的针沿着表面移动，并把这种上下运动经放大后记录下来。由轮廓曲线仪检测显示出的原始



(a)喷砂前



(b)喷砂 1 分钟后



(c)喷砂 5 分钟后

图 4.12　喷砂可引起表面粗糙度的增大。许多锋利的砂粒碰撞到氧化铝片表面，会从上面挖去一些小碎屑，在诸多小因素的相互作用下，形成了具有分形结构的表面轮廓

表面的最高处与最深处相差 13μm，而相邻两个凸峰之间的凹槽的深度都小于这一数据，而且没有远大于 2－3μm 的，后者接近可见光波长的 6 倍。这样的光滑度虽不及镜面的那

么高，看上去也称得上是“闪闪发光”了。

用轮廓曲线仪“制造”出来的氧化铝片的界面分数维示于图 4.13 中的折线 A，在检测中利用了腐蚀——膨胀处理方法。折线 A 看来有二个分形结构区。低分辨率区的分维数为 1.28，高分辨率区则为 1.18。

同一平面喷砂 1 分钟后的形状如图 4.12（b）。请注意，该图由轮廓曲线仪确定的描述表面凸凹高度的线性刻度与图 4.12（a）中的不同。为研究粗糙表面的类型，我们没有采用表面绝对粗糙度，而是调整了图 4.12（a）、（b）和（c）中图形的放大倍数，使之在三种情况下，粗糙表面上的凸凹最大高度与最大深度之间的距离相等。

进行 1 分种表面喷砂后，用轮廓曲线仪检测，经膨胀法处理的理查德森曲线示于图 4.13 的折线 B。可见，表征粗糙度的分维数在低分辨率时增加到平均值为 1.35，而在高分辨率下则从原来的 1.18 增加到 1.25，换言之，不仅绝对粗糙度变化了，表面的分维数也增加了。我们可以把由喷砂造成的粗糙表面，看作是许多原因相互随机作用的结果。每个高速度碰撞氧化铝表面的锋利的砂粒，都能从表面划去一小片金属，使表面变得更粗糙；而在微粒未撞击氧化铝表面之前，这一作用在表面上是不存在的。1 分钟喷砂后的轮廓曲线仪轨迹，是小微粒几千次随机碰撞表面并发生挖凿作用的总效果的图像记录。因此，粗糙表面的分维数在低分辨率下从 1.28 到 1.35 的变化，是由许多微粒的随机相互作用造成的，这些微粒从喷砂设备的喷头出来以后便随机行走，然后碰撞到氧化铝表面上并刮走表面处的物质。

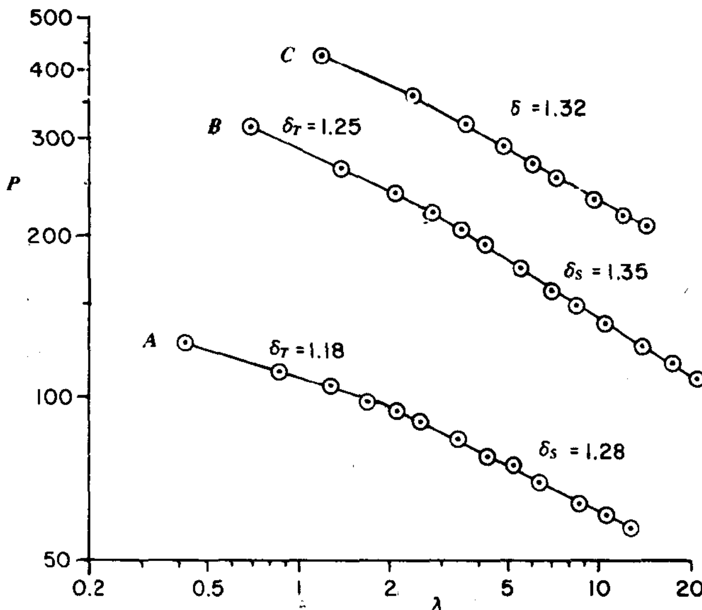


图 4.13　膨胀法可定量表示出图 4.12 中的凸凹不平边界的分维数[26,27]

图 4.12（c）是表面喷砂 5 分钟后的轮廓曲线仪的检测结果。可见，绝对粗糙度又增加了。但是，氧化铝片表面的分维数却实际上略有降低，而且也不再有二个结构区了（见图 4.13 的直线 C）。这一结果可能与下述事实相呼应：在喷砂作用中，达到一定的粗糙度之后，轮廓的实际分维数就接近于常数，其原因是任一时刻形成的任一尖峰都可能被随后另一微粒撞击表面的挖凿作用切削掉，因此，尽管喷砂对表面的不断侵蚀会使绝

对粗糙度逐渐增大，但由于粗糙度是由随机过程（喷砂）的事件模式决定的，所以分维数描述的粗糙度表面结构便可基本保持不变[25,26]。

图 4.14 是一块新断开的岩石表面轮廓曲线仪跟踪检测的轨迹和分形特征。目前，人们正致力于把新破碎的岩石边界的分形描述与新产生的粉尘对健康的危害，以及岩石裂隙的扩展（产生岩石碎片的原因）联系起来。

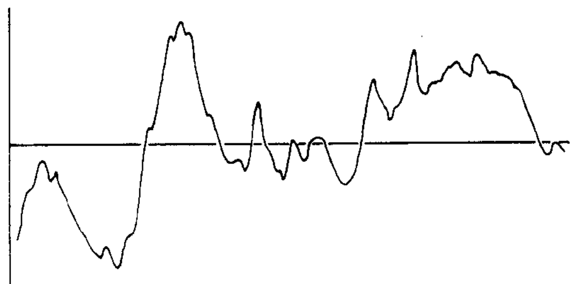


图 4.14 新断裂岩石的轮廓曲线仪检测结果，此迹线表明分形结构可能与母岩断裂生成岩石碎片的裂隙构造有关[24]

4.8 具有分形边界的羽烟

工厂烟囱排放的“羽烟”微粒的扩散形式，是污染控制工程要研究的一个重要方面之一。在模拟羽烟扩散时，工程师们一般都要指明扩散的羽烟与从烟囱顶部画出的与地面平行的水平线之间的夹角。还要标明羽烟从烟囱排出后因扩散变宽而形成的锥角，而且假设，无论羽烟离开烟囱多远，其内的浓度可用高斯分布函数予以描述。至于羽烟的曲折边缘常是计算机模拟羽烟弥散时略去的细节；而实际的羽烟边界呈现波浪状，这是由于热的烟尘与其周围的冷空气发生紊流相互作用的缘故。图 4.15 就是边缘为锯齿状的实际羽烟。

世界上最大的烟囱，位于加拿大安大略省的 Sudbury 市的国际镍业有限公司的加工厂内，从 Laurentian 大学能清楚地看见从这个烟囱排出的羽烟。在该大学上分形几何课的学生们进行的实验研究之一，就是拍摄下该烟囱排出的羽烟并测量其边界的分维数。有些天，羽烟两侧的波动是对称的；而在拍摄图 4.15 那天，羽烟下面的边界几乎是笔直的，而羽烟上部的边界则波动较大。图 4.15 给出了应用构造步长技术测出的羽烟二侧边界的分维数。对于每一侧凸凹不平边界的边长估计值，相对于一条通过凸凹边界的中心线进行了规一化处理，如图 4.15 所示。我们希望此方法最终能把羽烟边界的紊流与天气情况联系起来，并有助于进一步理解影响羽烟扩散的内在动力。

4.9 高斯图纸、分形分布与脂粉中的大象

在分形系统的讨论中，用与我们熟悉的钟形曲线形式不同的一种高斯分布描述数据，常常是很有助益的。比如，我们假设，五点型板底部槽中的球的个数代表 Oz 国 Munchkin 部队新兵的身高，进一步计算士兵中身高低于或等于一给定高度的人数，我们便可得到一套数据，图 4.16 (a) 就是根据这组数据绘制的曲线图形。这一类曲线在数学上称为拱形曲线。拱形是阿拉伯人用来形容许多伊斯兰寺院的尖顶形状的。这所以把这种曲线称

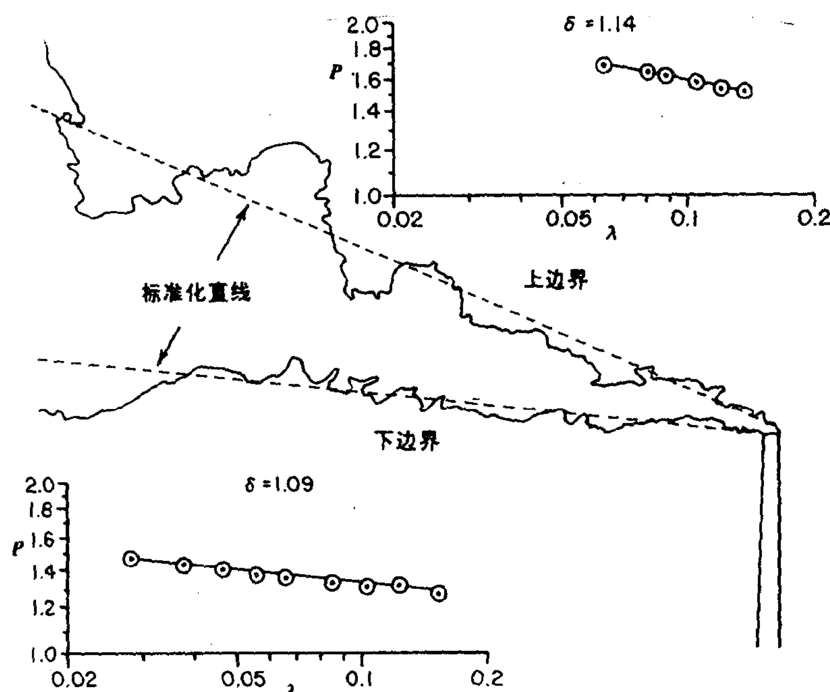


图 4.15　工厂烟囱排放的羽烟边界与其周围空气相互间有紊动作用，这种相互作用形成的边界具有分形结构。根据天气情况，羽烟两侧的分形结构可能相同也可能不同

为拱形曲线．是因为把它与其在镜中的影像相结合，看起来就像阿拉伯寺庙的圆顶。

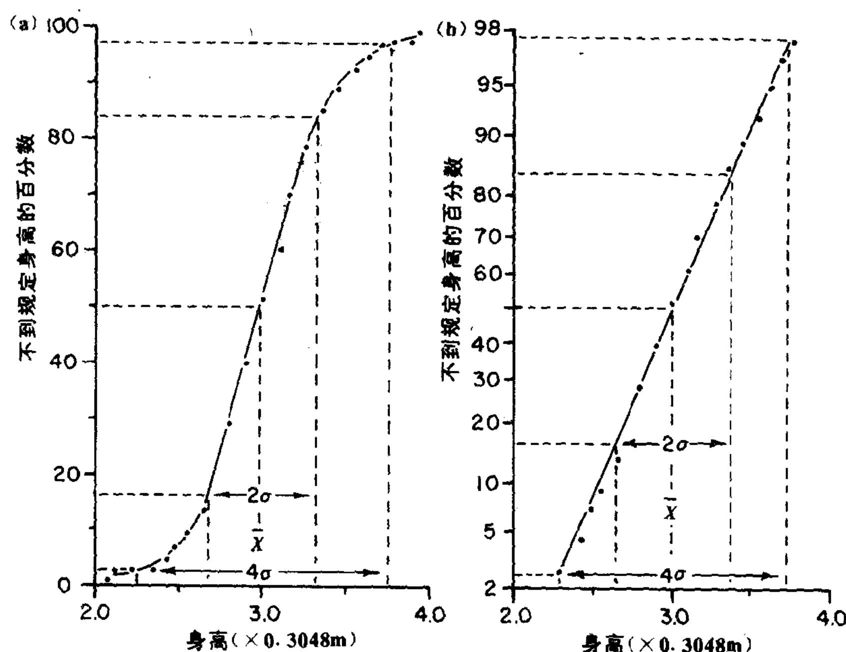


图 4.16　Oz 国士兵的身高可能符合高斯分布。(a) 低于或等于给定身高的士兵的分布为一条拱形曲线；(b) 在高斯概率图纸上，Munchkin 士兵低于或等于给定身高的分布为一条直线

图 4.16 (a) 的拱形数据曲线是一个负累积频率分布函数。由于在自然界中，经常会遇到高斯分布曲线，所以，数学家们设计了一种特殊形式的图纸，其百分数轴在数学上

是失真的；在这种用数学方法拉长了的图纸上，拱形曲线变成了一条直线。这种图纸就是著名的概率计算纸，或称高斯概率计算纸，也有叫算术概率纸的。喜欢简短术语的工程师们干脆称之为概率纸，并把数学上描述的概率标度叫做概率单位标度（Probit scale）。在本书中，我们使用高斯概率纸这一名称。

若把 Munchkin 士兵的身高分布描在高斯概率图纸上，则得到图 4.16（b）。在本书第 3 章中，我们曾讨论过一堆岩石细粒的分形边界，这堆岩石是从碎后矿石中将有价矿物回收后留下来的尾矿。在那一章中，我们没有讨论尾矿的分形边界范围，只是把边界分形简单地引用在每个轮廓线旁。由于边界分形的变化是许多微小原因的相互作用引起的，因此，有理由认为，不同尾矿微粒所表现的分形频率分布可能是高斯分布的。图 4.17 是计算出的尾矿颗粒分维数的分布，纵坐标上的标度是分维数小于或等于给定值的颗粒负累积百分数，而横坐标则与图 4.16（b）的标度形式相同。这说明，有可能用高斯概率分布函数描述一堆破碎后岩石的分维数范围。以这种频率分布给出的平均分维数及分形范围，可能有助于工程师们理解岩石碎片是如何形成的。不过，需要提醒读者的是，解释在高斯概率图纸上的点在数据线附近的散布，并非一件非常容易的事，没有经验的学生不应做此尝试。我们不能象对待一般图纸上散布的点那样，对待高斯概率图纸上在数据两端散布的点。在高斯概率纸上，中心点比两端的点包含更多的信息，两端的点代表的是罕见的事件。

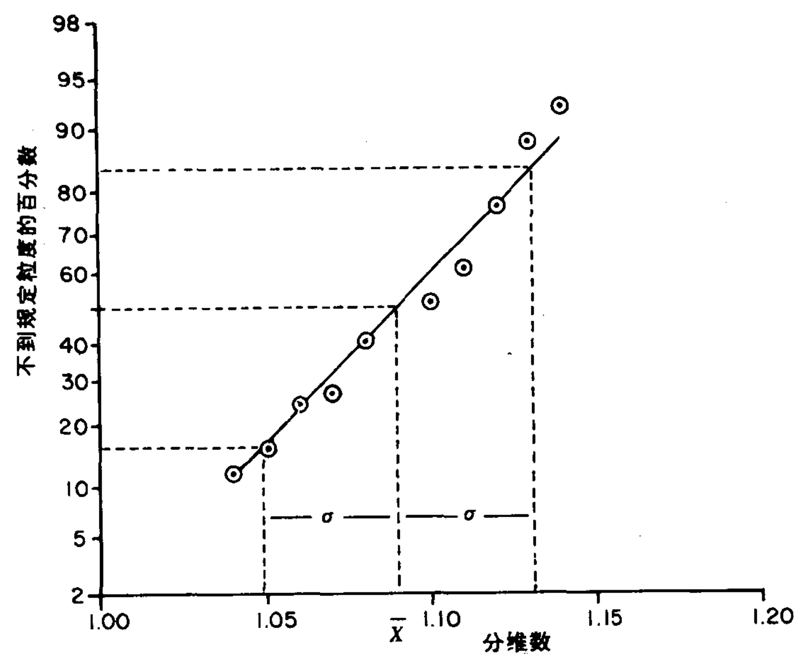


图 4.17 在高斯概率纸上画出的尾矿颗粒的分形边界范围

并不是微粒群体的所有分形变化都可用高斯概率分布描述。在后面的章节中，我们将有机会涉及用一种完全不同的概率分布描述微粒群的分形变化的问题。

在第 2 章中，我们讨论过理查德森标绘图的数据关系结构，并且警示读者，外推用于绘图法处理数据是不可靠的。由于在高斯概率纸上，超过两端数据点的外推也会产生令人不可思议的悖论，所以，任何人都无需在图纸的概率刻度上标出 0%或 100%。但在

理论上，可以使概率刻度在两端上无限延长，以显示无限罕有事件的数据；而且，有时把数据点信息外推至罕见事件的领域是很有助益的，不过，任何范围的外推都应根据实际情况来检验。

为了说明对高斯概率纸的外推处理过于热心的危险性，在讲述概率图纸的应用时，我曾提醒学生们对照“在粉饼盒中出现大象的概率”的悖论。这一悖论会发生于一些用作化妆品的粉末尺寸分布可由高斯频率分布描述的时候。把脂粉颗粒的尺寸分布标绘在高斯概率纸上，并把这一分布曲线外推到较大颗粒的概率范围，我们就有可能发现在脂粉盒中有一头“大象”！尽管这样的机会非常少，但肯定是有的（所谓脂粉盒中的“大象”，就是当把高斯概率分布曲线外推到大颗粒一端时，即使颗粒大得像一头大象，也可推断其存在——译者注）。

实际上，就脂粉制造技术来说，一般都采用了分级工艺，以确保在脂粉中不存在大于 30μm 的颗粒；否则，就会在脸上留下一道战争痕迹（这是对脂粉中的大颗粒可能擦伤脸部的体面说法）。所以，尽管对脂粉颗粒的概率分布的外推表明，出现比 30μm 大的颗粒的概率仍然存在，但由于采用了把大于 30μm 的颗粒从脂粉中分离出去的物理过程，就使得超过 30μm 的外推区域对实际数据成了禁区（换言之，化妆品工厂中所有的“大象”都已从脂粉中牵走了！）

学生们很喜欢“脂粉盒中的大象”这样的悖论是可以理解的，但我却在微粒技术中真碰到过这样的问题。有些科学家试图解释外推数据的隐含意义，但却没有将他们的理论与实际相对照，于是就出现了与“脂粉盒中的大象”同样离奇的预言。考查图 4.17 中的分形频率分布可见，颗粒边界的任何实际分形，都既不能被外推到小于维数 1 之外，也不能外推到大于维数 2 的区域。对高斯概率纸上的任何描述边界分形频率分布的数据关系的外推预测，都必须根据实际情况进行校核。

如前所述，讨论一组数据的平均值所含的有限的信息时，对这组数据值的范围的估计，一般都给出一个计算量，即通常所说的标准偏差。尽管在统计学的标准教课书中，都有计算这个量的数学方法，不过，因为只根据高斯概率纸上的数据线，就能很快地算出一组数据的标准偏差的估计值，所以，这种计算的数学过程就没什么价值了。可以证明，如果数据为高斯分布，那么所有数据点的 95%都在 4 倍数据平均值的标准偏差范围内（即 95%的数据在$\overline{X}\pm 4\delta$ 范围之内——译者注）。如果我们在高斯概率纸上，将 2.5%～97.5%的范围标注出来，并用 4 去除在该限度内相应变量的变化范围，我们就可以得到一个很好的标准偏差的估计值（参见图 4.16 (b) ——译者注）因此，有关 Munchkin 士兵的身高问题，我们可以说士兵的平均身高为$\overline{X}\pm\delta$，这里$\overline{X}$是士兵的算术平均身高，δ 为标准偏差。

参考文献

[1] T.C. Collocott (Ed.), "Chambers Dictionary of Science and Technology," Chambers., Edinburgh., 1971.
[2] A.M. Macdonald (Ed.), "Chambers Etymological English Dictionary," Chambers., Edinburgh, 1912.
[3] Rand Corp., "A Million Random Digits with 100 000 Normal Deviates," Free Press Publishers, Glencoe, IL, 1952.
[4] See, for example, the discussion of techniques for generating random numbers given in Yu. A. Shreider (Ed.), "The Monte Carlo Method. The Method of Statistical Trials," Pergamon Press, Oxford, 1966.
[5] See, for example, the discussion of the word "average" in M.J. Moroney, "Facts from Figures," Penguin Books, Harmondsworth, 3rd ed., England, third ed., 1956.
[6] M.G. Kendall, *Biometrica*, 43 (1956) 1.
[7] E.W. Montroll and M.F. Schlesinger, "On the Wonderful World of Random Walks," J.L. Lebowitz and E.W. Montroll (Eds.), in "Non-Equilibrium Phenomena," Part 2 of "Stochastics in Hydrodynamics," North Holland Physics Publishing, Amsterdam, 1984, Ch. 2.
[8] E. Klein, "A Comprehensive Etymological Dictionary of the English Language," Elsevier, Amsterdam, 1971.
[9] E. Fairstein, "Do Accidents Occur in Threes?" (Letter to the Editor), *Am. Sci.*, 72 (1984) 232.
[10] K. Metropolis and S. Ulam, "The Monte Carlo Method," *J. Am. Stat. Assoc.*, 44 (1949) 335-341.
[11] McCracken, "The Monte Carlo Method," readings from *Scientific American* on mathematical thinking in behavioural sciences, Freeman, San Francisco, 1968.
[12] K. Pearson, *Nature* (London) 72, (1905) 294.
[13] G.H. Weiss and R.J. Rubin, "Random Walks Theory and Selected Applications," in I. Prigogine and S.A. Wright (Eds.), "Advances of Chemical Physics," Wiley, New York, 52 (1983), 363-505.
[14] For an introductory article discussing electrostatics and electrostatic precipitators see A. Ross-Innes, "Static Electricity an Ancient Enigma," *New Scientist*, May 6, 1982.
[15] L.G. Jacchia, "Some Thoughts About Randomness," *Sky Telescope*, December (1975) 371-374.
[16] W. Feller, "Fluctuations in Coin Tossing and Random Walk," in "An Introduction to Probability Theory and Its Applications," Vol 1, Wiley, New York, 1950, Ch. 3.
[17] B.B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature," W.H. Freeman, 1980, p. 241; an updated and augmented edition of the original book, "Fractals, Form Chance and Dimension," published in 1977.
[18] M. Gardner, in the Mathematical Games section of *Scientific American*, "The Rambling Random Walk and its Gambling Equivalent," *Sci. Am.*, May (1969) 110-120; "Random Walks by Semi-Drunk Bugs and Others on the Square and on the Cube," *Sci. Am.*, June (1969) 122.
[19] J. McDermott, "Fractals Will Help to Make Order Out of Chaos," *Smithsonian* (Journal of the Smithsonian Institution, Washington, DC), 14, No. 9 (1983) 110-117; see also D. Campbell and H. Rose (Eds.), "Order in Chaos" North Holland Physics, Amsterdam, 1983.
[20] "The Mathematics of Mayhem," *Economist*, September 8 (1984) 87-89.
[21] W. Weaver, "Lady Luck," Anchor Books, Science Study Series, New York, 1963.
[22] L.J. Parratt, "Probability and Experimental Errors in Science," Dover, New York, 1971.
[23] A device called the Hexstat, which is essentially the same as the Quincunx Board, is manufactured and described by H. Ruchlis and E. Marcus in the Teachers Manual; Harcourt Brace and World Inc., New York, 1965. In this device the movement of a set of small steel balls passing through a scattering device simulates the generation of the widely used probability distributions.
[24] See discussion of the lawyers dilemma in occupational hygiene in the forthcoming book by B.H. Kaye, "Quality Air in Enclosed Spaces."
[25] B.H. Kaye, "Fractal Geometry and the Characterization of Rock Fragments," in the proceedings of "Fragmentation, Form and Flow in Fractal Media," Neve Ilan, Israel, January 6th-9th, 1986, R. Englman and Z. Jaeger (Eds.), *Israel Physical Society*, 1986.
[26] R. Trottier, M.Sc. Thesis, "Fractal Description of Fineparticle Systems," Laurentian University, 1986.
[27] L.F. Henderson, "Statistics of Crowd Fluids," *Nature* (London) 229 (1971) 381-383.

5　二维空间内随机行走产生的分形系统

5.1　在二维空间内矩形网格上的随机行走

从数学上来说，让我们前边提到的那个步履蹒跚的醉汉走出 1 维沟底到 2 维空间的最简单的方法是将他的步履限制在一个 2 维网格上，即允许醉汉在如图 5.1 所示的约束空间上晃悠一番。网格(lattice)在字典中被定义为“一种由木棒做成的窗格命名的横竖交叉的网状物”这个词来源于法语中的一根细棍，法国数学家笛卡尔(1596—1650)是最早研究空间点几何学的人之一，他发明了确定空间点位置(或地址)的系统，即图 5.1 所示的网格。

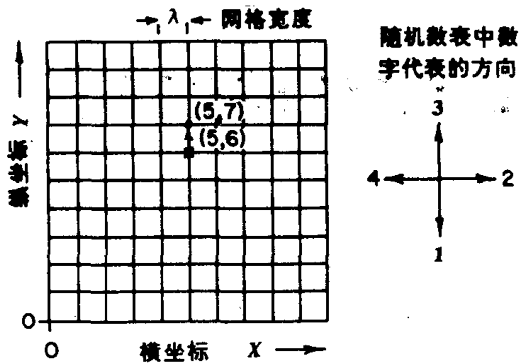
图 5.1 中的两根参考直线 Y 及 X 叫做坐标系。坐标系一词来源于拉丁语，意思是“一系列指令”。这样，图 5.1 中的坐标系可以使我们通过诸如“在 X 方向走 5 步，Y 方向走 6 步”这样的指令而确定空间中某一点的位置。

数学家们把这类系统的水平参考线叫做横坐标轴，垂直线叫做纵坐标轴，在笛卡尔创立这种坐标系统的时候，科学家们正将拉丁文作为一种世界性通用语言，因此，笛卡尔常用其名字的拉丁文形式 Renatus Cartesius 发表科学论文。为了纪念笛卡尔，数学家们把如图 5.1(a)所示的坐标系统称为笛卡尔(Cartesius)坐标系。

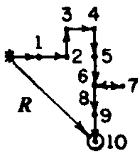
为建立模拟 2 维空间中醉汉的蹒跚步态的蒙特卡洛程序，我们假设醉汉的步长等于格子的宽度，并用希腊字母 λ 表示，现在让这个醉汉从一个 XY 地址为(5,6)的点(指定地址时 X 坐标经常写在前面，即图 5.1(a)中标有星号 * 的点开始游荡。在一个随机游动的简单系统中，假设醉汉的游荡可从图 5.1(a)中标记为 1,2,3,4 的 4 个方向中的任何一个方向上的任一给定的点起步，现在让我们从一个随机数表中选择 1～4 这 4 个数字之一以确定醉汉所走的方向。如果我们随机选择的数字是 3，则第 1 步将把醉汉带到 XY 地址为(5,7)的点，然后，再以等概率从 4 个方向中任选一个新的行走方向(由随机数表再次确定)。在图 5.1(b)中，我们给出了这样随机行走 10 步后醉汉所在的位置，他的游动轨迹是一个马尔可夫链，其净位移则由箭头 R 标出。

值得注意的是表示第 7 及第 8 步的两个箭头，其中第 8 步将醉汉带回他第 6 步后所

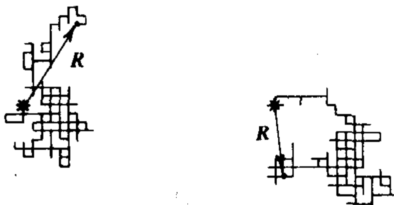
在的位置，在这个简单随机游动模型中，我们允许醉汉原路返回，也允许他重走老路，这种类型的随机游动叫做非回避式随机游动，其它两种这样的随机游动示于图 5.1(c)，关于这种随机游动已有许多研究，尽管研究醉汉的走路，看起来似有无聊之嫌，但这种研究与探讨组成晶体的原子晶格中电子的随机游动问题异曲同工，这就是许多科学家对“醉汉”感兴趣的原因所在。



(a)笛卡尔坐标系



(b)随机行走 10 步及位移向量



(c)随机行走 250 步及位移向量

图 5.1 让一个醉汉在 2 维空间内蹒跚的最简单方法是将他的走动限制在一个正方形网格的可能区域中。为确定醉汉任意时刻在网格内的位置，我们将网格的两边数字化以构成网格内任意一点的地址。图中用 * 标记的点需在 X 方向走 5 步，Y 方向走 6 步，相应的地址为(5,6)

关于晶体及无定形半导体中许多电子曲折运动平均位移的详细理论研究已经超出了本书的范围，感兴趣的读者可以在 Weiss[1]的评论性文章中找到这类问题的有趣介绍。

研究各种各样物质中电子及光子的运动和模拟聚合物悬浮物中聚合物分子生长的科学家们考虑到真实物体的不同性质，已经发展了许多不同类型的 2 维随机游动模式[2,3]。

当模拟由较小组份的随机碰撞产生的大聚合物分子链的生长结构时，科学家们研究了自回避随机游动的性质。在这类随机游动中，醉汉不能折回或越过他已经走过的路径。科学家们已经建立了许多关于非自回避随机游动的定理，但是确定自回避随机游动的理论结构却相当困难。事实上，我们所知道的关于自回避随机游动的大多数东西都是在功能较强的计算机上进行过程模拟时产生的[2,3,4]。

对固体中能量输运感兴趣的科学家们将图 5.1 中的简单随机游动模型加以改进以研究能量沿网格流动时的随机吸收问题。在这种研究中，一束能量，例如在空间网格中作无规则游动的一个光子，有时可以被随机吸收掉。用我们研究醉汉行走时所用的术语来说，

可以在网格上的不同点处安置陷阱，使得醉汉有机会偶然掉入。在图 5.2 中，以小正方形表示的点对晃晃悠悠的醉汉来说就是这样的吸收陷阱，通过在计算机上模拟大量这样的随机游动，我们可以研究平均来说系统要花多长时间才能“吸收”掉醉汉，或者研究该醉汉从网格中逃逸而被捕捉的概率有多大。

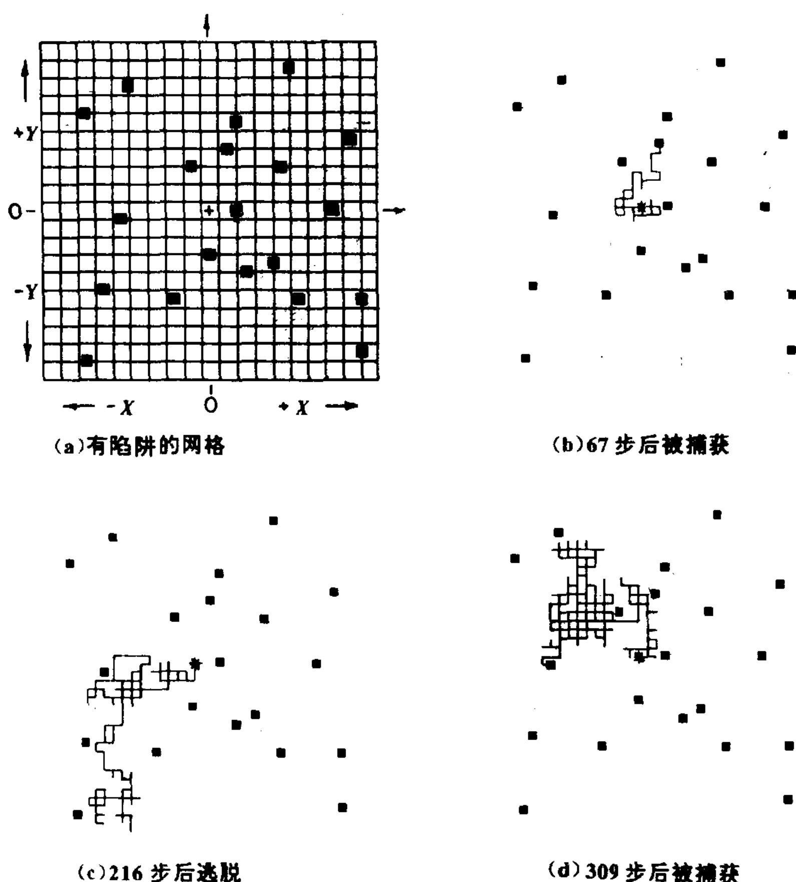


图 5.2　某些科学问题可用在随机分布着陷阱的网格空间内的随机行走予以模拟

致力于固体内能量输运问题的科学家们还对醉汉从网格一边到另一边所需花费的时间感兴趣。为此，有必要引入一个额外的概率变量，以使我们的醉汉在通过网格时在任一点有稍事休息的可能。当我们考察 4 维空间中的随机游动时，将对此予以简要的讨论(见第 6 章)。

到目前为止，在我们讨论这位随机晃荡的醉汉时，我们总是假定他在所有方向上蹒跚的概率相同，然而，有许多这样的科学问题，即在某一给定方向上除了随机运动以外还叠加了总的运动速率。朝向过滤器的灰尘微粒的流动(如图 5.3 所示)就是这样的例子之一。这里，可以认为每个灰尘微粒除作随机运动以外，还在空气流的作用下，在朝着过滤器的方向上获得一个附加的运动速度，在本章的 5.3 节中，我们将讨论灰尘微粒以这类随机游动方式到达过滤器表面时产生的沉积类型。而在本节中，我们暂且满足于引入一些基本概念，这些概念在模拟漂移或有偏向随机游动时将会派上用场。如果我们想象用一个置于管道中的格子网(如图 5.3(a)所示)确定随机游动的位置及进展情况，我们可将数字 1，2，3 分配给在总方向上运动的概率，将数字 4 分给相反的运动方向，而在两个垂直方向上运动的概率则与数字 5 及 6 相对应。

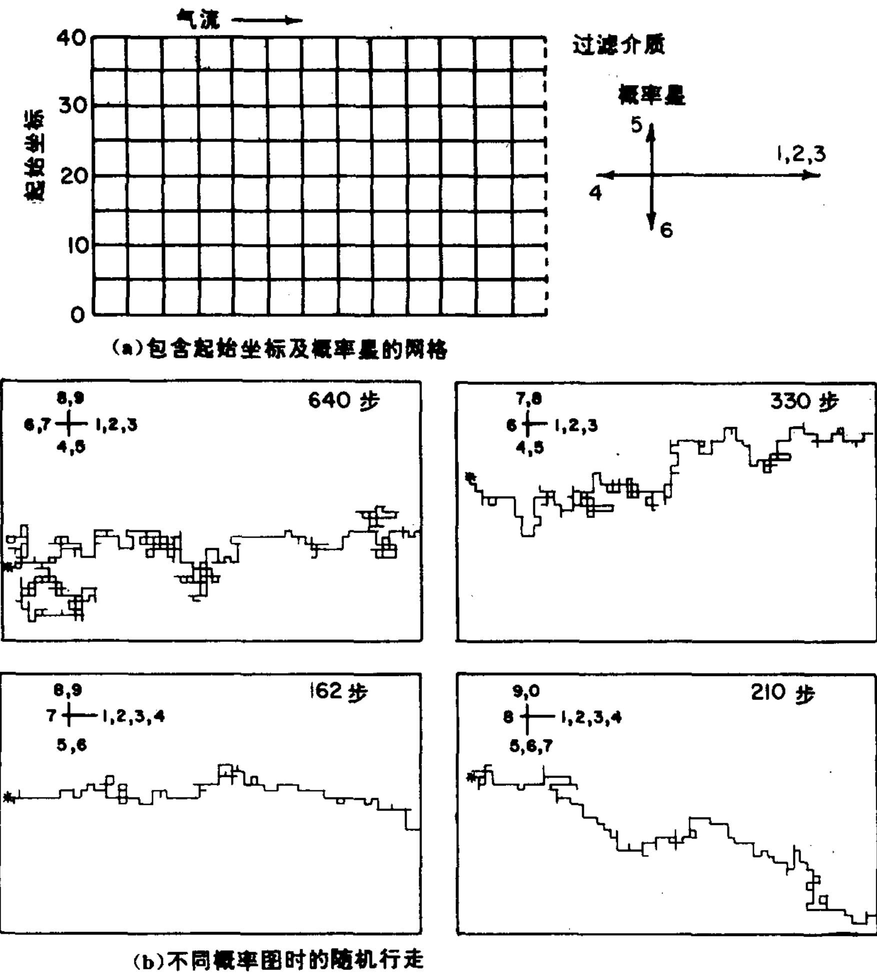


图 5.3 在朝向过滤器的紊动气流中，灰尘微粒的运动可用随机行走理论予以模拟

当模拟任一给定微粒的路径时，应该考虑到当我们开始研究该微粒的运动时，它已经位于管中的某一随机位置。这样，在 Y 主向(该方向表示垂直于管道的运动 1，我们首先须在游动开始时为进入管内的微粒指定一个位置。如果我们把管子沿直径方向分成 40 个区间，则可从 0 到 40 中选一个数以指定微粒随空气流进入管中的位置。

一旦我们让一个微粒随机进入管中，我们可以依次从数字 1 到 6 中随机选择一个数字而让该微粒在末端具有过滤器的管中随机游动。如果某一步使一个微粒退回到管外，我们则不再跟踪该微粒而将另一个微粒随机地引入管内。

在一根实际的管子中，靠近管壁处(该处的速度实际上为零)的粘性效应通常使到达管壁的微粒被壁面所捕获。因而在我们的模型中，当检查工业粉尘的性能时，可以让尘粒碰到管壁时即被捕获以估计壁面损失。在描述一缕烟中或者一个充满灰尘的工作环境中的尘粒特征时，估计壁面损失是一个重要的问题。图 5.3(b)所示为几个尘粒沿着管道向过滤器运动的计算机模拟轨迹。显然，微粒到达壁面的概率与管道关于模拟随机行走步长的相对宽度有关。

我们可以增加向前运动的数字个数使微粒更多地向前，而不是向后或向左运动，这样可以模拟气流速度增大对微粒运动的影响。注意，事实上在管道中将灰尘微粒带向过滤器

的气流运动是一个 3 维问题。然而，既然我们的主要兴趣在于研究管壁过滤器上的沉积问题，那么考虑围绕管道中心的运动则是多余的。因此，为便于计算机模拟，我们的 3 维问题可以简化为 2 维问题。

当研究过滤器上微尘的集累时，我们所遇到的最简单的情形是微粒浓度非常低。在这样的系统中，单个微尘将随机地在 2 维平面上沉积，而且不可能覆盖整个过滤器表面。因为这是一个在评估工业烟尘产生的空气污染时会遇到的重要问题，我们将表明随机连续到达过滤器表面的微粒形成的簇状物具有分形结构。如果我们考虑另一种极端情况，即悬浮的微粒浓度非常高时，我们可以证明过滤器表面的沉积物很厚，但也呈分形结构，这种深度沉积物的分维数依赖于沉积动力学及过滤系统内的作用力。

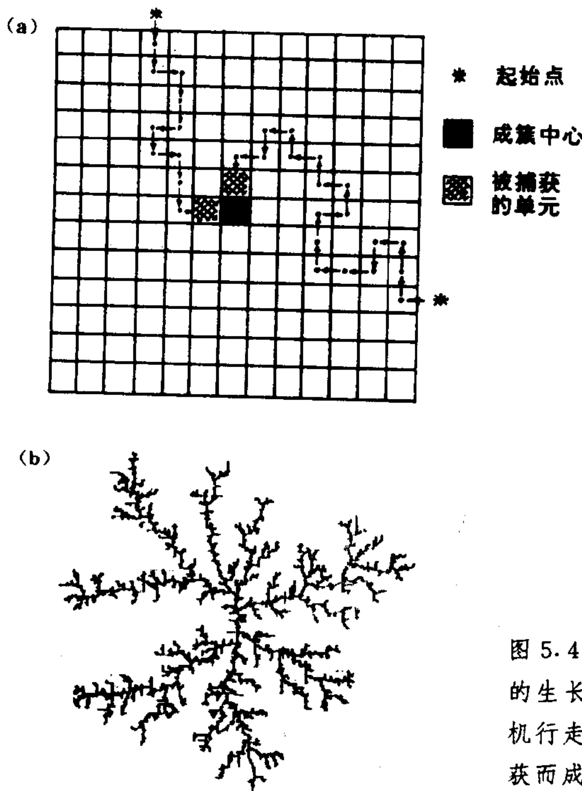


图 5.4 (a)在受限扩散凝聚(DLA)模型中，为实现簇的生长，让象素随机地进入网格并向一个成核中心随机行走，如果象素以有效接触概率接近中心簇，则被俘获而成为生长簇的一部分；(b)由 Whitten 及 Sander 生成的分形簇[5]

在一段时间内，一群在网格空间内四处游动的醉汉之间的相互作用可引出另一个重要的科学问题。例如，考虑如图 5.4(a)所示的系统，我们可以设想在网格中心处有一位非常迷人年轻女郎，醉汉们即使在醉眼朦胧中也意识到那是一个吸引人的地方。在模拟这样的随机行走时，我们将用一个与网格的子单元相同大小的黑色正方形代表醉汉。藉填充一个网格的子单元产生图象的计算机专家们称这些子单位为象素，它是“图象元素”的缩写。假设表示第 1 个醉汉的象素已被允许随机地进入网格。为使用蒙特·卡洛程序使醉汉在网格内四处游荡，我们必须扩大醉汉入口处，即不仅指定 XY 坐标，而且还须确定醉汉是从东西南北哪一方进入。于是，我们先从随机数表中随机选择 X 及 Y，然后从数字 1 到 4 中随机确定北南东西。一旦进入网格醉汉便以相同的概率左右前后行走，每一步的行走方向则由数字 1 到 4 随机确定。因为我们感兴趣的仅是这个多情的醉汉所到达的最终位置，

所以我们尽可以让他来一个自相交的随机游动，如果他走出网格，我们则认为他消失了，并且让另一位进来试试；相反如果他已碰到位于中央的女郎，我们便停止他的晃悠，并允许他紧紧抓住那位女郎。

下一步我们让另一位醉汉进入网格，第 2 个醉汉可能到达女郎停止游荡，也可能在到达女郎之前遇到第 1 个醉汉，如果是后者，他则抓住第 1 个醉汉作为依靠，这样我们就有了一个处于萌芽阶段的醉汉群。

用科学术语来说，我们把周围聚集着到达的象素，具有吸引力且位于网格中心的象素叫做成核中心或种子。在 3.7 节中讨论过的燃烧烟尘的生长就是一个可用这样的随机游动蒙特·卡洛方法模拟的科学问题。我们假设火焰中形成的单位元球粒由于火焰的脉动发生碰撞而集簇成团。起初，核心周围模拟簇的生长相当缓慢，但最终却长得横跨整个格子空间，这种类型的有核生长叫做受限扩散凝聚，简称为 DLA 过程。应用蒙特·卡洛模拟技术进行这类核簇生长研究的首推 Whitten 及 Sander[5]。他们在计算机屏幕上模拟出的一个有名的分形如图 5.4(b)所示。当模拟这类簇的生长过程时，如果一个随机游动的象素(单位正方形)正交地(这是一个几何学术语，意为直角或直交地)碰到簇上，则该象素即成为簇的一员。这种通过正交碰撞而粘到生长簇上的情形从图 5.4(a)可见。在某种意义上来说，可以认为加入正在生长的凝聚体的子单元是由计算机投上去的。形容词“发射的”(ballistic)来源于希腊语的投掷一词，由 Whitten 及 Sander 模拟的生长类型就是一种“发射式生长”。

Whitten 及 Sander 分形簇的分维数为 1.7，通过改变簇的运动方式、子单元的大小及子单元与生长簇接触时的粘合概率，可以增大或减小簇的分维数。在 5·6 节中，将对用稍有变化的 DLA 蒙特·卡洛程序模拟的各种不同的科学问题加以评述，由这种技术模拟出的分形结构在工业上的重要性也将得以简要讨论。

本节到目前为止，所有随机行走都是在 2 维欧几里德空间中进行的。最近几年许多科学家还研究了[2,3,6~10]一组非常有趣的在分形空间上发生的随机行走问题。为理解分形空间的含义，让我们考虑如图 5.5 所示的 Whitten 及 Sander 分形系统[7]。我们把图中由小正方形子单元形成的集簇想象成在 2 维板 $ABCD$ 上的曲折通道。假如在这样一个多孔体中有一个随机行走的气体分子，它将在分形通道内四处游动以便找到走出迷宫的路径，这在 科学技术上是一类非常重要的问题。例如，如果我们把正方形 $ABCD$ 围成的系统看成一个多孔的膜，我们可以观察气体分子从 AB 到 CD 的运动以研究其通过膜的速度，具有高速率的分子将比不活泼的大分子更快地通过迷宫，这样不同大小分子的不同运动速度就构成了多孔膜分离气体混合物的基础。一种从铀同元素气体混合物中获得浓缩铀(该物料用于核反应堆和原子弹制造)的方法就是建立在此基础上的。在粉末冶金中，当金属粉末经烧结而结块时，金属蒸汽分子在烧结过程中必须从错综复杂的孔隙中逸出，而粉末本身则碎成密度更高的物体。图 5.5 中曲折的分形路径可以表示尾矿固结池中的排水网络、药物受控释放时通过塑料体的路径、放射性气体分子从放射性物质埋藏处断裂的花岗岩或从原子反应堆保护壁逸出的路线、或者铱气渗过土壤流入地下室的路径等等。多孔体分形结构的研究还是材料科学中一个生机勃勃的领域，这一点是毫不奇怪的。

在第 7 章中我们将简要讨论图 5.5 所示的模型在 3 维空间中的扩展，并将指出，如果

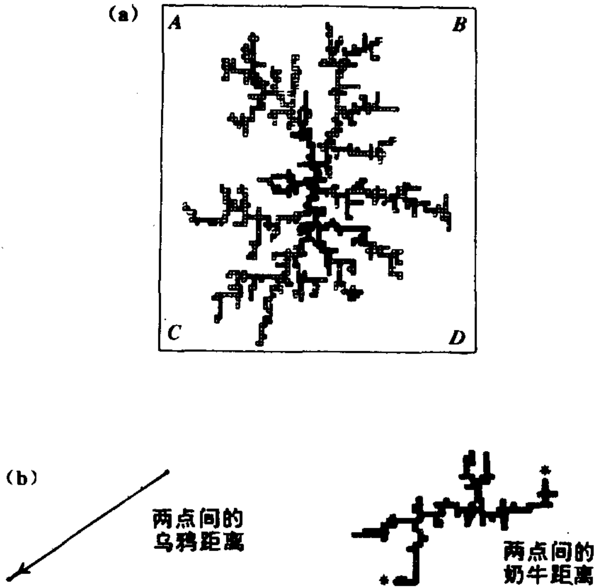


图 5.5　多孔介质中的曲折通道形成分形空间，气体分子在其中随机运动可被看作在该分形空间中的随机行走。由正方形 ABCD 定义的分形空间可通过截去 Whitten 及 Sander 类分形系统结构中的棱角而成，该分形空间是 Stanley 及 Meakin 生成的[8]。(a)由分形凝聚体生成的分形空间；(b)分形空间内的乌鸦距离和奶牛距离是刻划分形空间特征时有待考虑的重要参数(乌鸦距离(Crow distance)是两点间的直线距离，它是一只乌鸦从一棵树飞到另一棵树的路径；奶牛距离(Cow distance 是一头乱蹦 的奶牛行走的路径)

人们对通过分形迷宫的分子随机运动的时间维数感兴趣，人们将发现讨论第 4 维(fourthdimension)分形空间是很有助益的〔科学家们把该维数叫做一个系统的部分维数(fraction dimension)〕。

5.2　应用极坐标描述二维空间的随机运动

笛卡尔坐标并不总是描述空间中物体随机运动的最有效数学方法，作为另一种选择，人们可以应用极坐标确定空间位置。

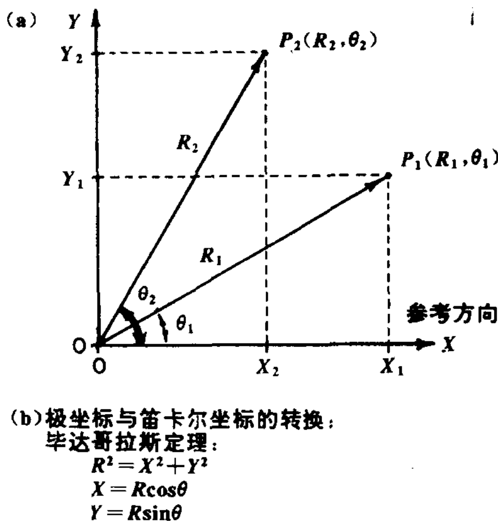


图 5.6　极坐标是确定空间中点的位置的几何系统，有时比笛卡尔坐标更为方便。(a)空间中 P_1 点的位置由 θ_1 方向上的直线 R_1 的长度确定，角度 θ_1 从图示的参考方向量起；(b)应用毕达哥拉斯直角三角形定理可将一点的极坐标变换为笛卡尔坐标

确定空间中某点位置的极坐标系统的基本概念如图 5.6 所示。在这个坐标系中，我们用一根拉直的绳子测量从灯柱到醉汉的距离，以确定这个步履蹒跚的醉汉的位置。如果知

道了绳子的长度及其与某一给定参考线间的夹角,我们便完全确定了醉汉的位置。因此,在极坐标系中,我们要测量的是从一个参考点(亦叫极点,极坐标由此得名)到醉汉的距离以及拉直的绳子与空间中某参考方向的夹角。这样,在图 5.6 中,点 P_1 的位置由 R_1 和 θ_1 的数值决定,该点在极坐标中的地址是(R_1,θ_1)。类似地点 P_2 的位置由(R_2,θ_2)给定。用来建立极坐标系的参考直线叫极轴。应用直角三角形的毕达哥拉斯定理,可将极坐标转换成笛卡尔坐标,反之亦然,其转换规则见图 5.6。在应用极坐标系的 2 维空间中,用蒙特卡洛程序模拟醉汉蹒跚行走的第一步是建立空间中的可能方向和随机数表之间的对应关系。对于图 5.7(a)所示的模型,我们允许空间中有 8 个不同的方向,每个方向由相应的数字表示。在最简单的随机行走模型中,我们限制醉汉以相等的步长 λ 蹒跚而行。为模拟一个随机行走的过程,我们让醉汉从灯柱出发沿着由 1～8 的随机数确定的方向迈一步。如果我们从图 4.1 所示的随机数表的左上角开始沿表向下移动,醉汉的第 1 步将跨在方向 8 上来到图 5.7(b)所示的 B 点,第 2 步随机选择的数字 7 方向使醉汉走到点 C,第 3 步沿方向 3 又使醉汉回到点 B,第 4 步再沿方向 7 运动,醉汉仍在 C 点,然而第 5 步将使他沿方向 1 来到点 D。

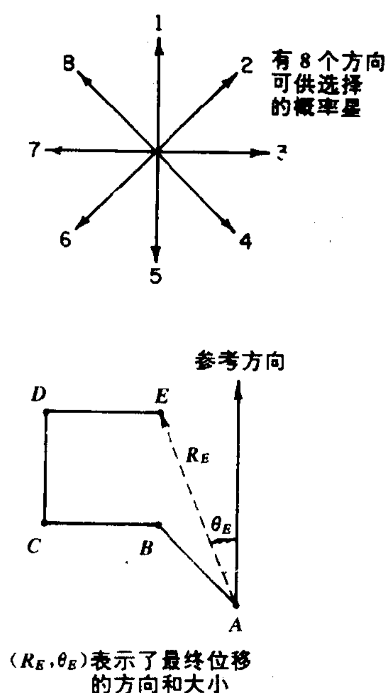


图 5.7 在 2 维空间中用极坐标模拟的一个典型的随机行走

随机数表中下一个可能的方向是 3,如此 6 步以后,醉汉将位于 E 点。现在我们画出图 5.7(b)中的虚线,以便用极坐标表示经马尔科夫链式事件 $ABCBCDE$ 后的最终位移。在极坐标系下,点 E 的地址由 $P_f(X_f,Y_f)$ 指定,其中下标 f 表示"最后"。从极点到结束点的箭头表示最终位移的大小及方向。在物理学及数学中,空间中画的一条线若载有某一变量的大小及方向的信息,则这条线称为向量。向量(vector)这个词由拉丁文"vehere"而来,意思是携带,如一辆汽车带人运行,我们即可作出一个向量。向量比通常只表示一个信息的数多一个信息。

可以说明,随着时间的推移,醉汉回到灯柱的概率越来越小,而且以 λ 步长完全随机

地走 N 步后醉汉可能的位置可由下列方程确定，其中 E 为醉汉到灯柱距离的期望值。

$$\lambda\sqrt{N}=E$$

选择极坐标还是笛卡尔坐标来模拟一个给定的科学问题取决于问题的性质。当研究晶体中电子的行为时，网格中的随机行走是合适的应用系统，因为它的物理结构与被研究的对象更为接近；而在研究关于气体分子扩散及悬浮液中胶体微粒的运动等问题时，极坐标则是非常有用的。悬浮液中胶体微粒的快速不规则运动叫做布朗运动[11-17]。

描述悬浮液中胶体颗粒运动的术语“布朗运动”是为了纪念 1827 年第一次观察这类运动的苏格兰植物学家罗伯特·布朗。当布朗用显微镜观察悬浮在水中的花粉颗粒时，他发现颗粒在做快速的不规则运动，起初布朗认为这类运动是像花粉这样的活细胞所独有的，但进一步实验表明，其它物质的微粒如木屑、玻璃和花岗岩碎屑等也以同样的方式运动。我们现在知道这种不规则的且难以预测的运动是由于微粒受到悬浮液中分子的不规

步数	步长 R	角度 θ	步数	步长 R	角度 θ
1	15	111	26	7	348
2	2	42	27	2	267
3	5	9	28	20	100
4	4	140	29	16	26
5	6	324	30	17	253
6	17	10	31	9	278
7	18	86	32	4	123
8	17	31	33	16	293
9	9	302	34	1	258
10	1	279	35	13	249
11	10	139	36	10	285
12	14	95	37	16	215
13	5	106	38	13	85
14	9	132	39	19	11
15	9	301	40	6	200
16	3	79	41	5	201
17	9	240	42	14	132
18	13	258	43	14	267
19	17	75	44	7	288
20	20	289	45	8	67
21	14	280	46	14	315
22	14	84	47	5	35
23	20	67	48	16	252
24	1	335	49	3	132
25	9	21			

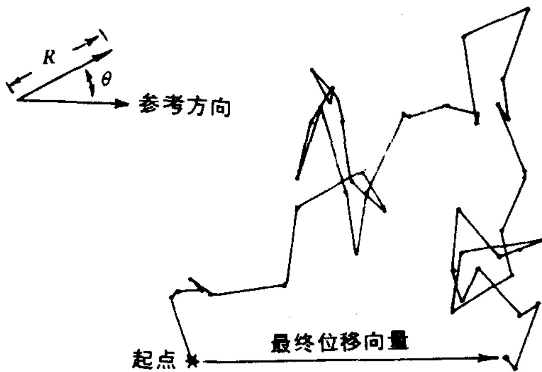


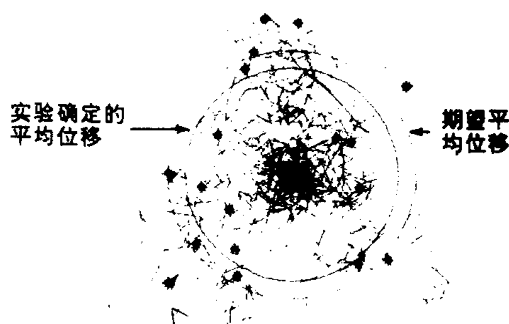
图 5.8　为模拟 2 维空间中的布朗运动，必须令步长及方向随机化

则轰击所致，这些分子推撞微粒使其改变运动方向，而方向的改变则取决于使分子轰击的瞬间平衡状态。有趣的是一百多年以后，爱因斯坦在对布朗运动全然不知的情况下，用数学方法推测了这种运动的存在[18]。为了在极坐标系中模拟布朗运动，我们引入一系列步长值以使产生图 5.7 中路径的模型更复杂些。这样的随机行走如图 5.8 所示。请注意，当追踪一个真实系统中的布朗运动时，我们实际上没有理由用图 5.8 中所示的折线将几个位置连接起来。人们已经多次证明，在研究胶体微粒的运动时，如果我们延长观察时间，在

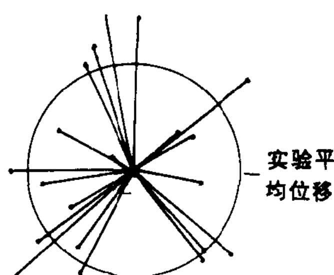
高分辨率的运动图上任何两点间的运动，看起来和在低分辨率的大尺度图上一样参差不齐，无法预测。因此，布朗运动中两点间折线不是现实的描述，我们并不知道在两个被观察的位置之间那个运动的微粒究竟在哪里。

用数学的语言来说，布朗运动的轨迹放大任何倍数都是自相似的。这就是说，如果我们看见了一个没有任何标志的轨迹，我们就无法知道这个轨迹是在多大放大倍数下观察到的，这也意味着布朗运动的轨迹不可微分，因此布朗运动满足一个分形系统的所有理论条件。

Mandelbrot 告诉我们，布朗运动的研究是他创立分形几何理论的一个重要诱因。值得注意的是，布朗运动的分维数是 2，因为如果一个胶体颗粒有足够长的时间，它将曲曲弯弯地四处运动，遍历平面中的任意一点。这一事实再次表明，短期轨迹的分维数和各态遍历的系统的分维数之间存在差别。如果考查图 5.8 中点 A 和 B 之间的短期轨迹，我们可以推出该曲折轨迹的分维数，但我们必须低估一个无限长时间的布朗运动的分维数。请读者记住，理想的分维是一条曲线或边界充填空间能力的度量，而不是表征任何特定的有限线段或边界对空间的实际充满情况，尽管我们在给定的分辨率限度下可以应用分形概念描述短程的曲折系统。



(a)布朗运动的模拟：20 次随机行走，每次走 49 步



(b)终点的分散图

图 5.9 如果我们考察从一个中心点出发的许多胶体微粒的运动，则它们在给定步数后的位置形成一个发散的边界，该边界围绕在期望的平均位移线两侧。(a) 20 个微粒离开中心随机行走 49 步后形成的发散边界；(b)20 个微粒围绕实际平均扩散位移的最终位置

理论上，任何一个分子或胶体微粒在无限长时间内的随机运动都将覆盖整个平面，但是如果我们考虑许多分子离开同一起点，一段时间以后，它们将扩散开来，这些分子离开初始点特定距离的概率可以用数学方法予以描述。在图 5.9(a)中，我们给出了 20 次随机行走(每次 49 步)的叠加结果，由 * 号标明的每次随机行走的终点不能代表(应为可以代表——译者注)一定时间后运动微粒的位置。图 5.9(a)还给出了本节前面所提到的方程预测的平均位移。可以看出，49 步运动以后分子的位置并不刚好位于理论预测的线上，而

是聚集在期望位移线两侧，形成了一个松散的边界。

用科学术语来说，微粒是从起点向外扩散的。扩散一词的原意是四处流泻，向各个方向散布，在此我们希望这本书有助于分形理论在科学界的“扩散”。该词来源于二个拉丁词，一个是“dif”，意思是分开，另一个是“funder”，意思是涌出。随着时间的延长，扩散分子的平均位移增加了，由分子勾画出来的围绕着平均位移的边界相应地发散开来。

在图 5.9(b)中，图 5.9(a)中的数据被简化了，以便显示单个微粒关于圆心的位置。微粒离开中心的距离可看作这种随机行走的位移向量。

对某一期望距离周围离散分布物的定量描述构成了许多科学问题的重要方向。例如，图 5.9(a)的轴心可以是一个杀虫剂喷洒系统的喷嘴。当喷出的液滴落向地面时，它们可能受到随机紊流的作用而作随机运动。人们可以忽略液滴朝地面的运动，但要指出这一方向的运动决定着液滴到达地面之前的扩散时间。这样，液滴离开喷嘴的四散运动可以用随机行走进行模拟，极坐标系可用以观察当药物落到地面时的散开情况。用于观察单个药滴分散结果的模型包括 49 步随机行走，我们可以把这 49 步随机行走看作一系列较小的影

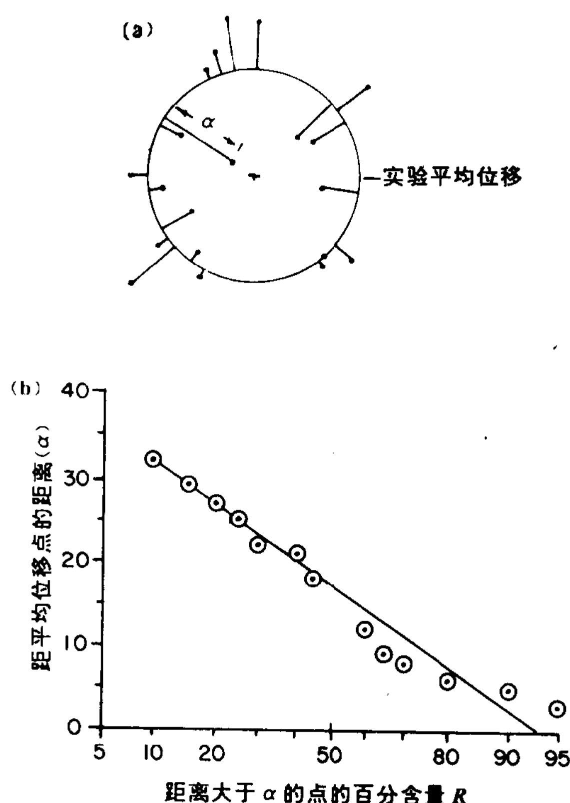


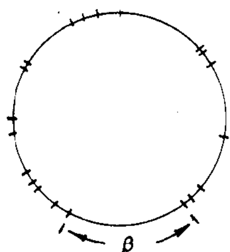
图 5.10 单个胶体微粒离开粒群平均位移的距离符合高斯分布。(a)图 5.9 中数据的简化表示，它表示微粒的最后位置到平均分散圆的距离；(b)在高斯概率纸上 α 值的累积分布函数

响因素，而这些因素的随机相互作用决定了药滴在地面上的分布模式。因此，有理由认为药滴分布是围绕着某一预期平均位置的高斯分布(见 4.7、4.9 节中关于高斯分布的讨论)。

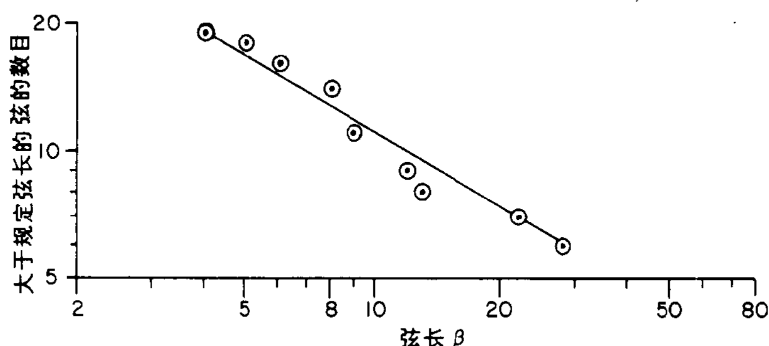
图 5.10(b)所示为液滴期望位移的距离 α〔见图 5.10(a)〕在高斯概率纸上的分布曲线。通过数据点可作出一条直线这一事实证明药滴分布确可由高斯函数描述。

当研究诸如杀虫剂药水分布这样的问题时，我们关心的不仅有药滴离开喷嘴的距离，

而且有药滴在喷嘴周围散布的均匀性。如果我们通过液滴所在处作直线与平均分散圆正交,则在该分散圆的周长上可截得一系列交点,如图 5.11(a)所示。这些点构成了一个维数小于 1 的康托集,而圆上两点之间弦长的分布则形成与点集的维数相联系的另一集合。图 5.11(b)就是弦长的分布图,其直线的概率可以用来表征喷嘴周围药滴的分散情况。



(a)用平均位移为半径的圆截位移向量得到的康托尘



(b)由平均位移圆得到的弦的双对数分布

图 5.11 随机分散开的胶体微粒与中心连线在平均位移圆周上的交点形成一个维数小于 1 的康托尘,康托尘元素间的弦长与尘的维数有关

上面讨论的是一种简单的药滴散布模型.该模型可加以扩展而把喷洒时环境条件的变化考虑进去。若喷洒时有风吹过,则药滴将随风飘移,这一影响在进行随机行走模拟时,可在风的方向上增大液滴的行走概率而加以考虑。在工业喷洒技术中,人们的主要兴趣集中在通过让液滴荷上静电以增加喷洒和沉积效率的可能性上。在这种情况下,给喷嘴施加一个高电压以使药滴荷电并迫使其离开喷嘴,因此,当由蒙特·卡洛程序模拟荷静电药滴的分散情况时,由于液滴间的相互斥力,我们必须增大喷嘴径向向外的运动概率,并且不允许液滴之间近于某一给定的距离。同时,由于喷嘴的静电斥力,药滴不能向后运动。可见这是一个特殊的自回避随机行走。

人们可以使药滴带上不同的模拟电荷以研究药滴的分散模式,并且可以将预测的模型与实际观察到沉落药滴的分布情况相比较。

第一次接触随机行走理论的学生,有时会惊奇地反现,任何一位醉汉在一段时间以后都具有离开灯柱的倾向。若试图理解大批醉汉在离开灯柱预期距离左右游荡的物理意义,用另一种方法考察醉汉离开灯柱的概率有时是很有帮助的。在图 5.12 中,对所有随机行走考察一个离初始点距离为 R_1 的环绕圆,再在该圆的圆周上画一个小圆 A ,则小圆 A 在环绕圆外的面积代表醉汉从灯柱走开的概率,在环绕圆内的面积则是醉汉返回灯柱的概率。当环绕圆的半径即离开灯柱的距离一定时,在所有可能的方向上,小圆 A 中两个子面积的比表明醉汉离开灯柱的概率总是大于走回灯柱的概率。只有当环绕圆的半径即离灯柱的距离无限远时,二者才可能等。具有无穷半径的圆是一条直线。因此,如果我们假定

空间中有一排醉汉，则他们将会以同样的概率向东或向西离开起点，游荡开去。

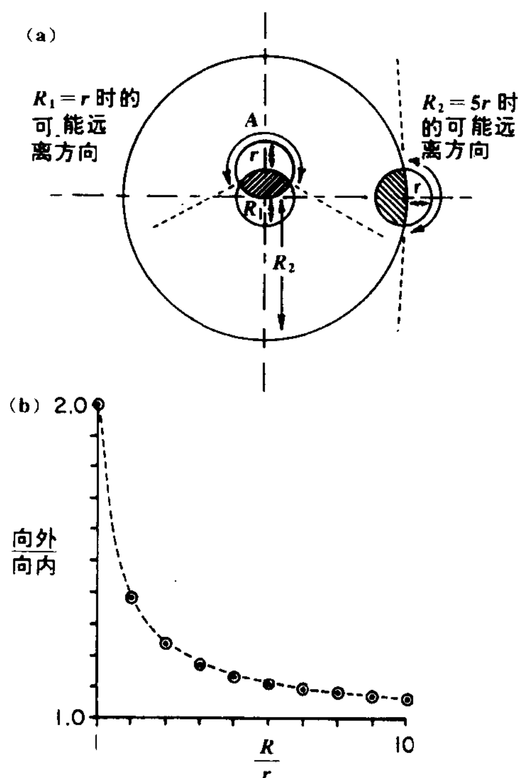


图 5.12 当平均位移圆为有限大时，从平面上一点出发的随机运动微粒向外运动的概率总大于向内运动的概率。也就是说，随机运动的粒子在一个弯曲的概率空间中分散

为领会描述醉汉离开灯柱比走向灯柱有更大概率的另一种方法，可从另一角度模拟醉汉的运动，让我们想象一个可以在 2 维平面随机运动的球。为使这个球在平面上以较高的概率离开初始中心，我们可以稍稍弯曲一下该平面。这样 2 维空间中运动的概率映象(a map of probability)看起来就象一只倒扣的碟子以较大的概率向外滑落而不是向中间的高处攀升。因此，尽管测绘空间(我们在其上描绘醉汉运动的图纸)是 2 维平面，但醉汉运动的概率空间却是弯曲的。在现代物理学中，人们有时会听到这样的描述，即某种特点的空间是弯曲的。要想直观地解释所谓的"弯曲空间"是相当困难的，也许作下面这样的理解会有所帮助，那就是当我们以某种方式谈论弯曲空间时，我们就是在说一个醉汉反正离开灯柱在弯曲的概率空间中蹒跚而言。

到此，我们已经建立了 2 维空间中模拟随机行走的基本概念及术语，下一步可以着手考查在 2 维空间中产生分形结构的特殊系统了。

5.3 二维空间内分形沉积的随机行走模拟

在 4.7 节中我们曾讨论了怎样应用钉—球(pin－ball)模拟某些随机行走系统。图 5.13 所示是由 Parman 制做的一种特殊的色谱仪，它可用来显示一种重要的化学过程——色谱法的随机行走现象[19]。色谱法是分析化学家用来分离复杂的化学混合物组份的一种方法，在现代分析化学实验室中可以看到复杂的色谱分析系统，而对植物色素感兴趣的俄国科学家 Tswett(1872—1920)则是现代色谱技术的先驱者。

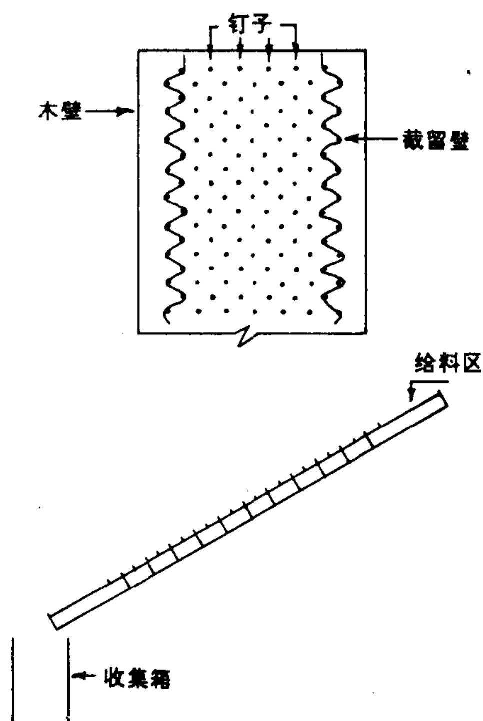


图 5.13 可用来模拟色谱柱中分子分离的一种特殊的钉—球机[19]

在 1906 年所做的最初实验中，Tswett 将悬浮在碳氢化合物溶液中的植物色素汁倒入用一个玻璃管盛着的粉状石灰石柱中，然后继续往管中倒更多的溶液，在原始悬浮液中的不同色素对石灰石表面具有不同的亲合力，所以色素分子在管中下落的速度不同，这取决于它们被石灰石表面吸附及解析的难易程度。结果最初混合物中的不同色素在石灰石粉柱内形成了不同的色带。因为这些在石灰石粉柱中分离的色素看起来象彩虹一样，所以 Tswett 称他的分离方法为色谱法(Chromatography)，它来源于希腊语的“色彩”和“写”两个词[19]。

尽管在现代色谱仪中不一定非得看见色彩，但在 Tswett 早期工作基础上建立的这种现代分离过程仍被称为色谱法。现代色谱分离方法通常让流体通过分离柱，直到待分离的分子组份一个接一个地从柱底流出来，监测流出的流体可以知道在不同时刻从柱底流出了什么组份。在一段时期内，从色谱柱中分离出来的不同物质到达柱底的记录就叫做色谱。将分子从柱中冲出的过程在技术上叫做洗涤(elution)，其源于拉丁文“elurere”，意思是“冲走”，用来冲出被分离分子的流体叫做洗涤剂或流动相。

Parman 制造了图 5.13 所示的设备以帮助学生们看到在色谱柱中发生的吸附与解析过程[20]。他将两种不同大小的钢球混合物倒入这种特制的钉—球机中。当球沿钉子之间滚下时，它们与钉子碰撞，碰撞频率与球的直径和钉子间距的相对大小有关。这样，小球比大球碰撞的机会少，从而以更快的速度落到机底，于是从柱顶下落的球的混合物在柱底按大小分开，如图 5.14 所示。因此，从一个重要的角度来看，色谱法中所实现的分离牵涉到随机行走理论，而且随机行走的步长是一个变数，它与形成粉末床层的微粒之间的孔隙分布有关。待分离的分子通过粉末床层时增加了运动的复杂性，即随机行走的不同分子的停留时间也在变化，这种变化取决于分子和表面的亲和力以及分子的热能(这种随机行走模型是一种特殊的色谱法！称为流体动力色谱法，我们将在下一章对其详加讨论)。

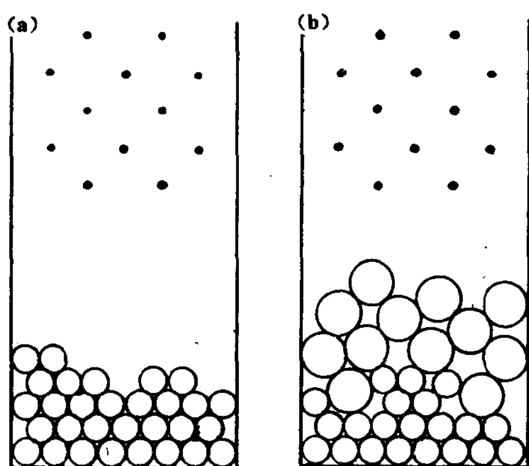


图 5.14 图 5.13 中的钉—球机可用来将两种尺寸的球分为两层。(a)同样大小的球落入钉—球机在底部形成均匀沉积；(b)两种不同大小的钢球由于穿过钉列向下运动的速度不同而明显地分成两层

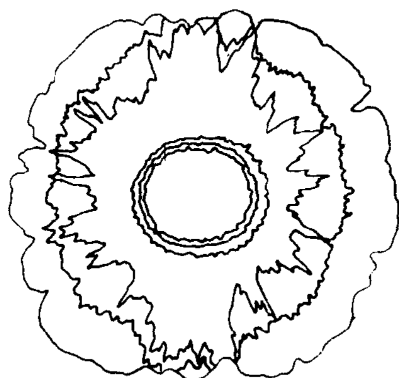


图 5.15 在一种纸上色谱法中，一滴含有待分离分子的溶液被置于滤纸中心，然后被不断加入水滴洗涤到过滤纸的外缘，由墨水里的色素产生的迁移前锋显然是分形结构

在薄层或者纸上色谱法中，当液体流过一层纸或吸附剂时，液体中的分子便得到了分离。在图 5.15 中我们所绘出的是圆形过滤纸中心的一滴墨水形成的分离前锋(front)。先是一滴墨水滴到纸上，然后再滴上一些水滴，由于毛细作用，水向着滤纸的外缘浸润，在外缘处滴落或蒸发掉。运动的水试图将色素分子带走，但这些分子吸附在纸纤维上，直到水—色素分子系统的热能改变足以使色素分子解脱出来而随着水移动一段距离，然后又被另一纸纤维所吸着。

图 5.16(a)所示为长纤维制成的一层薄纸的模拟结构，关于这种模拟纸的构造方法请见本书的第 7 章。图 5.16(b)是两个不同分子穿过纤维垫的模拟随机行走，每一分子被纤维吸附或离开纤维完全是随机的。在生成图 5.16(b)的蒙特·卡洛程序中，当分子在纤维上吸附时，它们可在吸附位置上停留一小段时间，这一停留时间也是随机变化的，而且与分子类型有关[21]。

图 5.15 中迁移前锋的外观表明在纸上色谱法形成的前锋具有分形结构。从图 5.16 的模型可以推知，图 5.16 的迁移边界的分维数依赖于染料分子的分子迁移率和滤纸中纤维的密集程度。关于后者的另一种说法是，迁移边界的分维数与滤纸的孔隙结构有关，这种结构可用第 7 章中所说的 Sierpinski 分形予以描述，在图 5.15 中可见多重前锋的存在，其重要性将在第 7 章中作更详尽的讨论。

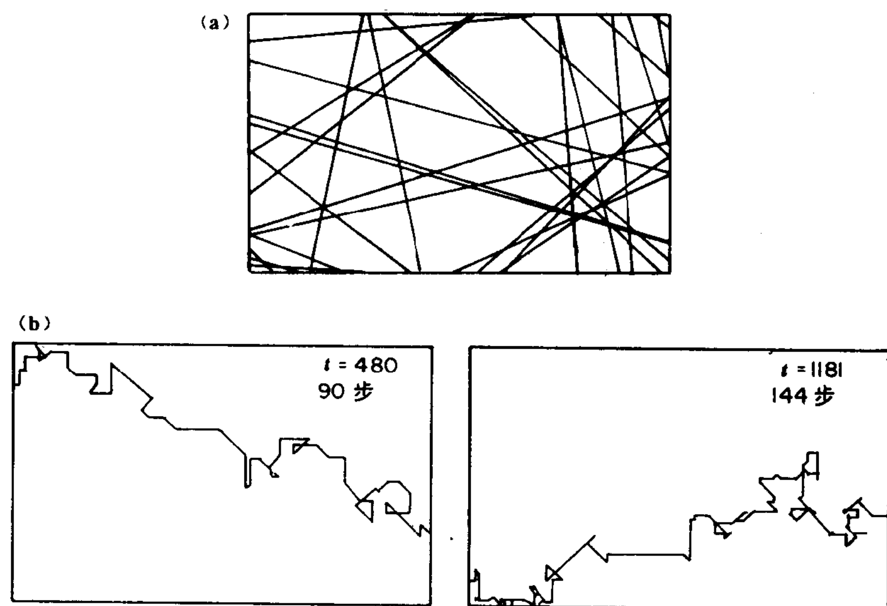


图5.16 纸上色谱法中色素分子的迁移可用蒙特卡洛程序模拟，模拟时假定色素分子的运动是一种随机行走，这种随机行走包括在纸纤维上的吸着与解吸。(a)长纤维素纸的模拟结构；(b)一段固定时间内，三个色素分子的模拟随机行走

在传统的纸上色谱法中，为提高待分离物料中不同分子组份的分离精度，必须降低迁移边界的曲折程度。而色谱柱中，为改进分离效果，人们将注意力集中于在柱内充填大小均匀的微粒以产生均匀的粒间孔隙[22]。在纸上色谱法中，均匀孔隙结构的滤纸分离精度更好。在Laurentian大学，一些实验正在进行中，目的是根据迁移墨水点的分形前锋来表征滤纸的孔隙结构[21]。

使用与Parman模拟色谱法相类似的装置，Nowick和Mader做出了金属合金的2维晶体结构模型[23]。图5.17所示是Nowick及Mader用来产生2维球陈列的装置，该装置可产生等径球的2维陈列，也可产生不等径球的2维混合体。请注意装置所在容器的不规则边界，它使得壁面效应对球体随机堆积的影响随机化了。进料斗装有刻槽圆盘以调节球的进给速度，还装有较紧排列的钉子以避免球从进料斗太快地进入圆盘。球径钉子组成的陈列进入配置区时，其穿过钉阵的速度可以通过改变进料装置的高度来控制，整个台子还可以轻微震动以改变底层收集器中球的堆积模型。

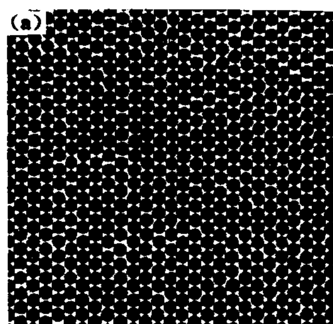
在Nowick和Mader的实验中，他们的基本思想是如果人们拍摄下底层收集器中的2维球阵，则可用一束激光照射底片，而使还原的底片产生2维阵列的光衍射图案，这就模拟了χ射线对实际合金中金属原子薄膜的衍射情况。当用球阵的底片使光衍射时，衍射光的波长与底片上球像的大小之比必须与金属薄膜中原子的大小和产生χ射线衍射的χ射线的波长之比完全相等。

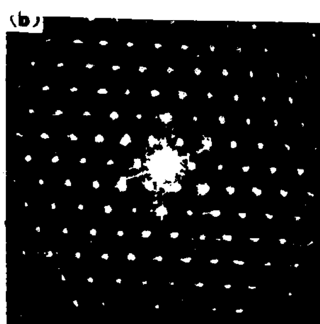
为了验证其模型系统的可靠性，Nowick和Mader首先配置了一个规则的球阵来模拟完美无缺的纯金属薄膜。在图5.18中，该球阵与其光衍射图象并排而列，衍射图案有相当多的斑点，它与纯金体中发现的一种规则结构的衍射图案相对应。图5.18(c)所示的即是一个纯晶体的χ衍射图案[24]。

让单一粒度的球体尽可能快地落入进料钉阵系统而形成的一个随机阵列示于图



图 5.17 在合金结构的模拟研究中，Nowick 及 Mader 用一个类似钉—球机的装置产生 2 维球阵列





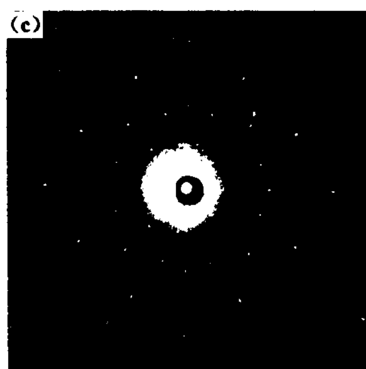


图 5.18 等径球规则阵列的照相底片产生的衍射图案与晶体的 χ 射线衍射相似，而随机排列的系统则可模拟无定形物质。(a)球的规则阵列；(b)由(a)中阵列的照相底片产生的光衍射图案；(c)一种晶体的 χ 射线衍射图案

5.19(a)。请注意这个随机阵列具有分形边界，还请注意的是除了非常小的岛外，作为整体球阵内球的排列几乎完全没有规则性。这种结构与融化的金属骤冷时产生的结构非常相似，因为骤冷时金属原子来不及排成晶格阵列。这种结构叫做无定形状态。用图 5.19(a)所示阵列的照相底片产生的光衍射图案示于图 5.19(b)，从图可见，外面的环几乎是连续

的，越向中心环则越支离破碎，这是无定形材料的结构特征。图 5.19(c)给出的是一种无定形材料的 χ 射线衍射图[24]。

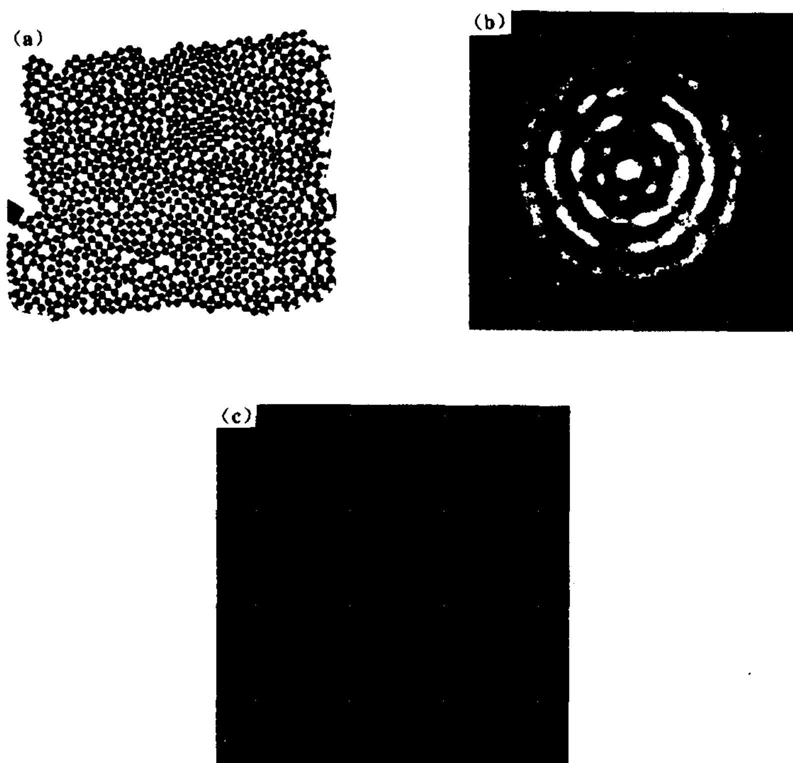


图 5.19 在 Nowick 和 Mader 钉—珠机中使用快速堆砌以模拟无定形结构。(a)随机排列的球阵列；(b)(a)中球阵列照相底片的光衍射图案；(c)一种无定形物质的 χ 射线衍射图案

冶金学家用一种叫退火的技术来改变材料的性质。词典中对退火过程的定义如下：“退火是对玻璃或金属等材料的热处理方法，其目的是去除先前作业而产生的应变，使材料减小脆性，增加韧性。退火过程通常是先将材料在预定的温度下加热一定时间，然后以某一速度使其冷却到某一温度以使材料获得所需性质。”

有趣的是，退火(anneal)一词是少数以古英语词根为基础的科技术语之一，这个词根是“aelan”，意思是燃烧，被退火的材料就是通过受控燃烧而改变其性质的。

我们现在知道，在退火过程中，材料中的原子获得足够的热能而排列成更大的规则岛(即所谓结晶体)。因此，退火温度必须足够高以使原子能进入较好的充填结构，但温度也不能太高以防原子进入材料中而未熔化成不规则结构。另一方面，人们并不总是想让被退火材料内的结晶岛长得太大。正是因为这一原因，材料在退火温度下维持的时间对退火过程的成功与否至关重要。为对图 5.19 所示的模拟无定形材料的 2 维阵列的退火过程进行机械模拟，人们对该阵列施加振动作用，这种振动给模拟原子行为的球以足够的能量而重新排列形成规则结构，但球所获得的能量又不是高到足以在板上到处弹跳(这种弹跳可模拟物质表面的蒸发和结构的熔化)。图 5.20 所示为 Nowick 和 Mader 缓慢排出的一个均匀球体的二维阵列，这种缓慢的生长速率使一些具有规则性的岛得以长大。如图所示，该阵列可分成若干个规则性的岛。不足为怪的是，图 5.20(a)的光衍射图案(图 5.20(b))表明，图 5.20(a)是介于图 5.18(b)及 5.19(b)之间的一个过渡结构，Nowick 和 Mader 使图 5.20(b)中的阵列轻轻振动而形成图 5.20(c)。可以看出，这种模拟的退火过程使得图

5.20(a)中的小岛生长成大体上由四个大岛组成的阵列。比较上述两图,可见图 5.20(a)中的小岛逐渐生长,直到在某一边界处相遇,该边界则成为分开两个规则岛的颗粒界限。图 5.20(d)为图 5.20(c)的光衍射图,它表明图 5.20(b)在向完全规则的晶体模型(图 5.18(b))进化。

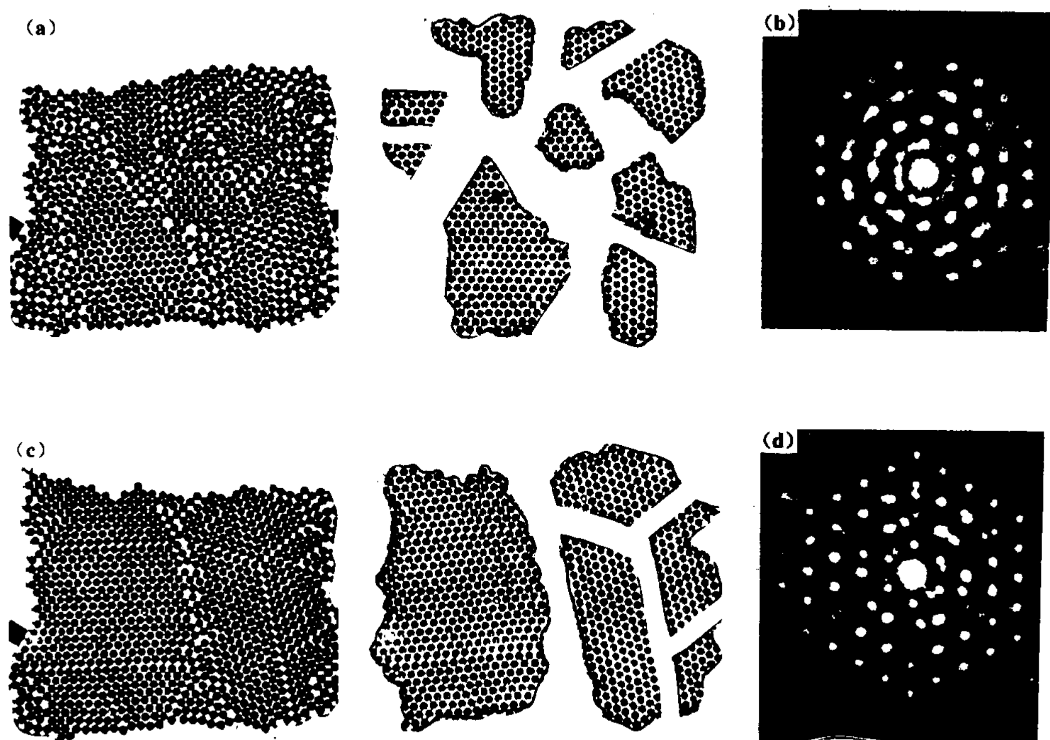


图 5.20 对等径球 2 维阵列施以轻微机械振动以模拟冶金工业中的退火过程。(a)慢速堆砌形成的球阵列包含有几个规则岛;(b)(a)中阵列照相底片产生的光衍射图案显示出介于晶体及无定形物质之间的过渡结构;(c)通过轻微振动减少随机排列的球数目而对(a)中的阵列进行退火处理;(d)(c)中阵列照相底片的光衍射图案,可见(a)中阵列经退火处理后,衍射图案向单晶的衍射图案靠近

通过考查不同退火条件下材料中的颗粒边界,并把这种边界作为正在生长的分形结构,则分形理论可在退火过程的描述中得到应用。

在图 5.21 中,由 Nowick 和 Mader 提供的一组图片可说明退火过程的进行情况。图 5.21(a)中的阵列是以缓慢的沉落速度产生的,其简化了的颗粒边界分形如图 5.21(b)所示;图 5.21(c)是上述阵列经 5s 钟振动后的结构,与之相应的边界分形示于图 5.21(d),它显然要比初始阵列的边界分形简单;在图 5.21(e)中,阵列已经过 15s 钟“退火”处理,其规则岛的边界(图 5.21(f))更为简单;经 30s 钟“退火”后,我们得到了一些空白岛和一个分成两个大晶粒的分形边界,在大晶粒的规则排列中有一些微小的错位(见图 5.21(g)(h))。在第 8 章研究裂缝结构时,我们将讨论诸如从图 5.21 的模拟阵列中抽象出来的分形结构的表征技术。我们已在某种程度上详细讨论了 Nowick 和 Mader 的球体阵列,因为这一模型在研究分形指(fractal figures)时是非常重要的,所谓分形指是在用水从砂岩中逐出石油时产生的,我们将在第 9 章中详加讨论。

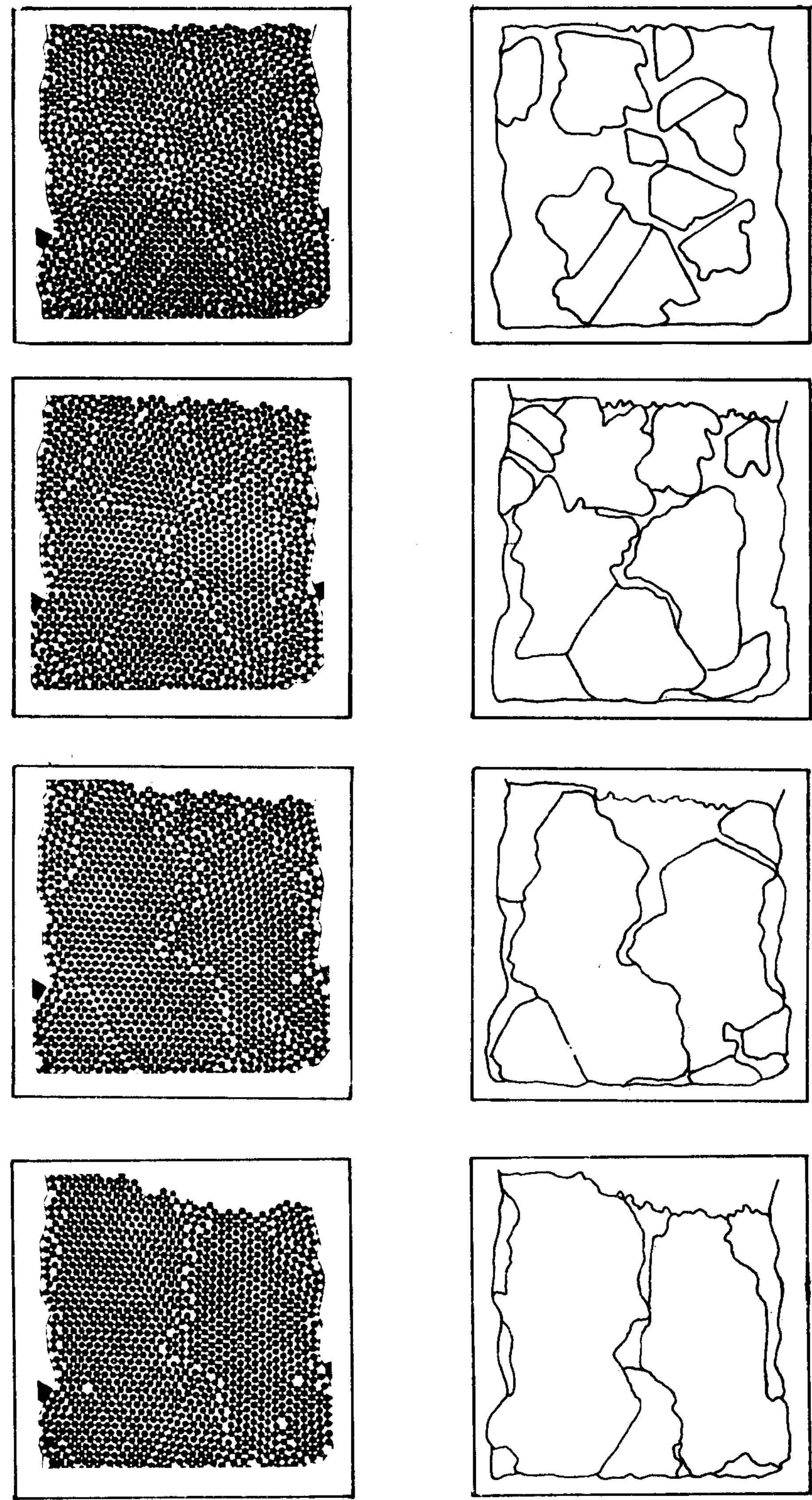


图 5.21 退火过程可由 Nowick 和 Mader 的数据说明[23]。规则岛间的边界似为分形，其复杂性随退火过程的进行发生变化

如前所述，Nowick 和 Mader 实验的最初目的是模拟合金薄膜的结构。所谓合金(alloy)就是两种以上金属的混合物，该词来源于拉丁语"alligare"，意思是绑在一起。英语中的 ligament 也与这个拉丁语词有关，它是指将物体连在一起的绳状物。在分子水平上，合金是由不同大小的原子组成的。在晶格中不同大小原子的存在使晶格发生变形，这是决定合金物理性质的一种现象。Nowick 和 Mader 曾用三种大小的球的各种混合物模拟合金的结构，某些模拟结果如图 5.22 所示。可以看出，某种原子占优势的阵列中另一尺寸原子的存在使阵列主体发生变形。Nowick 和 Mader 已将模拟合金的衍射图案与合金的性质联系起来。

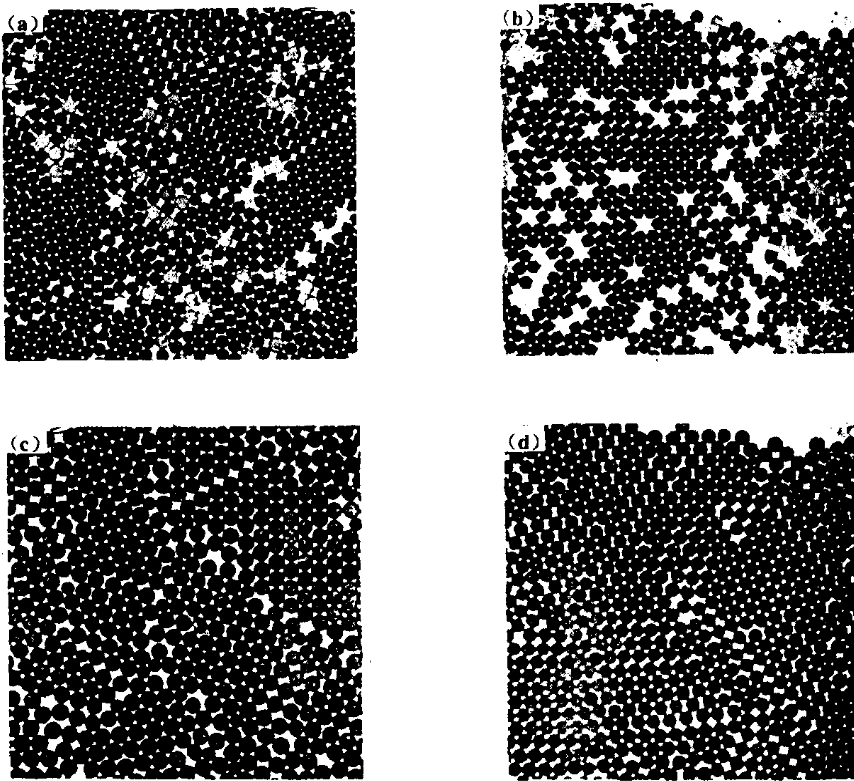


图 5.22 不等径球的混合物可用来说明合金的结构

从本书的随机行走分行的角度来看，图 5.22 中使我们感兴趣的主要是一个随机分散系统的明显成簇现象。在第 7 章中，我们会看到，图 5.22 中分散组份的结构与过滤介质上沉积的微粒集簇之间有明显的相似性。

在第 6 章中，当我们讨论分形理论在描述粉末混合过程中的应用时，将根据干粉混合中所遇到的问题来解释图 5.22 中所示系统的结构。例如，在图 5.22 的四幅图中，份额较少的小球或大球可代表在淀粉中分散的药物颗粒，而整个混合体则可看作片剂成型机的给料。显然，在这种情况下，人们会非常感兴趣于在整个系统的任意部分中分散组份的含量，这一问题将在第 6 及第 7 章予以讨论。

今天，由于计算机容量的增大及成本的降低，用计算机图形技术也可能更加有效地进行 Nowick 及 Mader 所做的模拟研究。Voss 应用 2 维随机行走模型，在计算机上模拟电解沉积中枝状晶体的生长过程，已经得到了一些非常精致而美丽的图形[25,26]。

Voss 在其电解沉积模型中所用方法的基本思想，可从图 5.23 的简化图示予以体会。实验开始时，假设一部分正方形象素被电解质离子所占据。当我们从硫酸铜溶液中沉淀铜时，图 5.21 中的黑色象素表示二价铜离子 Cu^{2+}，这里 Cu 是铜的化学符号。单词"离子(ion)"的意思是游荡者或旅行者，当硫酸铜放入溶液中时，它被电离成 Cu^{2+} 及 SO_4^{2-} 二种离子，式 SO_4^{2-} 表示负二价的硫酸根离子，它由一个硫原子及四个氧原子组成。正方形网格的底层代表沉积电极。

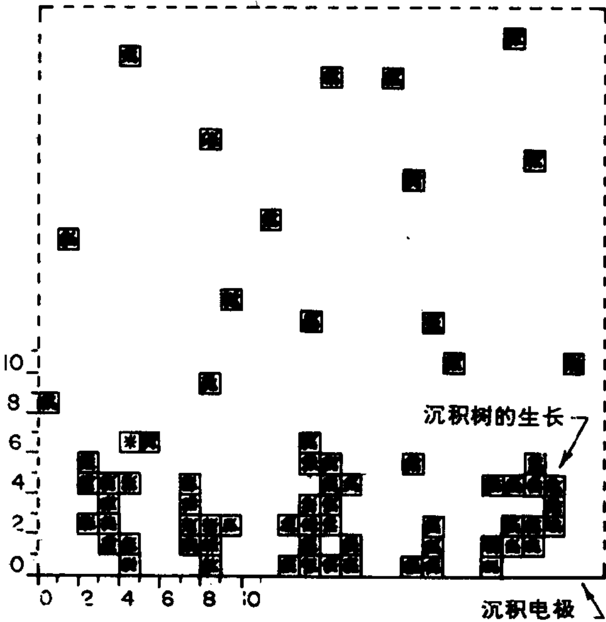


图 5.23 Voss 用随机行走模型模拟电解形成的沉积树的生长。模拟时许多象素有机会沉积到在电极处形成的树状结构上[25,26]

由铜离子占据的象素分数 f 表示电解质的浓度，远离沉积表面的被占据象素则代表可动象素。在计算机编程时，以随机顺序处理每一可动象素，并随机地选择其相邻位置之一作为该象素的下一可能位置。这样，如果我们考查图 5.23 中具有地址(4,6)并以星号标记的象素，我们将看到此象素有 9 个可能的移动位置。如果被选择的新地址未被占据，这个象素将移入新址，如果新地址已被占据，该象素则保持不动。因此，如果标有星号的象素接到随机指令向新地址(5,6)移动，计算机将发现这个新地址已被占据，从而标有星号的象素仍将留在原位。

另一方面，如果标有星号的象素移向(3,5)，计算机将检查该位置。它发现该位置是空的，还发现标有星号的象素移到新位置后与从沉积表面地址(4,0)处开始生长的枝状晶体相毗连。于是计算机让这个象素加入枝晶；但是，如果该象素移到地址为(3,6)的枝晶顶端，其与枝晶的结合仅为一点，尚不足以加入，可继续在网格空间即模拟的溶液中四处游动。当枝晶在沉积表面形成时，新的象素将进入网格空间以使枝晶生长时被点据象素的比率 f 保持不变。

Voss 还在它的蒙特·卡洛程序中引进了一个概率因子，该因子控制移动象素与沉积树正交接触后发生永久粘接或脱落返回自由空间的概率。当模拟电解沉积时，Voss 指出，改变永久粘接的概率相当于改变池中的电流。因此，如果没有电流流过电解池，则铜离子附着到生长的沉积物上的概率为零，当它碰到电极象素或已形成的沉积树时，可以看作从

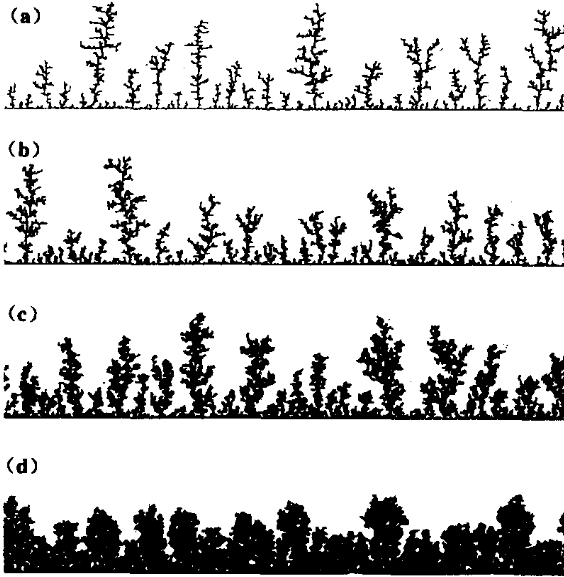


图 5.24 在给定的电解质浓度下生长的模拟沉积物结构随粘附概率而变化，此概率与电流密度成比例。对所有沉积物，$f=0.05$。(a)粘附概率 $S=1$；(b)$S=0.05$；(c)$S=0.02$；(d)$S=0.01$

沉积物上反弹回去。另一方面，在高电流密度时，附着几乎肯定会发生，用数学术语来说，附着概率 S 在高电流密度时成为 1，图 5.24 中所示为被占据象素空间的体积分数为 0.05 时，不同附着概率下所模拟出的沉积结构。从图可见，在高密度电流下，附着肯定发生，沉积是具有高分维数的枝状晶体；而在低密度电流下，用 Voss 的话来说，沉积物变得“更象苔藓状而不是羊齿状的”，图 5.24 中模拟的系统说明这样一个事实，即如果人们要想让电解质沉积成一个致密而结实的薄膜，就应该用尽可能低的电流密度。在第 3 章中，我们曾讨论过，汽车的蓄电池失效的机理之一是枝状晶体在两个铅板之间架桥而导致短路。图 5.24 中，的数据提示人们，在对铅蓄电池充电或放电时，若使用低电流密度则可延长蓄电池的寿命。图 5.25 及图 5.26 中所表明的是改变电解质浓度的影响，可见薄膜的质量可通过增大电解质浓度而加以改进。需要注意是的，在图 5.24、图 5.25 及图 5.26 中所有模拟的沉积薄膜在低电流条件下形成分形表面，此表面的曲折程度可用第 3 章所讨论的某些方法进行描述。

在图 5.27 中(即本书开头的彩图 2)，给出了 Voss 所做的一个实验的彩色图片。在这张照片中，在模拟早期形成的沉积物是红色的，稍后形成的沉积物是黄色的，最后形成的则是绿色的。可以看出，在模拟的高电流密度下，随机游动的象素很难渗透到生长的沉积物中，也就是说，移动象素很难避开生长的枝晶上海藻似的触角，这些触角看来更多地取消象素的移动而不是让它们落到较低的枝杈上。另一方面，对低附着概率下模拟的系统而言，一段时期以后形成了相对均匀的树顶。图 5.27(a)中的枝晶与窗户上生长的霜花之间存在明显的相似性。看来有理由认为，在霜晶生长过程中，枝端对水分子具有某种类型的优先捕获能力。如果人们细心观察图 5.27(b)中的苔藓型沉积物，则可发现该系统是多孔性的。在某些技术领域，电沉积金属的多孔性是非常重要的(见第 9 章关于海绵分形的讨论)。

当晶体在一个浸于熔化系统中的杆上生长时，或者当人们观察一根电线上形成的霜膜时，由 Voss 模拟的高度枝化的结构将不再适用于这种沉积物的生长。为探索在其它类

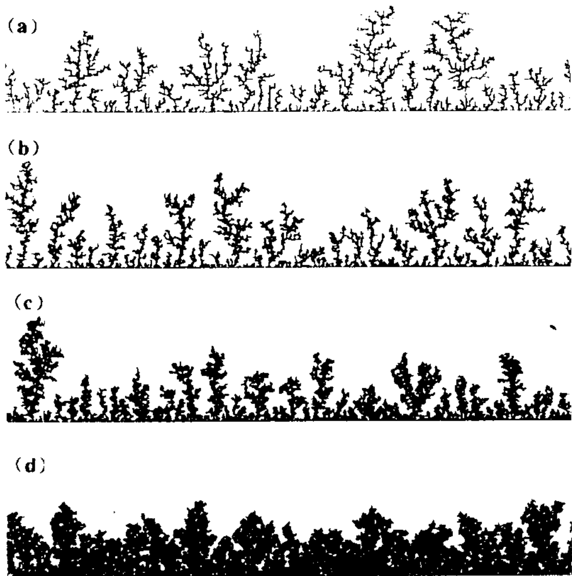


图 5.25 模拟的电解沉积物的复杂性随电解质浓度的增大而增加。对图中的沉积物，电解质浓度 $f=0.20$。(a)粘附概率 $S=1$；(b)$S=0.05$；(c)$S=0.02$；(d)$S=0.01$

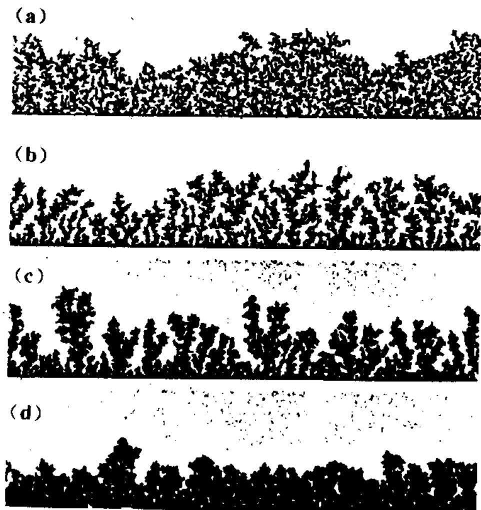


图 5.26 电解浓度 $f=0.40$ 时，沉积物实际上变为连续且有分形结构。(a)$S=1$；(b)$S=0.05$；(c)$S=0.02$；(d)$S=0.01$

型的沉积过程中不同表面沉积物的可能机理，Vicsek 在 Voss 开发的蒙特·卡洛程序中引入了另外两个变量[27]。

Vicsek 在其模型中考虑的两个额外因素是表面张力的作用以及在表面沉积结构上局部蒸发——沉积的影响。为理解这两个因素的基本物理意义，让我们考虑图 5.28 中所示的系统。其中，图(a)所示为正方形象素组成的各种不同大小的规则簇，它们代表实际上的原子簇。如果把某一具有开放式结构的正方形象素如图所示地加入每一簇中，则由于热能的变化，由象素代表的原子总会有从簇中逃逸的机会。在液体中，原子间的吸引力使任何原子簇尽可能紧密地聚集在一起，以降低簇的能量。将分了和原子簇在液体状态下聚集在一起的力叫表面张力。历史上，这个名字的由来是因为：诸如水银这样的液滴，当置于表面上时，不但不润湿表面，反而好象是被一个表层包住，而变成球状。早期科学家认为这意味着表面处于紧张状态，好象被一个橡皮薄膜包围着。因此，人们把使液滴聚集在一起的力叫做表面张力，而且延用到今。当表面分子对液体分子的拉力大于液滴内部分子的拉力时，液滴将润湿表面。在分子水平上，只有当少数分子或原子形成一簇时，簇在大小上的区

别才能对外部分子形成不同的作用力，图 5.28(a)中的开放式结构象素所代表的就是这样的外部分子。

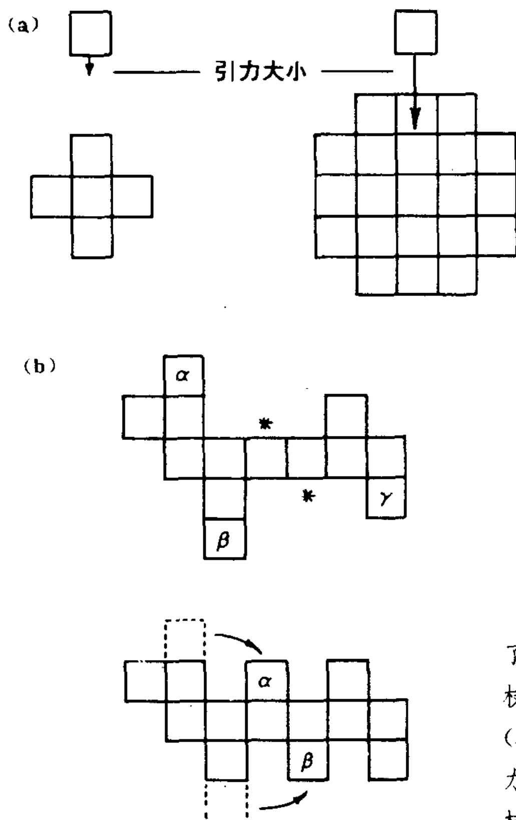


图 5.28 Vicsek 通过引入两个因素而扩展了 Voss 的沉积模型，这两个因素考虑的是到达枝状物的象素所受周围已沉积象素的作用力。(a)模拟分子到达不同大小集簇时所受到的吸引力；(b)热运动可以使一个已沉积象素暂时挣脱枝状结构的束缚，但可能且仅能被一些具有更大吸引力的表面位置(* 标记处)再次捕获

在由不同尺寸的液滴混合组成的喷射液中，较小的液滴会蒸发到较大的液滴上[28]，这一点常使物理学新生感到困惑不解。传统科学对这一事实的解释是，较小液滴的蒸汽压大于较大液滴的蒸气压，因此大液滴的增大以小液滴的消失作为代价。从分子吸引力及动力学的观点看，这种解释与下列说法相当，即分子能够从小液滴表面更有效地逸出，因为当它试图离开时，想把它拉回的分子更少些。如果我们对 Voss 的模拟系统中形成的枝状晶体应用这一理论，可以看出在晶体的枝端，枝晶上的分子对碰撞分子的吸引力较小，不足将其捕获在枝端上。因此，我们对下述事实不会感到奇怪：在一个分子间吸引力较弱的枝状系统中，枝端很难长大，撞击枝端的分子比撞上图 5.28(b)中标有星号的那些位置的分子有更大的离开枝晶的概率。用正式的物理学术语来说，就是在点 α，β 及 γ 处的表面张力比标有星号的点处的表面张力要小。当 Vicsek 在他的蒙特・卡洛模型中引入前面所说的两个因素以后，他得到了如图 5.29 所示的枝化程度较低的结构类型。如果一个分子试图离开 α 点，它可能随机地向左或向左运动。如果它向右移动，它会受到比向左移动时大得多的分子间吸引力。这意味着当该分子向右移动时，它将更难逃逸，结果很可能粘附到图 5.28(b)中标有星号的象素位置上。用计算机学科的语言来说，人们允许一个撞击象素的位置驰豫到最近的或次最近的邻位之一上，这些邻位大部分已被其它分子所占据。应该指出，这两种机理与超细粉碎的粉末的实际行为相对应。众所周知，如果人们试图贮存针状晶体的超细粉末，那么在气相中的原子或分子的运动(即分子朝向或离开晶体表面的运

动)会使得晶体的尖锐部分消失掉,而粉末的自身结块作用又会形成一些粘在一起的晶体。材料粉末性质的这种退化常常归咎于材料中的水份,因为水份也能引起同相的结果,但是粉末的结块现象也可根据图 5.28(b)中的模型而从分子吸引力的角度予以解释。新碎得的粉末与贮存的粉末之间的差异还可以解释如下事实:当研究矽肺病时,新破碎的石英粉末看来比肺中滞留的石英粉末有更高的化学活性,这也是弹药库中贮存的炸药之所以会失效的原因所在。

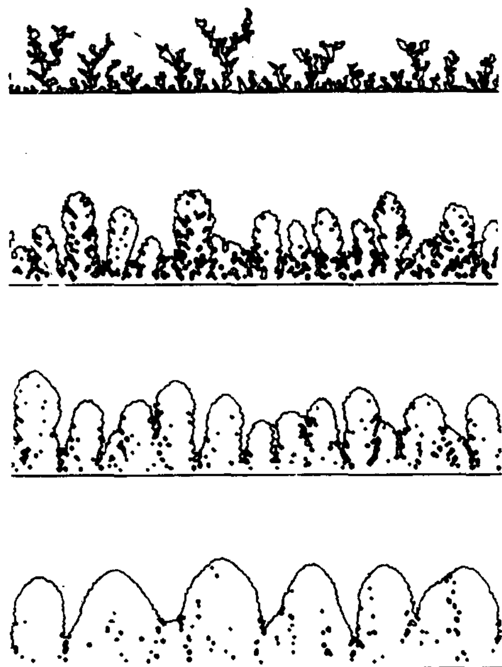


图 5.29 Vicsek 通过引进一些新的因素而能模拟不同条件下材料的结晶过程。这些因素与结晶材料的表面张力有关,也与沉积表面由于局部蒸发—沉积机理而发生的再次沉积有关。A 为与材料表面张力有关的因素;B 为与已沉积象素在相邻位置上再次定位的概率有关的因素

图 5.29 所复制的是 Vicsek 模拟出的系统,那里的因子 A 与使撞击分子附着到沉积表面的吸引力有关,也就是说,A 与材料的表面张力有关。因子 B 则与撞击分子附着后由于分子吸引力在邻近位置上重新定位的概率有关。由图可见,随着因子 A 的增大,沉积物的枝状结构趋于萎缩,而几乎是规则的结构则发育起来。Vicsek 已经证明,这种规则结构实际上具有某与沉积作用力及动力学有关的特征波长[27,29]。

Sapoval 等人使用了与 Voss 极其相似的模型来研究两种不同金属紧密接触时金属原子的相互扩散问题[30]。如果让二片像金和铅这样的金属紧蜜接触,则表面原子的随机运动将引起原子的界面渗透现象。如 Sapoval 等所指出的那样,人们通常认为两种介质间的良好连接可藉加热而实现,因为加热可增加单个原子的能量而使其更具运动性,从而越过金属界面的扩散可在适当短的时间内发生。Sapoval 等证明,扩散原子产生分形边界,而该分形边界的结构当考虑金属焊接物的性质时是相当重要的。

另一个由基本单元在 2 维空间中的随机行走而产生的重要分形系统是灰尘微粒在过滤介质表面所形成的沉积模型。在 5.1 节中,我们曾讨论了灰尘流向过滤介质的运动是一个 2 维问题,因为围绕管道轴线的运动不影响在管壁上或管底过滤介质上的沉积效率。同样,如果我们现在将注意力转移到过滤介质上的沉积微粒且不关心过滤介质上发生什么,这一问题也便简化成 2 维问题。观察过滤介质上的沉积物结构时,我们仅关心介质表面上微粒的沉积地址(X,Y),测量过滤介质上灰尘沉积总量的最早方法之一是目测介质上灰

尘覆盖面积的百分比[31]。想出这些方法的科学家们深知:在取样时,后到达的灰尘可能沉积到早先收集的灰尘微粒上,他们推导出一些公式以估计由于灰尘的重叠而引起的介质覆盖率的减少量[31]。根据实验结果,专家们推荐,当对工业灰尘取样时,为避免灰尘重叠,过滤介质表面的灰尘覆盖率应小于 5%。然而,由肉眼判定怎么样就是 5%的覆盖率是困难的。负责健康和安全的工人在监控环境中的灰尘时,有时候无意中在高得多的覆盖率下工作,使得他们对灰尘危害的估计发生错误。最近几年来,人们对工作环境中灰尘的实际物理结构日益关注。特别地,有关空气污染和工业灰尘的规章对吸入性及非吸入性粉尘的允许含量必须作出规定。在牵涉到吸入及非吸入性粉尘时,描述沉积在过滤器上的灰尘微粒的大小变得更加复杂,因为如果一簇尘粒出现在过滤器上,决定这簇灰尘是由较小的单元重叠而成还是沉积之前在空气中形成的就显得非常重要,若是前一种情况,就会造成吸入灰尘的危害问题,若是后一种情况,则不构成吸入危害。如果过滤器上灰尘簇的分类分生错误,则将导致对空气中吸入性灰尘估计的很大偏差。这一问题并非总能得到正确评价,因为科学界的一些人有时并不知道随机事件的成簇行为,同样,有些人通常也不知道一维空间中随机事件的成簇特性。许多人不能预测在过滤纸上随机碰撞是以怎样的频率形成集簇。

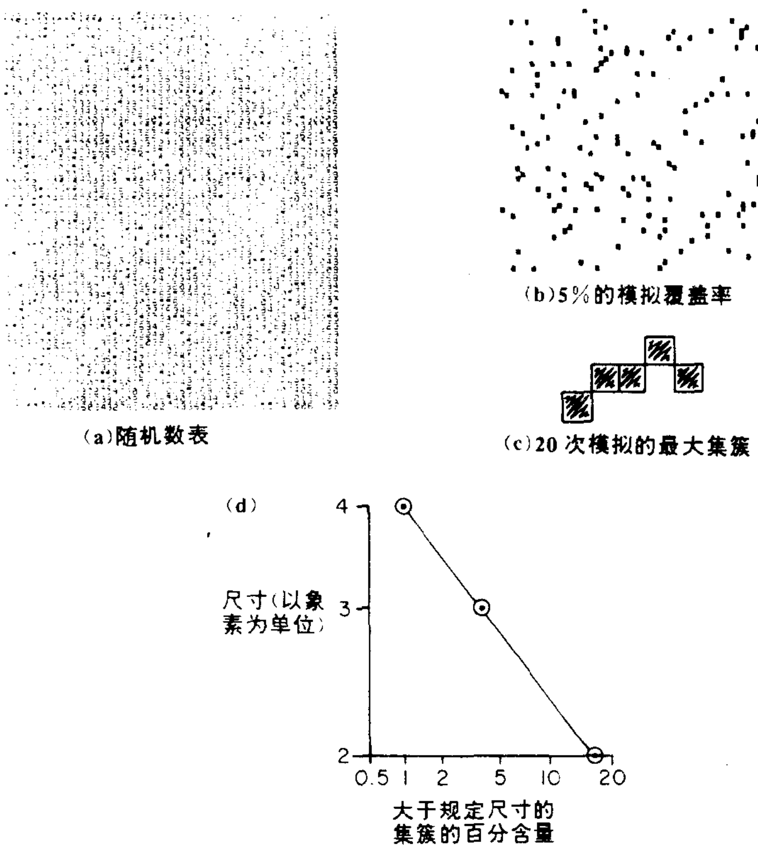


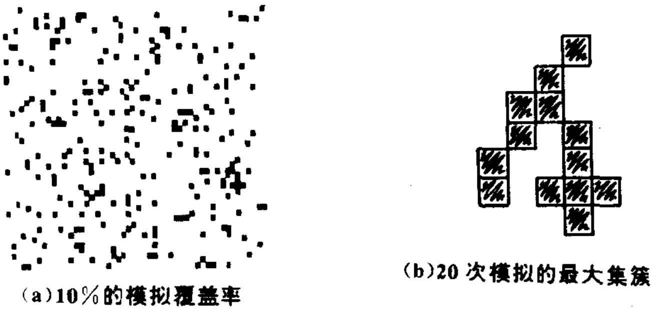
图 5.30 随机到达过滤器表面的同样大小微粒的成簇现象可根据一定法则变换随机数表而予以模拟,为了模拟过滤器的 5%覆盖率,让图中随机数表内的每个数字 8 变成代表微粒的正方形象素,假如其后邻是奇数的话

由随机碰撞在过滤介质表面上产生的惊人的成簇现象,可用一个基本的模型予以说明,该模型就是图 5.30 所示的简单蒙特卡洛程序。如果我们考虑一个随机数表的结构,按照特定的规则,我们可以让表中的每个数字代表一颗灰尘微粒。这样,为了模拟一类同样

大小的灰尘微粒在5%的表面上沉积(5%为从工业卫生学角度推荐的水平),我们可以在随机数表中一排一排地向右移动,若遇到数字8且其右邻的数字是奇数,则令数字8所占据的空间成为一个正方形灰尘微粒,且代表过滤介质表面上的百分之一面积(原文如此,疑有误。应为"N分之一面积,N为随机数表中随机数的总数"——译者注)。平均而言,数字8右边的数是奇数的概率为50%。既然数字8占据随机数表1/10的空间,故应用其一半即可产生总面积的5%覆盖。

在图5.30中,图(a)是一个典型的随机数表,图(b)则是由随机数表转换而得的同样大小尘粒在滤纸上形成的5%随机覆盖,图(c)是20次模拟转换所得的最大灰尘集簇。图5.30中的数据是在课堂上评价工业灰尘时获得的,当时教师费了好大的劲才使学生信服图5.30(c)中的高度集簇现象并不是随机数表出错所致。

图5.30(c)中模拟集簇的分形结构是显而易见的。如果我们用稍有重叠的圆重画某一集簇,可以看出这些集簇与4.5节讨论过的柴油烟尘形成的团状物很为相似(亦可参考5.4节关于柴油烟尘结构的讨论)。图5.30(d)是模拟实验产生的集簇的大小分布,图5.30(b)所示为视场的范围。



(a)10%的模拟覆盖率

(b)20次模拟的最大集簇

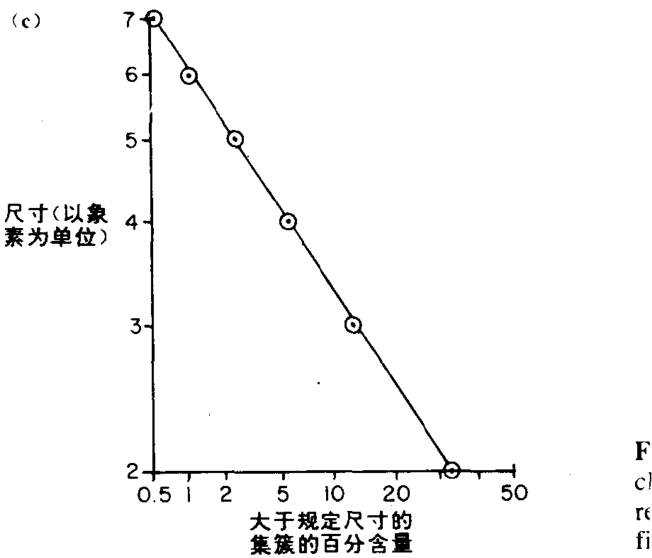


图5.31　模拟过滤器沉积中的成簇现象,覆盖率为10%

图5.31和图5.32中所给出的数据是在10%及20%的模拟覆盖率下得到的,它们与图5.30是相似的。

图5.30(d)、图5.31(c)及5.32(c)画出了由随机事件形成的集簇大小的分布图,这时

所用的图纸与4.9节中讨论过的高斯概率纸并不一样。在这种图上，横坐标的概率尺度与高斯概率纸相同，但纵坐标是对数尺度。可以证明，在这种图纸上可用线性关系描述的系统内存在许多因素的相互作用，而且系统内小概率事件（这里为大的集簇）的发生以因素间有利的相互作用为条件。虽然在随机数表的某一子空间上，数字7的实际数目的波动满足高斯概率分布，但是形成大的集簇却是一个相对来说很少发生的事件。因此，为形成一大的粒子集簇，就需要各影响因素间有利的相互作用。用科学术语来说，图5.30～图5.33中模拟集簇的大小分布是对数正态分布，而且来画这种分布图的特殊图纸叫做对数概率纸。对数正态分布在自然界及日常生活中屡见不鲜。例如，在银行中职工的薪水常符合对数正态分布，少有的高薪者必具备有利的条件，甚至是难得的条件。因此，一个公司中收入最高的人可能是主要控股者的公子或是老板的佳婿，这当然是些小概率事件，它对普通员工的平均工资并没有什么影响。在第4章中我们曾讨论过，一段时间内的一系列事故是按某一确定的平均事故率发生的，这一点是多么地令人难以置信！同样，2维空间中的事件簇有时会使人们恐惧不安，因为人们不理解2维空间内的同一地方是怎样频繁地发生随机事件的。如果将图5.30(b)及(c)中模拟的沉积物看成癌症的死亡率（这里，一座城市中一年内每10户人家癌症的死亡率是5%），那么，人们可能很难相信图5.30(c)中的癌症簇（即癌症在某一地方集中出现——译者注）会随机发生。在模拟市民对某工厂污水的反映时，这样的集簇现象也会发生。研究公众疾病的专家叫做流行病学家，而研究流行病在社会上的传播以及癌症在体内的扩散都可从分形几何中获得助益（见参考文献[34]中关于传染病及癌症病毒转移的讨论）。

有趣的是，对空气传播的灰尘的许多研究表明，这些灰尘的尺寸分布可以用对数正态分布函数描述。但这种分布是在过滤器上形成，还是在过滤前存在于空气中，却非总能得到清楚的说明[21,32]。显然，为确定在什么样的滤纸覆盖率下粒度分布函数与覆盖无关，应该进行一系列实验[21]。

图5.33所示是由单个微粒重叠沉积而模拟出的灰尘集簇，这里所用的蒙特卡洛程序比产生图5.30及5.32时所用的更为复杂。在该程序中，沉积空间的X,Y轴分成80个数字地址，然后让不同大小的圆沉落到过滤介质表面，其圆心位置（X,Y）则由随机数表确定，而且到达表面的圆可以相互重叠。一定大小的圆沉积到模拟过滤器表面上的概率可以随假定的气溶胶微粒的粒度分布情况变化。我想提请读者注意，这里的模型是相对简单的，而且受到一些条件的约束。其中一个重要的约束是网格边界可以看作相交的尘簇。因此，当我们看到如图5.32(b)所示的某一集簇时，实际上不能断定它的大小，因为在该集簇中部的边缘上可能有网格边界越过。这种边界效应可能歪曲所测得的集簇大小分布[21]。因此，在用象分析仪分析灰尘样本时，确定哪些集簇可被计数是一个重要问题[33]。而从显微镜观察粉末大小时，通常不考虑接触到视野边界的集簇所携带的信息。

在5.1节中，我们曾讨论了醉汉从带有捕获陷阱的网格中逃逸的可能性，与此有关的一个科学问题是找到绕过随机分布陷阱的最短路径。Stanley已经用图5.34讨论了一个这样的问题[34,35]。

Stanley讨论的问题背景是一片由于疯狂的敌军乱布地雷而危机四伏的战场。假如我方的两位将军分别位于图中的A、B两点，一个通讯兵必须将一份重要急件从A送到B。

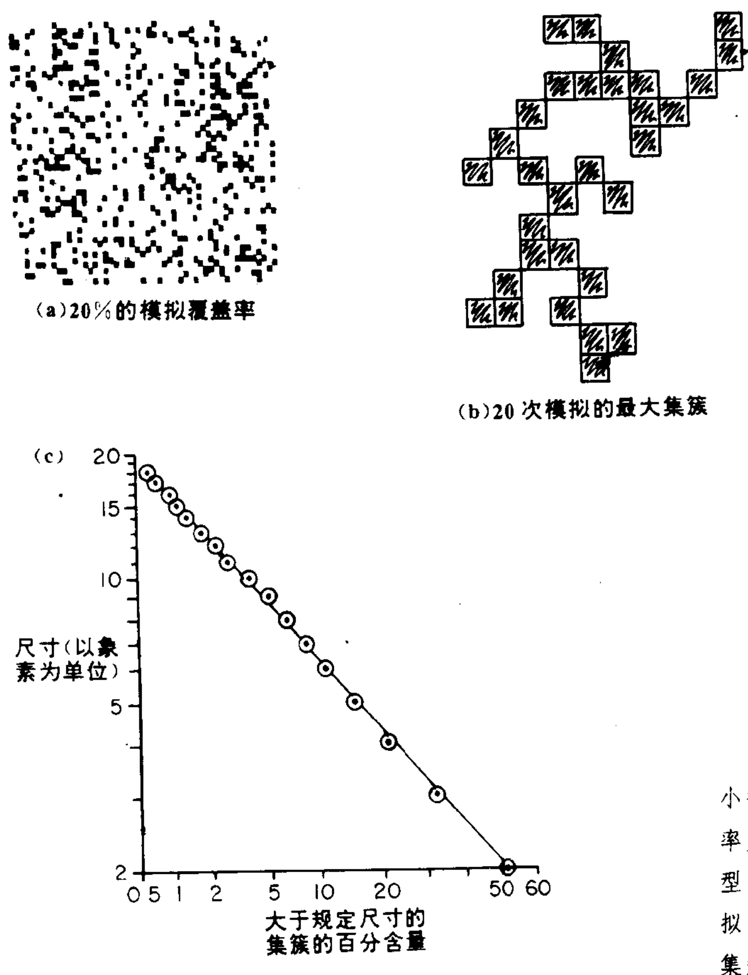


图 5.32 模拟同样大小微粒的成簇现象，复盖率为 20%且无重叠。(a)典型的模拟结果；(b)20 次模拟中的最大集簇；(c)模拟集簇的大小分布

Stanley 把 A、B 之间的直线距离称作毕达哥拉斯距离，或者用早期的术语叫做两位将军之间的乌鸦飞行距离。为估计送信所需的时间，通讯兵需要知道穿过两个军官之间雷区的最短路径，这是人们在消闲杂志上可以看到的问题。用肉眼找到这样的路径对人脑来说是一件相对容易的事，因为人的大脑有巨大的处理容量。我们在地图上轻易地发现铅笔所画的从 A 到 B 的路径，虽然也可能走错路(如走上了图中的点划线)，但我们会很快地找到最短路径。而对计算机来说，寻找通过雷区的最短路径则是一件困难的工作。我们也许永不会穿过危附四伏的雷区去送什么信，但 Stanley 告诉我们，这幅图取自于 Rilzenberg 和 Cohen 的一篇科学论文，那里它被用来模拟心脏组织中电刺激的传播。Stanley 还说，这幅图能成为与生命科学有关的许多有趣的随机行走模拟的起点[35,36]。

毫无疑问，许多读者会试图用家庭电脑模拟本书中曾讨论的一些有趣问题，当这样做的时候，读者应该审记本书 4.1 节关于在计算机上产生真正随机数的讨论。关于用蒙特卡洛程序产生随机数的问题，Dietrich Stauffer 有如下评述："产生随机数是一种艺术，而不是科学。我建议您编程序时使用简单有效的方法，只要能在计算机上进行就行。如您对结果有所怀疑，可将它与别的随机数发生器所得结果比较一下。至于其余的事，留给专家们好了"[37]。

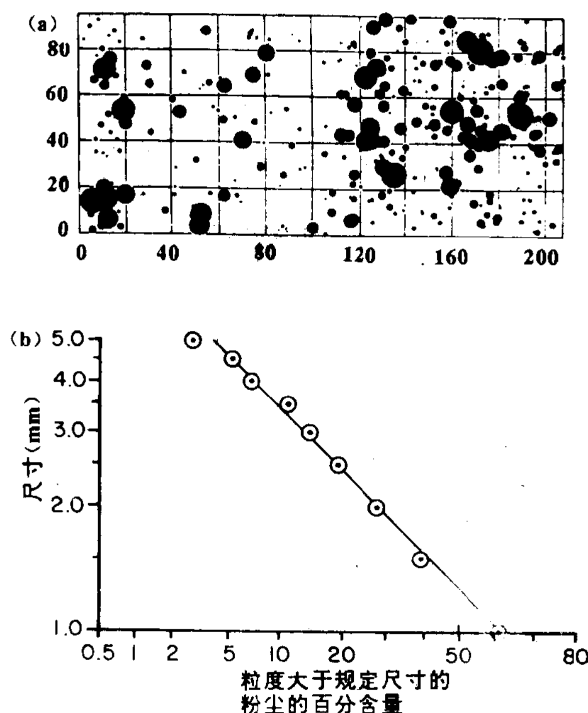


图 5.33　在模拟滤纸上沉积的集簇大小的更复杂程序中，可以允许到达滤纸的灰尘微粒发生重叠[31]

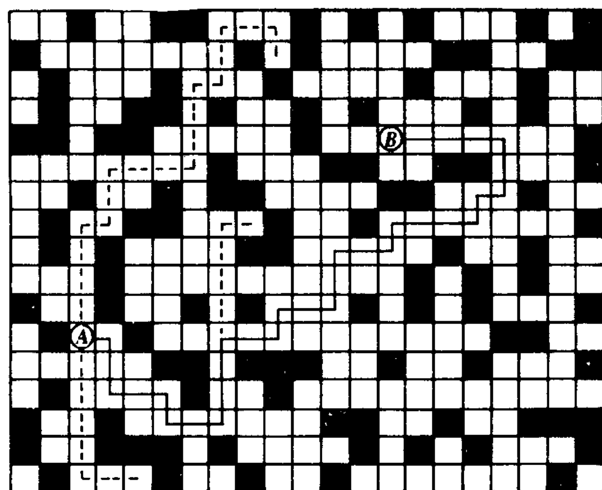


图 5.34　通过半覆盖迷宫的最短路径问题可转化为对穿越随机布雷区最短路径的讨论[34,36]

5.4　颜料涂层和渗流系统

我对于涂料结构的兴趣始于 1962 年，当时我开始为白垩粉及工业粉研究会工作[38]（该协会简称 WIPRIC）。

在大不列颠，白垩粉是一种白色颜料的名字，这种颜料是由自然沉积的纯净碳酸钙制成的。由于本节后面将讨论到的原因，白垩粉在涂料技术中用作体质颜料（extender pigment），也可用作塑料及其它许多工业中的填料，因为白垩粉（whiting）也是一种小鱼的名字，所以读者如果认为我研究的问题与渔业有关，也是可以理解的（传说渔网制造商们过去常常参观 WIPRIC，直到他们明白了这条“小鱼”在颜料工业中的意义为止）。

当我开始在芝加哥的伊利诺斯技术研究所(IITRI)工作时，我对涂料的兴趣大大增加了。

1963年我入IITRI时，该研究所与美国国家航空和航天管理局(NASA)签了一份重要合同，任务是设计用在宇宙飞船上的涂料。要研究的问题是，由于颜料微粒的曝光，传统油漆在外层空间中会失去原有的性质。这种退化作用的原因，是在外层空间油漆失去了大气层的保护、能量辐射得以持续不断地侵袭飞船的外壳。因此，设计出一种既不增加飞船的重量，又对光有尽可能大的反射系数的涂料是非常重要的。飞船外部通过反射涂料每反射走1J能量，飞船中的空调系统便可以飞船内部少排出1J热量，这样冷却系统可减少作功，从而节省了燃料。少用燃料则意味着长期航行中的飞船重量的减轻，这样又可节省把飞船送入太空的火箭的燃料。像当时由NASA所解决的许多其它问题一样，传统的工业部门所面临的问题就当时的常规工作水平来看是太复杂了。用来喷涂房子外表的白色涂料在结构上并没有太多的要求，但飞船的反射涂料代表的是一种全新的技术水平[39]。为了解我在1964年接受的研究课题，我们需要知道白色涂料的基本制造方法以及光线在涂料层内部的行为方式。图5.35是某种彩色涂料剖面的电子显微镜照片，其中规则晶体是二氧化钛，二个圆形物是有机颜料，进入涂层的光被二氧化钛晶体向四面衍射。一块大的二氧化钛晶体是透明的，它衍射光而不能吸收光。二氧化钛粉末之所以看起来很白，是由于进入粉末堆的光在涂层内径多次衍射而有效地散射回来的缘故。同样的情况可在冰块

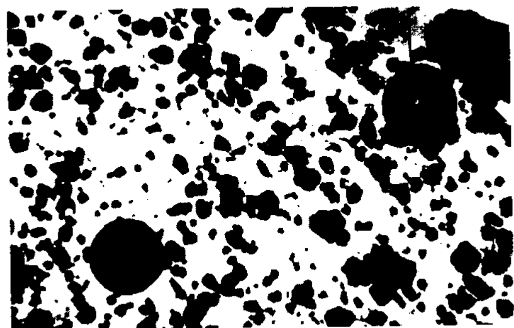


图5.35　干燥涂层剖面的电子显微照片可表明着色涂层的典型结构。图中不规则形状的晶体是白色的二氧化钛微粒。粒间空隙

中看到，不含气泡的大冰块清澈透明，带有淡淡的蓝色；但一旦锤碎，又会变成白色，这是因为许多小晶体将光线散射回来而使人们产生了白色的感觉。刚刚形成的雪粒含有微小的冰晶因而颜色最白。

应当说明的是，使涂料的反射能力最大与使涂料看起来更白并不是一码事。据说，在旨在改进飞船涂料性能一些早期实验中，NASA曾要求涂料工业部门使涂料更白些。有关厂家在涂料中放入兰色颗粒，就像在洗衣粉中加入兰色颗粒以使衬衣越洗越白那样。不幸的是，这种做法降低了涂料对外层空间中辐射能量的整体反射能力。这种微小的兰色颗粒是吸收紫外线的晶体，同时产生荧光，即发生可见光，但是它们吸收的紫外线辐射能比以可见光方式释放的能量更多。因此，当考虑涂层的综合能量平衡时，加进“漂白剂”虽可使涂料变得更白，但却降低了涂料对能量的整体反射能力。

用加有漂白剂的洗衣粉洗涤衬衣会使衣服表层产生萤光效应，这一点可从下述事实得以证明：将涂上漂白剂的白色织物置于灯光下，当灯熄灭后，织物仍会在黑暗中闪亮片刻。我记得曾去看过一场合唱音乐会，演员们都身着黑色礼服和白色衬衣。唱完以后，所

有照明灯都熄灭了,合唱团员本应在黑暗中退出舞台。但是,由于白色衬衣的荧光效应,本该是神秘的黑暗与肃穆的收场却变成了热闹的景观,因为观众看到许多发光的兰色三角形在舞台上上下浮动,好像一出荒诞的芭蕾舞剧。

涂料的可以看得见的"白度"并不一定要与其反射能力相对应,这种现象的另一原因是人们对涂层的不透明性和反射能力有同样的兴趣。当用涂料覆盖表面上闪亮的红色字母时,人们不希望透过涂层看见红色字母。为了提高白色涂料的不透明性,工业上经常加入少量的碳黑,但远未使涂料看起来发黑。被分散开的微小黑色颜料起辐射吸收剂的作用,可降低从被覆盖表面散射到观察者的光线能量。就像仅仅少量的有机颜料即可使涂层产生强烈的色彩效应一样、少量的碳黑可增加涂料表面的不透明性。使用这种方法以后,尽管白色涂料反射的能量少了,但对于观察者来说显得更白了。

从光学原理可以证明,二氧化钛作为涂料中的白色颜料是非常有效的,因为它的折光指数比涂料中的粘合剂(一种将涂料粘到一起的物质)要高。在图 5.35 中,将颜料微粒连在一起的白色区域就是粘合剂。折光指数(折光率)是材料对光线折射能力的度量。金刚石粉末可作为一种良好的涂料颜料,但其产量太少了。用来做"水晶"餐具有含铅玻璃比窗玻璃有更高的折射指数,所以看起来绚烂夺目。

尽管涂层中只含有很少的彩色微粒,但它们对涂料的光学性能有很大的影响,因为它们周围的二氧化钛晶体经多次折射可使光线在微粒上持续不断地来回反射。另一方面,本节前面曾提到的白垩粉,其基本成分方解石晶体具有与粘合剂相近的指光指数,因此在涂层中,与二氧化钛晶体相比,白垩粉颜料几乎是看不见的。

计算表明,空气的指光指数低于粘合剂的指光指数,其差值与二氧化钛高出粘合剂的相应值相同。因此,从光线散射的角度来看,若在宇宙飞船的涂层中含有许多微小的气泡,则对光线的反射会像含有传统白色颜料的涂层一样地有效。大量微小气泡的反射能力可以从润湿剂调制盒新生成的刮脸泡沫的白颜色得到证明。然而,坚硬的白色泡沫状材料虽然能有效地反射能量,但其韧性并不很好,在外层空间中遭到微小陨石的轰击会很快腐蚀。早些时候,人们曾试图使一种"无色"涂料市场化(这种涂料的白度由空气泡产生),但由于涂层缺乏韧性而未能特别成功。

在涂料工业中有一种普遍的观点,这就是从光四散的角度来看,要制造一种有效的颜料,应该使颜料的颗粒粒度与被其散射的光的波长大约相同。一般来说,这意味着颜色微粒的直径大约为 0.5μm(黄色钠光的波长为 0.55μm)。正是涂料工业中的这种"民间传说"使我参与了有效的飞船涂料的设计工作,因为根据判断,我们应该设法寻找一种最佳的颜料粒子尺寸,使飞船涂料获得最大的光散射能力。我参照颜料粒子关于散射性质具有最佳尺寸的"民间传说",把注意力集中在我认为对于涂层性能来说具有同等重要性的一方面,这就是防止在干燥后的涂层内发生颜料微粒的成簇现象。在制作涂料时,如果颜料微粒聚结成簇,则不利于形成 0.5μm 大小的均匀球粒。另外,以我粗略的想象,拉长的晶体可能比同样大小的球形微粒更有效地散射光线,当然这并不否认颜料颗粒大小的重要性。事实上,我个人认为,在 0.3μm 以上的范围内,颗粒越小,效果越佳,但这并不是由于单个微粒具有任何特殊的光散射性质所致。对给定的颜料来说粒度越小,其在涂层中的散射表面就越大(请注意,飞船的白色涂料不能含有图 5.35 中的有机色素)。

当应要求观察像图 5.35 中这类涂层的断面图像时，我曾指出，人们很难确定那些相当大的粗糙颗粒是由颜料制造过程中产生的单个微粒还是在涂层中随机形成的集簇。然后我作出这样的假设，即提高涂料反射能力的方法可能不在于关注颜料的颗粒大小而在于研究颜料微粒随机成簇的频率。如果人们能够在涂料的干燥过程中防止成簇现象的发生，或者能够在颜料制造时加进某些东西，那么也许可以改进涂料的反射性能。

当我假设涂层内部的颜料形成集簇可能是一种重要现象时，我们发现关于在给定的颜料负荷下集簇随机出现的频率的信息是惊人的缺乏。涂层内颜料负荷的有用度量是颜料的体积浓度(PVC)。某一涂层的 PVC 是在该涂层干燥后其中的颜料总量，用颜料所占涂层的体积分数表示。这样 0.2PVC 表示实际颜料占涂层体积的 20%。

为了获得在不同的 PVC 水平下涂层中随机出现的颜料集簇的信息，我们进行了一系列实验，以模拟在模拟的涂层空间内粒度均匀的颜料微粒的成簇现象。

为模拟涂层内颜粒颗粒的随机位置，可从随机数表中选择 X,Y 坐标以点据网格中的单元正方形(象素)。当某一位置被选出时，如果该位置已被颜料象素所占据，则置这次选择于不顾而进行下一次选择，当考察这种颜料集簇的生长时，人们感兴趣的仅仅是可散射光线的单个颜料微粒的减少，而不是集簇形成的凝聚物强度，因此，对于这类集簇所有接触方式，包括对角接触和正交接触都对簇的生长作出贡献，从而都使单个散射中心的数目

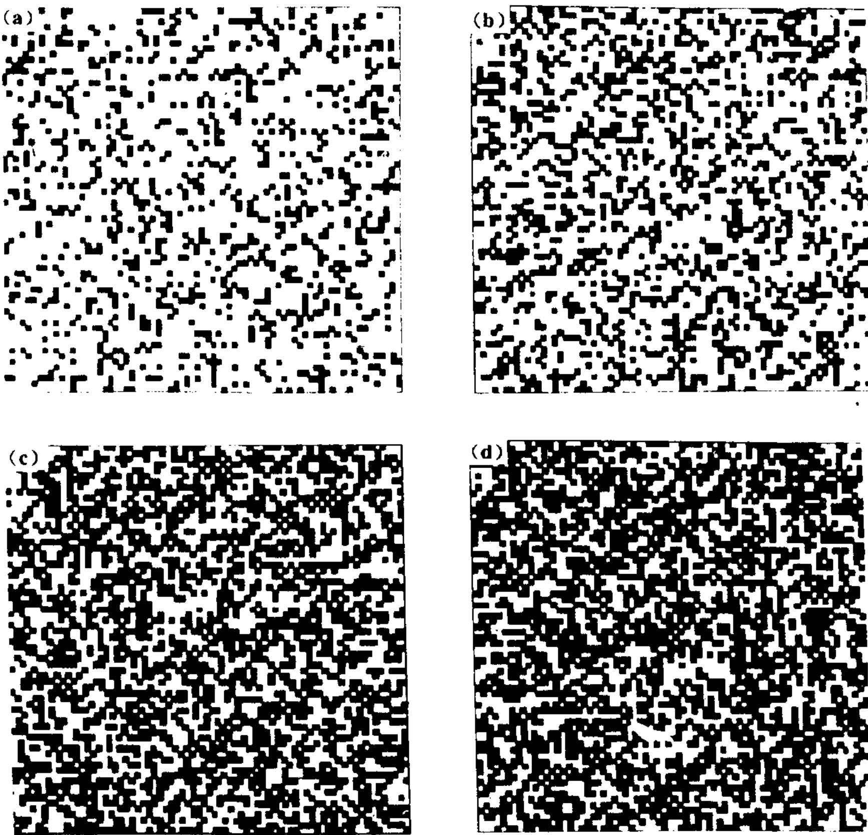


图 5.36 不同颜料浓度下等径颜料微粒的模拟集簇。
(a)PVC=0.2
(b)PVC=0.3
(c)PVC=0.45
(d)PVC=0.5

减少。在图 5.36 中所表示的分别为 0.2、0.3、0.45 和 0.5PVC 水平的模拟颜料集簇[40]。

图 5.37 归纳由于成簇作用而使散射中心减少的情况，给出了不同 PVC 水平下模拟

涂层内单位面积上的散射中心数目。从图可见，当 PVC 值大于 0.17 以后，散射中心的绝对数目减 少了，这一点与下述事实是相符的：在模拟研究中，当 PVC 值大于 0.17 时，一个被选择的象素加入集簇的概率要大于形成独立散射中心的概率。有趣的是，涂料文献的查阅表明，已有几位研究者讨论了涂料的散射能力与颜料体积浓度 PVC 的关系曲线，实验确定的最大散射能力所对应的 PVC 水平，与蒙特卡洛程序预测的 0.1T 值接近[41,42]。值得指出的是，如果增大颜料体积浓度 PVC 直到所有颜料粒子及填充剂（体质颜料）粒子都互相接触，那么由 Nowick 和 Mader 所提出的混合球则成为紧密堆集的涂层模型。

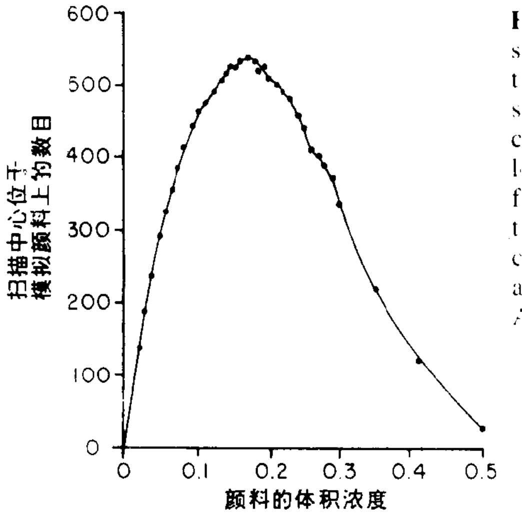


图 5.37　涂层中等径颜料粒子的模拟集簇表明，当 PVC＝0.17 时，涂层中存在最多的散射中心。颜料浓度大于此值时，粒子成簇的概率增大，散射中心反而减少

如前所述，白垩在涂料及塑料工业中用作颜料填空剂。以重量计，颜料填充剂比涂料及模塑产品中的有机粘合剂便宜，因此白垩被大量加入涂料及塑料中以降低产品成本。许多其它粉末也被用作颜料填充剂，如粉笔屑、石板粉及硅石粉等。尽管颜料填充剂最初是用来降低涂料价格的，但科学家们发现，在一定的二氧化钛含量下，白垩及其它碳酸钙类填料实际上也能提高二氧化钛颜料的光散射能力。前文已提到，因为方解石（白垩的主要成份）与涂层中的粘合剂的相近的折光指数，因此白垩在涂层中实际上是看不见的。在关于涂层结构光学性质的早期研究中这一点曾导致这样的结论，即白垩粉对涂层光散射能力的改进不起作用。然而，如果我们现在考察涂层中防止成簇作用的问题，看来有理由假定这种看不见的颜料填充剂可以增加昂贵的二氧化钛粉末的散射能力，这是因为白垩粉末与二氧化钛在涂层中争夺空间位置从而对后者起无效集簇起抑制作用。

为了调查颜料填充剂在涂料中的这种可能作用，在 NASA 的项目中，我们曾做了大量实验，以模拟颜料填充剂抑制成簇的作用。在图 5.38 中，有两幅摘自 NASA 报告的模拟图。这些图及类似的实验表明，颜料填充剂确可有效防止颜料颗粒形成大的集簇，并在任何 PVC 水平下都能增加散射中心的数目。因此，历史上涂料工业部门的技术人员出于经济原因而不是涂料光学性能的考虑偶然加入的颜料填充剂事实上已经提高了一种高价颜料（二氧化钛）的效率（参见第 9 章中关于分形粉末颜料强化橡胶强度的讨论）。

证实了看不见的颜料填充剂的这种可能作用以后，我们从事宇宙飞船涂料设计的课题组认为，为提高颜料填充剂的效能，可以让每一个颜料粒子带着自己的填充剂进入涂

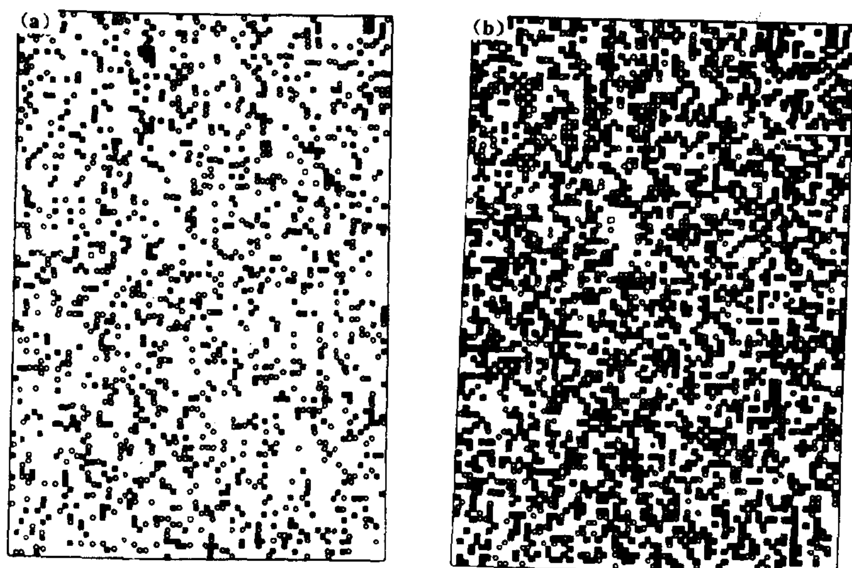


图 5.38　如方解石(白垩)粉末这样的体质颜料(填充颜料),由于其折光系数接近于涂料粘合剂的折光系数,因此是肉眼看不见的,但它们通过争夺空间位置及阻止成簇作用而提高二氧化钛涂料的光散射性能。(a)涂料中散射颜料(二氧化钛)及填充颜料(如方解石)的 PVC 各为 0.1 时,涂层的模拟结构;(b)涂料中含有 0.3PVC 高效颜料(一种散射颜料)及 0.1PVC 填充颜料时,涂层的模拟结构

料,这样,填充剂可直接“锁住”颜料粒子而较少依赖于随机作用。在进行这一工作的同时,我们还在 ITTRI 的另一个课题组从事一种装有香料液滴的微型胶囊的生产研究,这种胶囊是用在口香糖中的。我们的想法是将香料液滴装入一个胶质封袋中,使得香料在人们咀嚼口香糖之前不致挥发。我们于是开始为飞船涂料中的颜料颗粒寻找可能的“胶囊”材料,因为如果我们能够把颜料粒子装入填充剂的“微型胶囊”中,则可最大限度地防止成簇。但是,在完成该项目之前,我们的经费花光了。不得已,我们建议局部胶囊化可能是有用的。这样,如果我们能够在研究过程中加入某种物料,这种物料能在较大的颜料颗粒表面形成坚韧的膜,则可实现所谓的局部覆盖,这种局部覆盖的颜料即使形成集簇,簇的结构从光学角度来看也不会那么紧密,光子可从其缝隙中“溜出去”,从而有效地增加簇状颜料微粒的光散射能力。根据图 5.39 及图 5.40,我们可以对由局部覆盖胶囊的颜料形成的集簇类型进行评估。在图 5.38(a)可见,在相邻的集簇中,二个在 2 维空间中被填充剂部分覆盖的模拟颜料颗粒(这里假定模拟表面的覆盖率是 1/4)表明,由于填充物料的存在,在两个粒子成簇的 16 种可能组合中,光子能够穿过的集簇结构有 7 种,如果我们观察在 2 维空间中三个被部分覆盖的颜料微粒的可能集簇,我们将发现集簇的可能组合迅速增加,并且许多组合结构具有光子“溜过”的路径。当集簇继续增大时,可能的组合数很快增加到某一点,此时很难预测由于填充层的存在而被打通的颜料集簇占有多大比例。尽管如此,在图 5.40 中还是绘出了几个在最初的研究中生成的典型的复杂集簇。遗憾的是,恰恰在这个时候,我们关于部分覆盖颜料的潜在用途的研究由于经费问题而告结束了。然而我们仍然确信,“微型胶囊”是提高贵重颜料光散射能力的一个好方法。

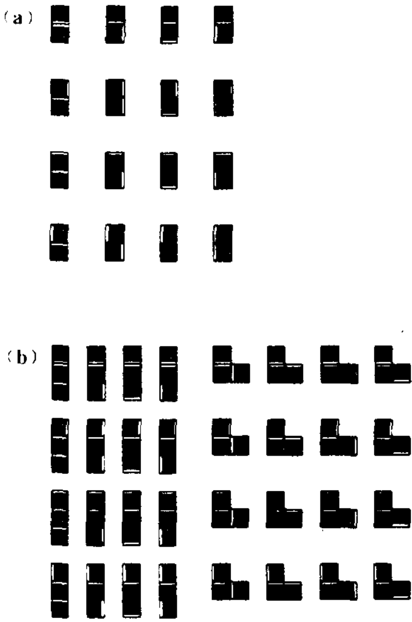


图 5.39　被胶囊部分包裹的颜料粒子本身带有填充剂，这种颜料在涂层中成簇时的随机定位有时使光子能找到路径"溜过"集簇。(a)被胶囊部分包裹的两个颜料微粒成簇的可能构型；(b)被胶囊部分包裹的三个颜料微粒成簇的可能构型



图 5.40　随着集簇的增大，其可能的构造方式显著增加。(a)未覆盖颜料微粒的典型集簇；(b)表面为填充剂复盖的颜料微粒形成的典型集簇；(c)覆盖率更高时的典型集簇

当研究图 5.35 所示的颜料涂层内形成的集簇时，颜料颗粒的形状对集簇在光学上的次紧密结构的影响曾受到质疑。因此，曾对纵横比为 2∶1 的颜料微粒的成簇行为进行模拟研究，模拟时颜料微粒在网格中的地址选定后，可以有不同的定向。图 5.41 即为在不同颜料浓度下这种长微粒所形成的集簇结构，可见随机成簇可在颜料中形成的具有分形结构的凝聚体就像在包含有长粒子的膜的模拟研究中所看到的那样。从图 5.36 到图 5.41 可见，随机定位可以构造大的具有分形结构的集簇，当然在我们做这些实验时对分形几何还闻所未闻(事实上这时候分形几何的概念尚未提出——译者注)。在图 5.35(其中已有

一些较小的子单元组成的分形结构)中,二氧化钛晶体是否已在涂层中弥散开来?这一问题不是靠研究那幅电子显微图所能回答的(参见3.7.6节中关于二氧化钛颜料的讨论)。在某些情况下,我们知道涂层中的颜料或填料在进入涂料之前具有分形结构,例如图5.42所示的分散在塑胶中的碳黑粒子就是这样的情形。

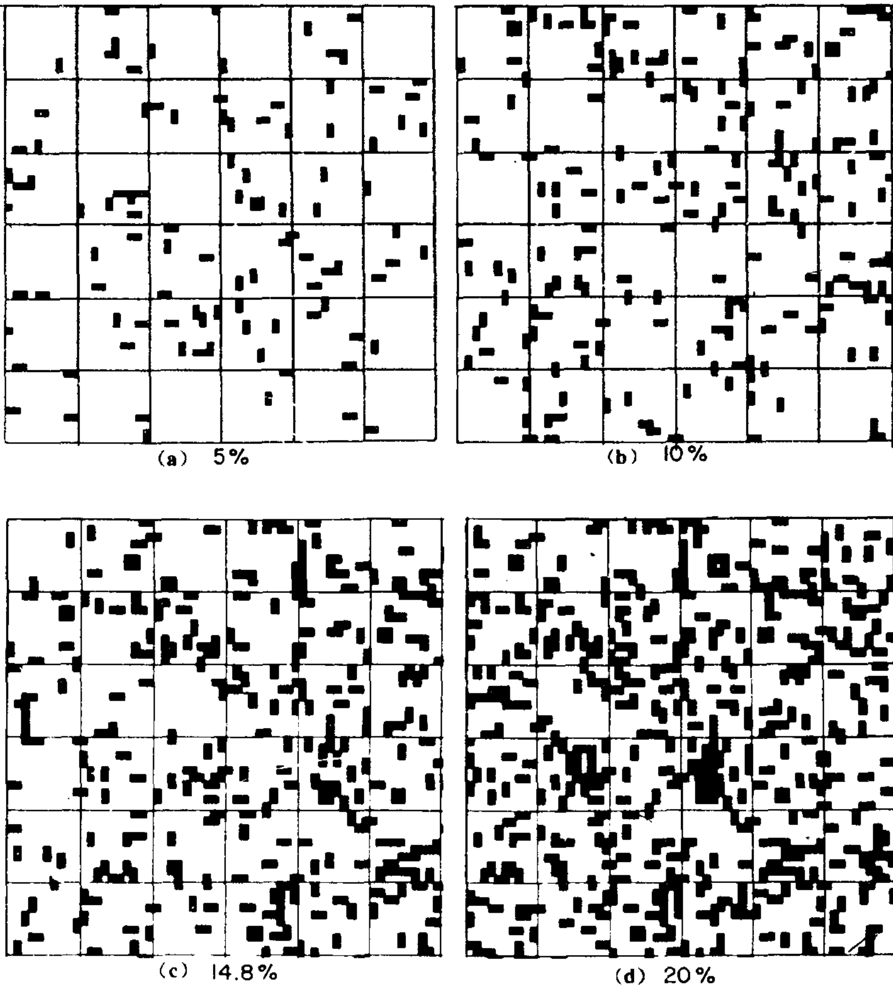


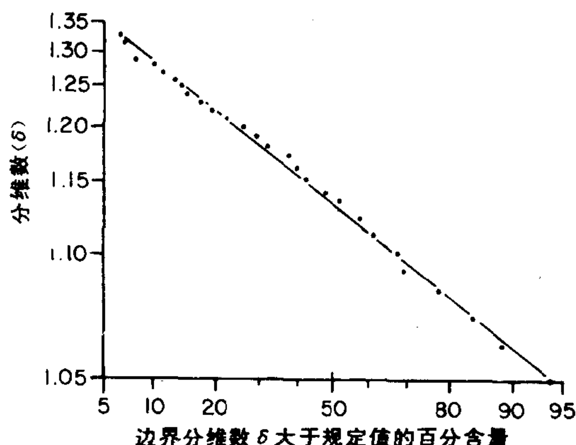
图5.41 颜料微粒纵横比为2时,模拟涂层的结构

从图5.42(b)中Trottier的数据可见,一批碳墨颜料结构分维数的分布可用对数正态分布函数描述。当描述颜料的结构特征时,在涂层中随机成簇所引发的问题,可以藉图5.42(c)所示的分散物结构来说明。一个有经验的研究者可能不相信图5.42(a)中箭头所指的凝聚体内的连接处是涂层中颜料微粒的随机触碰而形成的。为了得到像图5.42所示的那种涂层,涂料经过剧烈地分散,这种使得碳黑粒子间任何真正的联系都会变得像图中箭头所指部位那样的脆弱。(参见第6章关于这一碳墨系统的Sierpinski分形的讨论)确定随机生成的集簇数目的一种可能技术将在5.6节中介绍,那里我们将讨论用侵蚀——膨胀法处理柴油机油烟照片的问题。

图5.42(a)中,碳墨覆盖的视野占7.8%,相当于PVC为0.078。这种碳墨颜料显然具有分形结构,Remi Tottier已经测量了照片中所有碳墨凝聚体的结构分组数[43]。



(a)某珠状增色剂剖面图。箭头标注的是潜在的断裂点



(b)分散粒子分维数的分布函数

图 5.42 增色剂是静电印刷中的脱水墨粉,由分散在塑性基质中的碳黑组成,这张电子显微照片是一颗珠状增色剂的剖面图,放大倍数为 100 000。散射粒子的结构分维数可以用对数—正态分布函数描述

5.5 分形簇的数学描述

在本书的前言中,我们曾说明本书的目的之一是向生物学家及大学预科学生介绍奇妙的分形世界。如果这本书能成功地把这些读者吸引到分形系统的现代文献中来,他们很快会遇到应用诸如“旋转半径”及“傅立叶变换”这样的概念对我们在模拟的涂料膜中所建立的分形簇进行数学描述的问题。在这一节,我们将试图让一般读者熟悉这些概念,具有数学基础的读者可能会很快感到厌倦而不妨略过它;另一方面,仅满足于获得分形结构一般知识的读者也可能跳过这一节,以最快的速度继续他们在分形空间的随机漫步,而无须为这些辅助性概念的基本用途所烦恼。

当我们观察图 5.40 中的模拟集簇时,用日常用语很难描述其结构。在分形系统中构造这种集簇的科学家们已经创造了一个新的词汇用以描述图 5.40 相似的集簇,这就是“网格动物”(Lattice animals)。然而,图 5.40 中的集簇不是网格动物而应是网格昆虫(lattice insects)。为理解这两个术语的含义,让我们考虑图 5.43 所示的系统。让四个象素连在一起,则其聚集方式可分成图 5.43(a)、(b)所示的两大类。图(a)中的集簇是所谓的“网格动物”,因为象素间仅靠有力的正交接触而联接成簇,而图(b)的集簇会有对角线连接方式,则叫做非正统的(unorthodox)“网格昆虫”。读者或许记得当我们考察 2 维空间中的

随机行走与集簇生长时，我们只允许正交接触以形成强有力的连接，在某些问题中，这样做是符合事实的，因为那里对角线接触相当微弱；然而在某些分形系统中，实际情形却可能是对角接触。例如，在本节讨论过的由涂料粘合剂连接的颜料集簇中，当光子试图"溜过"涂层时，网格昆虫则挡住其去路。再如，当我们考察过滤点上所捕获的微粒时，我们发现一些微粒通过静电力互相接触而形成树状结构，这种集簇也是网格昆虫而不是网格动物。网格动物这一术语在分形几何中广泛使用，而网格昆虫相对来说则是新的名词。"昆虫"(insect)一词来源于意思是"分成二半"的二个拉丁语词，因为许多昆虫例如蚂蚁，看起来几乎是二个部分组成的，这种结构使昆虫具有相当数量的活动关节而能自如地运动。之所以用"非正统"这一词语来描述图 5.43 中的"昆虫"是为了告诫读者，在许多关于分形簇的出版物中，这种具有"活动关节"的集簇通常并不被视为一个整体〔英语中"正统的"(orthodox)与"正交的"(orthognal)两词有相同的词根，作者在这里说网格昆虫是"非正统的"有指其包含"非正交对角接触的喻意——译者注〕。读者考察分形簇的任何模拟研究时，应该仔细检查看科学家是否允许"昆虫"及"动物"在网格空间中并存。

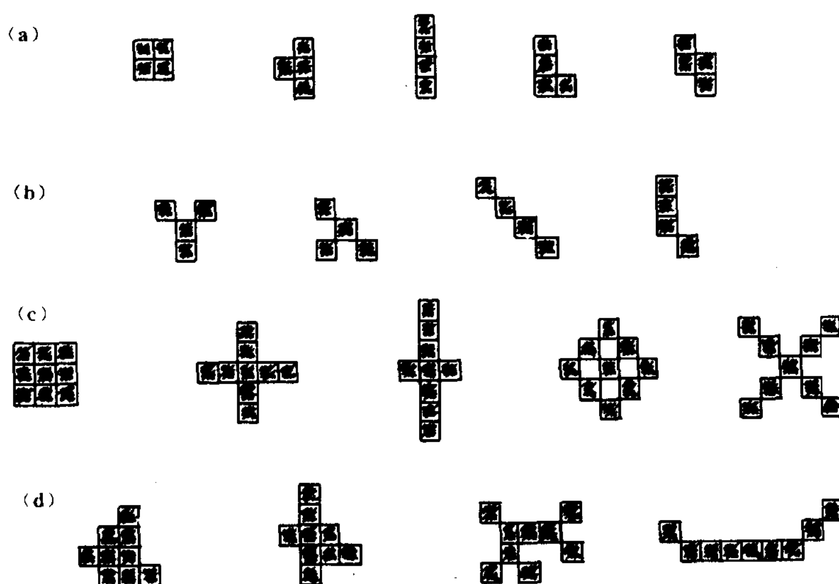
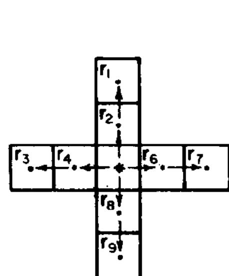


图 5.43　网格中形成的集簇依据邻近元素间的连接强度可成"动物"或"昆虫"。动物由象素间的连接而成，昆虫则在其结构中含有一个或更多的对角连接，研究统计物理学中网格占有率的正统科学家可能认为这些昆虫是非正统的，是一些在他们的网格结构中不允许存在的生物。动物和昆虫还可以分为对称的和非对称的两类。(a)四个象素组成的"动物"；(b)四个象素组成的"昆虫"；(c)更多象素组成的对称"动物"与"昆虫"；(d)更多象素组成的不对称"动物"与"昆虫"

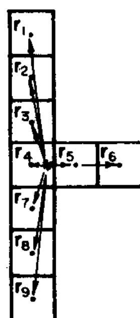
当我们着手研究具有二个以上组份的集簇时，其可能的结构，不论是运动还是昆虫都会更加复杂。在图 5.43(c)及(d)中，我们给出了一些可能的"动物"及"昆虫"。人们可以将这些集簇分成对称的和不对称的，但这种方法对描述各种可能的复杂结构显然是不够的。

科学家已经采纳一种来自于旋转物系结构研究的技术，从数学上描述分形动物及分形昆虫的结构，这种技术把集簇中的每个象素看作质量块 M 的一个瓦片，然后计算集簇的旋转半径[44]。虽然还没有任何轻而易举的方法可向不具有数学背景的读者说清楚什么

是旋转半径，但我将试着通过图 5.44 说明一个旋转半径的基本概念及其物理意义。为此，我们首先需要知道集簇重心的含义。如果我们制作一个瓦片集簇的板状模型，如图 5.44(a)所示，我们知道，要想该模型整体支在一根针上并使之平衡，则必须将针支在 P 点上，这个集簇模型的平衡点就叫做重心。我们从经验还知道，每个瓦片的重心就是这个瓦片的中心点。数学上，我们通过测量从簇的重心到各组份重心的距离来计算如图 5.44(a)所示的瓦片整体的重心。集簇重心是这样定义的：若有某一点，使得簇中所有的瓦片中心到该点的距离与相应瓦片质量的乘积之和为零，则该点即为簇的重心。对于图 5.44(a)中的简单对称簇，簇的重心就是中间那块瓦片的重心；对于非对称簇，其重心的计算则并非一个简单过程，但借助于计算机也可容易地算出来。有时候，一个簇的重心并不处于簇的物理结构之内，如图 5.44(c)中的簇，其重心就处于簇的外部空间中。事实上，如果想让该图中的集簇在重心 P 平衡的话，我们必须把从簇的重心到每一瓦片重心的距离看作可忽略质量的高强度的金属丝。

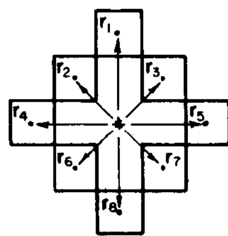


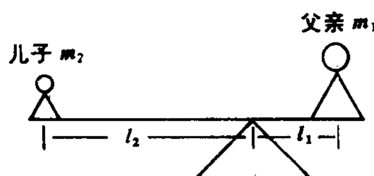
(a)对称动物的重心



(b) 非对称动物的重心可由式 $Mr_{cm}=\sum_i m_i r_i$ 求得 M 是动物的总重

(c)重心可以在动物的外部





(d)用跷跷板可以确定体系的重心

图 5.44 网格动物或网格昆虫内部一个重要的点是它的重心，重心定义为这样一点，集簇中所有元素关于该点的力矩之和为零

为说明某一系统重心的计算问题一个最简易的办法是让我们看一下父子两人在操场上玩跷跷板游戏时父亲所用的战术。提起跷跷板，这是一个小插曲。我生长在英国，在那跷跷板叫做 see－saw，而在美国叫做 teeter－totter。当我住在芝加哥时，第一次听我的孩子说起玩 teeter－totter 的事，我感到纳闷：那究竟是什么玩意？这个“玩意”就是一块放在支轴上的又长又薄又硬的木板，如图 5.44(d)所示。数学家们把跷跷板的支轴处叫做“支点”(fulcrum)，这话乍听起来似乎很技术化，后来人们明白了所谓“支点”(fulcrum)在拉丁语中不过是“床腿”而已！或许这一术语的科学意义使人想起这样一个事实：凑就第一个跷跷板的罗马父亲用的就是一块木片和一根床腿。

一个父亲带着他的儿子来到操场上，不久就发现为使跷跷板开始并保持有趣的上下摆动，他需要把最初的长度调小些以平衡中一端较轻的儿子。为表示父亲在距支点 l_1 处所施加的影响，在数学上我们将距离 l_1 与父亲的重量乘起来，并称之为矩，“矩”(moment)这个词来自于拉丁语“mover”意思是运动。因此矩就是力使跷跷板的臂成任一相似的机械系统运动的能力。当儿子的力矩等于父亲的力矩时，跷跷板则摆动正常。这时候，支轴恰好位于“木板、父亲及儿子”组成的跷跷板系统的重心处，从而达到一种我们称之为均衡的平衡状态。均衡(equilibrium)似乎是一个奇怪的词，假如我们不了解它来源于二个拉丁语词“aequils”(意思是相等)及“libra”(称量物体的磅秤)，libra 一词连同其意义已为平民大众所熟知，因为占星学上的天平宫也是这样拼写的。

这样，若我们使跷跷板保持均衡，则每一样东西都正好处于平衡状态。当我们计算像图 5.44(a)(b)及(c)中的集簇这样的系统重心时，我们可调节支轴的位置直到每个瓦片的重量矩相互抵消，从而位于重心处的支轴就像跷跷板的支点一样。从数学上来说，确定一个复杂的集簇重心的过程，包括假定一个合理的重心位置，计算关于该点的所有力矩，调正假设的重心位置直到所有瓦片关于调正后重心的力矩之和为零。

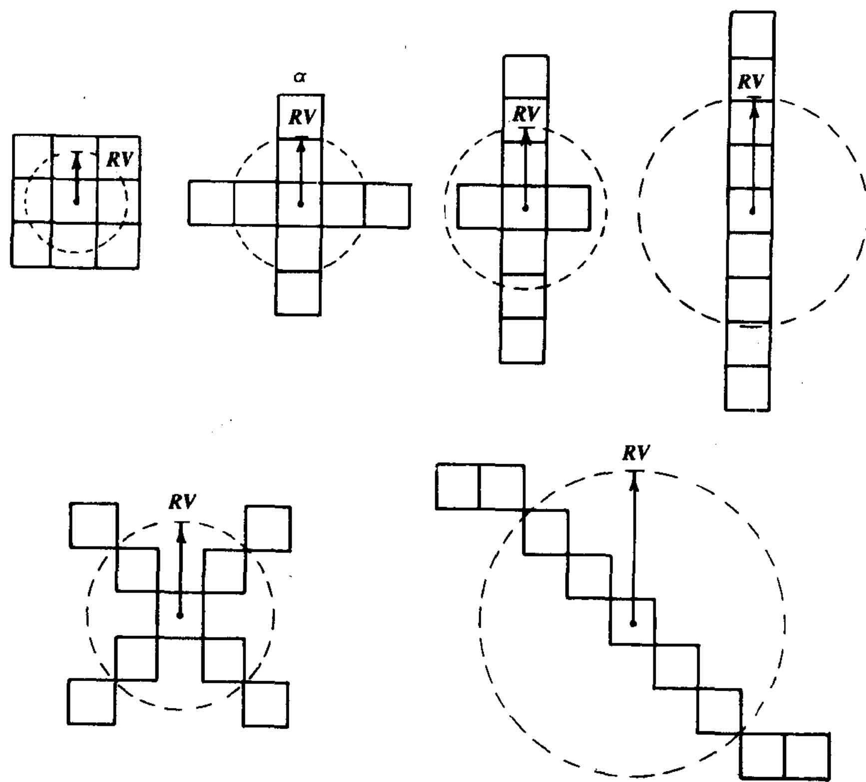


图 5.45 旋转半径是簇内质量分布的度量，可用来描述簇的结构，RV 是围绕某一轴的旋转半径，该轴与簇的重心重合

若观察图 5.45 中的集簇，我们可将其看作在儿童娱乐上另一种玩具的航摄照片。这种玩具就是旋转木马，在英国和美国分别叫做 roundabout 及 carousel。游戏时，孩子们坐在十字架的四个端点，然后木马绕着重心旋转。当我们开始考虑绕着支轴的旋转运动时，要用到惯性矩的概念。“惯性”(inertia)在某些字典中被定义为“物体藉以保持静止的性质”(惯性一词来源于原意为懒惰及很难运动的拉丁词)。因此，一个物体的惯性就是它反抗运动的性质。如果我们试着绕支轴旋转动十字架，系统的惯性将反抗运动，我们必须绕

支轴施加一个克服物体惯性的力。一个系统(如十字形集簇 α)的惯性矩在数学上等于所有单一瓦片的质量与其重心到支轴距离平方的乘积之和。数学家们把惯性矩 I 的求取公式记作如下形式是很方便的

$$I = \sum md^2 \quad (\text{对所有瓦片})$$

其中希腊字母 $\sum$ 代表“求和”。其方法是首先将每一个瓦片的质量 m 乘以 d^2，这里 d 为从旋转中心到相应瓦片重心的距离，然后把所有的 md^2 项加起来。一个物体的惯性矩不是像其重量那样的固定值，I 的值取决于运动绕其发生的支点的位置。数学家们再次发现，定义一个叫做旋转半径的数学概念也是方便的

$$I = \sum md^2 = MK^2$$

其中 M 为物体的总质量(这里就是所有瓦片的质量和)，K 即为旋转体的旋转半径。旋转半径是绕着支点的质量分布的一种度量。在分形簇结构的讨论中，科学家们经常计算簇的旋转半径以作为簇中之元素在空间分布情形的度量。旋转半径可与大而复杂的凝聚体的分形结构联系起来[44]。

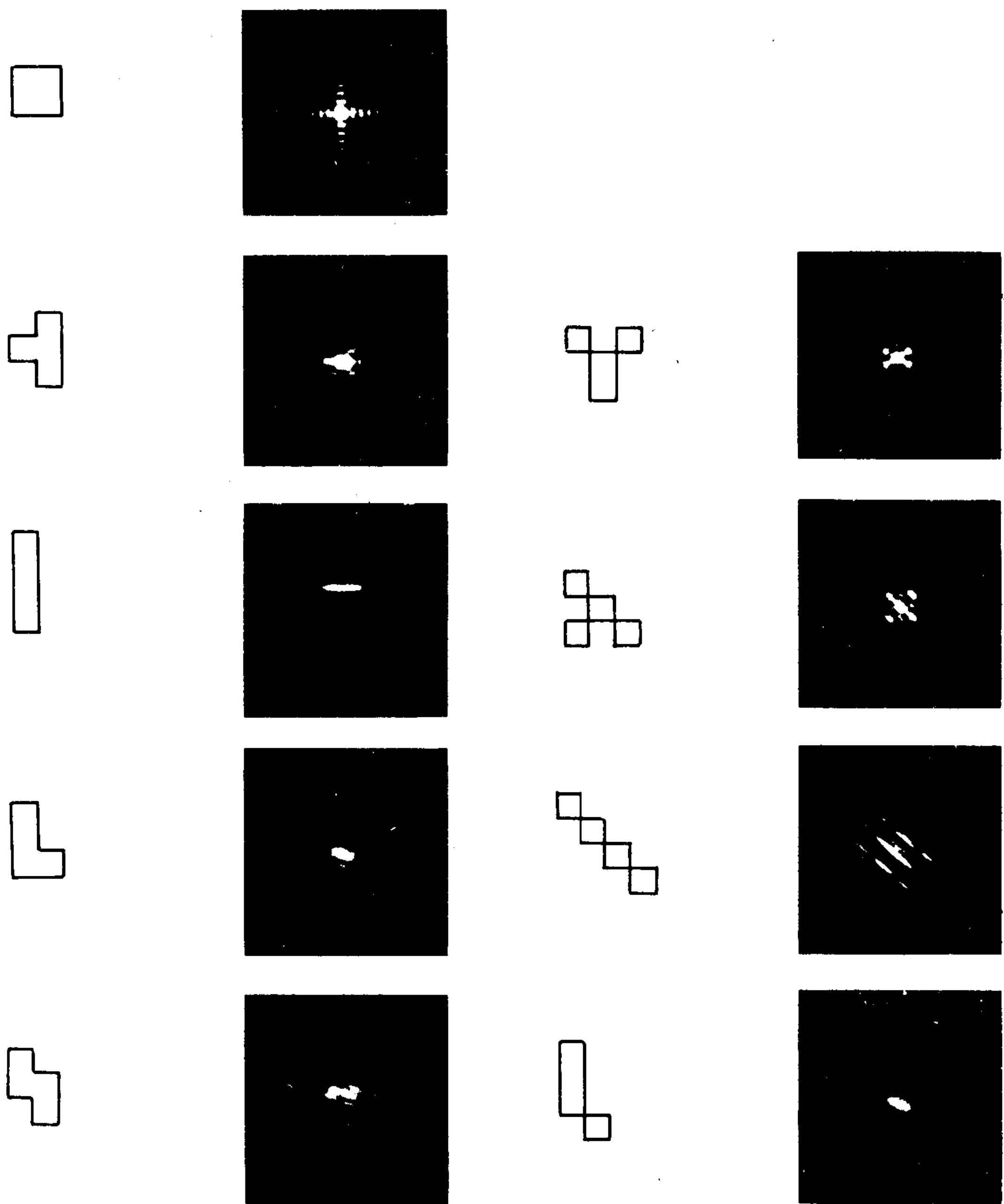
图 5.45 所示为几个网格动物和网格昆虫及其计算出来的重心及旋转半径。通俗地说，对包含相同数目瓦片的集簇而言，远离重心的瓦片越多，簇的旋转半径则越大。

许多考察过分形簇的科学家应用一种称为 2 维空间中傅立叶变换的数学工具以计算集簇的分维数。对除了现代物理学专业的学生及数学家们以外的人们来说，傅立叶变换可能被看作一种神秘的数学变换，这种变换是在讨论复杂的音符结构时遇到的。音符的性质取决于音符所包含的混合频率，这种混合频率可由法国数学家傅立叶(1768—1830)提出的数学方法予以分解。不幸的是，学生们对傅立叶变换的第一印象可能是认为这种数学方法仅适用于一维振动系统。事实上，这种方法在 2 维及 3 维中也是适用的，而且可用来变换不同系统的许多不同类型的数学描述。例如，光学理论中的 Fraunhofer 衍射图就是产生这种衍射的物体结构在 2 维平面上的傅立叶变换。实质上，当衍射物体的尺寸比所用光的波长小得多(至少小几十倍)，而且从远离衍射物体的地方观察时，即可看到 Fraunhofer 衍射图案，这种衍射图的名字是为了纪念德国科学家 Joseph Fraunhofe(1787—1826)。图 5.46 所示为用光学方法得到的图 5.45 中的网格动物及网格昆虫的 2 维傅立叶变换。当考察由不同维数的 Koch 三元岛及不同表面糙度的微粒所产生的衍射图案(图 3.19、3.20 及 3.22)时，我们已经证明，分形物体的 2 维傅立叶变换与分维数密切相关。

如果我们知道一个分形簇内每一瓦片元的笛卡尔坐标，通常可在计算机中储存足够的信息，以便应用，创造或研究某一图形。计算机程序可用来计算簇的 2 维傅立叶变换进而计算簇的分维数。许多科学家使用 5.1 节中简单提及且将在 5.7 节中详加讨论的受限扩散凝聚技术研究簇的生长，这些研究者对傅立叶变换非常偏爱。正是因为这样的原因，我已对集簇结构的傅立叶变换所涉及到的一些概念进行若干解释。[45-48]

5.6 渗透路径及比例性质

当面对图 5.36(d)中 PVC＝0.5 时的模拟涂层时，我们不妨自我消遣一回，把该图看作一个迷宫而设法找到通过的路径。这样做能否成功取决于我们穿越迷宫时需要多大的



(a) (b)

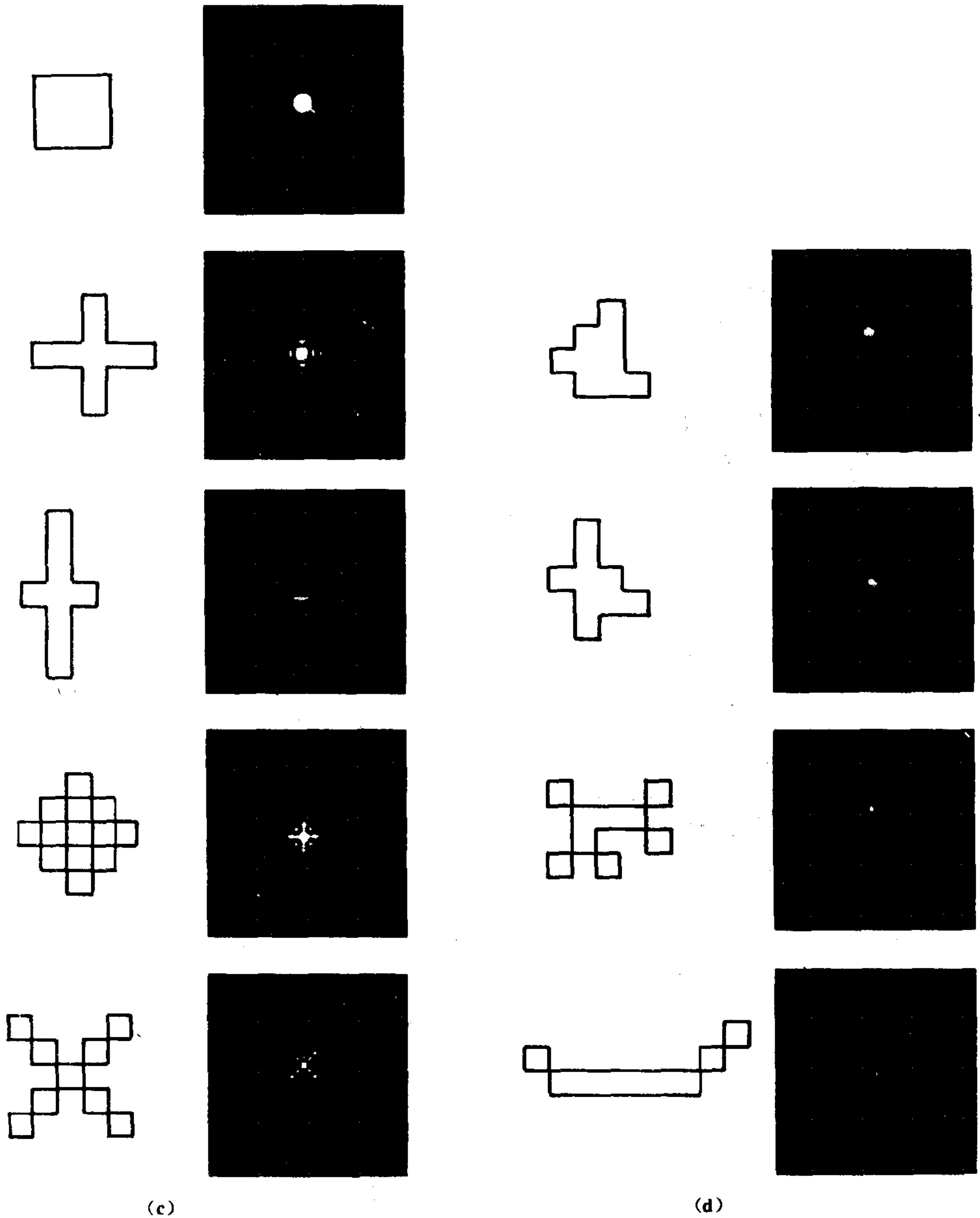


图 5.46 网格动物或网格昆虫的 Fraunhofer 衍射图案是集簇形状的 2 维傅立叶变换。图中所示为不同集簇及相应的 Fraunhofer 衍射图，后者是用激光照射集簇的照相底片而产生的

间隙。在图 5.47 的左上角，有一个显示迷宫实际结构的模拟集簇，模拟时的颜料体积浓度 PVC＝0.5。如果我们假定该迷宫中以对角线连接的象素的连接处是可以通过的话，则穿越迷宫的不同路径如图 5.47(a)所示，图中还画出了另外一些通道，这是一些未被迷宫的实际结构搅乱的小胡同。从图可见，虽然有许多道路堵死了，我们还是可以穿过迷宫。乍看起来，允许挤过对角连接的象素交点似乎是不合理的，但是如果白色正方形(即未被占据的网格元)是铜片的话，我们则可以认为两个象素的对角线切点大到足以让电流通过，

从而穿过迷宫的路径可以表示电流的流动。在本书的第 9 章，我们将讨论裂缝在一块受挤压材料中的传播问题。模拟裂缝元之间的对角接触可以足以使裂缝穿过。因此，模拟涂层中的白色正方形可用来模拟受压岩石中的裂缝生长，而裂缝经过视野时所显示的路径则使岩石得以破碎。不过，如果我们将水从迷宫的顶端倒下，则可认为只有正交接触的白色正方形才能形成连续的水流的通道。仍用图 5.36(d)中的 PVC＝0.5 的模型，但仅考虑正交接触形成的通道，则迷宫中的路径如图 5.47(b)所示。显然我们无法走过迷宫。

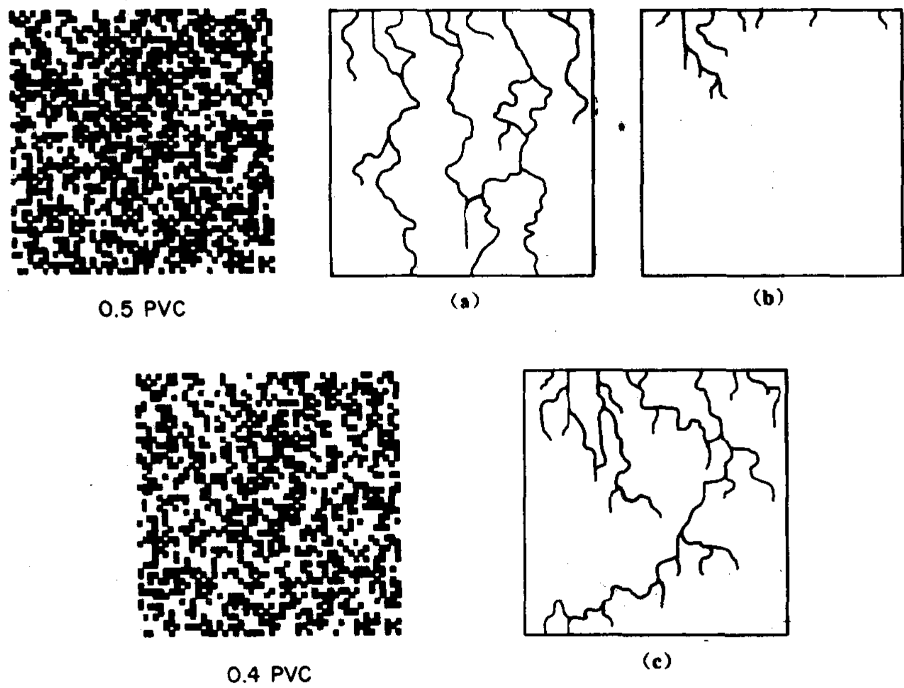


图 5.47　在 2 维网格中占据象素形成连续通道(即“渗流”)的临界占据率与允许的连接方式有关。(a)如果斜连接及正交连接都可形成路径，则当 PVC＝0.5(即 50％占据率)时即可形成渗流通道；(b)如果只允许象素正交连接，则 50％占据率时，不能形成渗流通道；(c)60％占据率时，象素的正交连接可形成渗流通道，从理论上推知，经由正交连接的渗流通道的临界占据率为 59.28％[49]

图 5.47(c)的左侧是 PVC＝0.4 时的模拟结构图，如果我们把该结构看成一个多孔体，则图中的白色区域就是孔隙，从而该多孔体模型的孔隙度为 0.6。假如将水从多孔体顶部倒入，我们将看到图 5.47(c)所示的连续路径，这时候我们就说水正渗过这个多孔体。

“渗透”(percolate)一词来源于两个拉丁语词，一个是 per，意思是“通过”，另一个是 colare，意为“流动”或“过滤”。英语中的“滤锅”(colander)也来源于拉丁文中的 colare。在词典中，滤锅被定义为一种底上带有小孔的容器，可用于过滤过分离。它是一种粗孔的筛子，在烹调时可将豌豆和水之类的东西分离开来。即水从豆粒间渗流排走；用咖啡壶者咖啡时，热水也是从咖啡豆间隙中渗下去的。在下一章中，我们将再次考察滤锅与咖啡壶这两样东西，并将看到两者都可作为研究过滤机及过滤过程的模型。在 2 维及 3 维网格内构造集簇并让其长大，直至渗过网格空间，这种研究是统计物理学的重要分支之一——渗流理论。当我在分形几何的讨论中第一次听说“渗流物理学”这一名词时，我遇到的是一些研

究渗流路径形成之前在网格上构造集簇的统计物理学家，我对他们如此偏爱于“渗流理论”这一术语感到困惑不解。这些物理学家所做的工作，如果叫做“渗透前集簇形成的统计研究”似乎更合乎逻辑。不幸的是，在 2 维、3 维乃到多维空间中簇的结构、大小及位置的综合研究已被广泛接受为“渗流物理学”的组成部分，可见，科学术语并非总是具有严格逻辑性的，有时候只有一种“习惯用法”，人们必须学会与类似这样一些不那么合乎逻辑的术语和平共处。

现在看来，当我在研究模拟涂层中颜料粒簇的生长时，我是在不知何为渗流物理学的情况下研究了渗流物理学。在我们为 NASA 所做的早期工作中，我们意识到，研究簇的生长以至形成穿过涂层的连续通道，对于设计含有金属粒子导电性涂料是非常重要的。在我们 1966 年的原始报告中，我们曾考察了簇的尺寸分布及其跨度，目的在于利用从成簇动力学中所获得的知识去预测形成有用的连续通道时金属颜料的体积浓度。用现在的术语来说，我们试图弄清什么时候簇的生长可借助于金属颜料颗粒形成渗流通道而使涂料具有导电性。

最初阅读由分形几何的统计物理学家们所写的渗流文献时，我个人曾感到两方面的困难。一是如我们已经说过的，在我的头脑中，“渗流”与“贯通”联系得如此紧密以到于我不能理解一些渗流研究者为什么对未发生渗流前集簇生长如此关注；二是因为在我本人的模拟研究中发现，形成通道时的 PVC＝0.5，这样我就不明白为什么统计物理学理论却预测 PVC＝0.59 时才能形成渗流的路径。后来我发现这一问题可从下述事实得到解答：如果仅正交点才能对穿过系统的路径作出贡献，那么，PVC＝0.59 时才能形成渗流路径。但是，在统计物理学文献中，仅正交点才能形成有效路径这一陈述常常是隐藏在文章的小号字里或被假定为已知的。这就是为什么我在早期关于簇中不同连接点的讨论中，曾反复强调读者该注意作者在其生长簇中是否允许斜交点同正交点并存的缘故。

大量的理论研究表明，如果仅仅正交点是有效的，那么用我的话来说，被占据的网格必须达到一个临界值 0.5928PVC，或者用渗流专家的话来说，在 2 维空间中渗流路径形成之前网面积的 59.28%必须被象素所充满。在图 5.48 中(见本书前面的彩图 3)，IBM Thomas J. Watson 研究中心的 R. F. Voss 等通过精巧的计算机模拟显示了临界充填密度的物理结构[54]，在 Orbach[49]的一篇文章中曾复制了这些图，那篇文章写得很清楚，使我弄清了关于渗流物理学的一些思想。

在 Mandelbrot 关于分形几何的著作出版以前，统计物理学已经对渗流进行了许多研究，Mandelbrot 的书一问世，这个领域的许多研究者们立刻意识到分形几何与他们的工作密切相关，于是很快涌现出许多关于渗流物理学和分形几何的科学版物(参见 Mandelbrot 关于这两个理论的综合论述[50])。

这方面的文献增加得如此之快以至于有人已写出专门的书籍了[51,52]。在本书的范围内我们只能介绍该领域的一些基本思想及概念。通过这些介绍，希望感兴趣的读者能从专家们的著作中发现分形几何正在现代物理学的哪些方面发挥作用。

在讨论渗流理论时，有必要定义渗流理论的三个主要分支。第一个叫做格点渗流(Site Percolation)。到目前为止，这一章中的所有研究都是关于矩形网格中的格点占据问题，我们所考虑的象素在矩形网格中占据一定的空间。这些研究只是格点渗流理论的一部

分。尽管书中所讨论的大部分内容是关于正方形网格上的正方形象素，但人们也可以用其它几何形状的网格（如6边形）观察不同类型的格点渗流（参见第5.7节中Meak提出的受限扩散凝聚中关于6边形网格的简单讨论）。渗流理论的第二种类型考虑的是图5.49所示的一类键接物的构造问题。键接渗流（bond percolation）的重要性将在本节的后面作一简要介绍。第三种渗流理论是关于穿过多孔网的流体流动问题，通常称为侵蚀渗流（invasion percolation），在本书中，侵蚀渗流将在第8章讨论，届时我们将考察流体侵入多孔体时分形锋的形成问题。

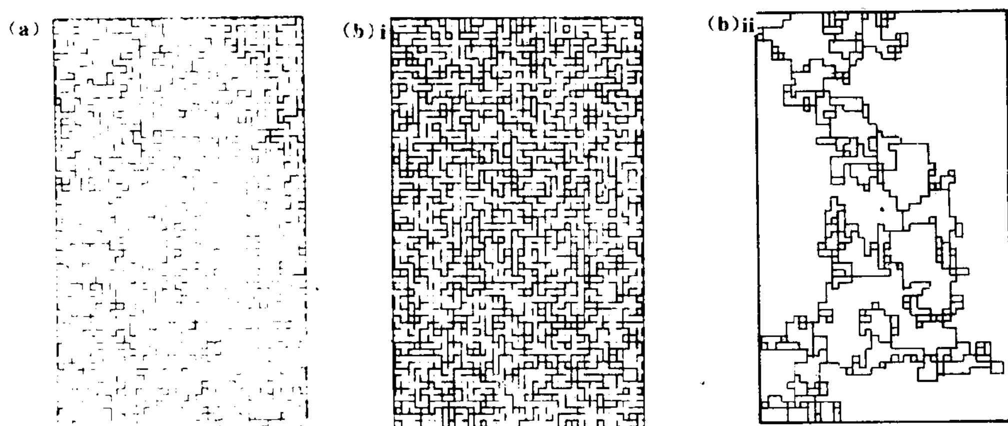


图5.49 在键接渗流中，可想象让棒随机占据网格结点间的连线，假设最初的线是塑料等不导电材料。(a)铜棒在网格中的占据率为0.2；(b)占据率为0.5时形成穿过随机网格的渗流路径

渗流研究有助于对所谓的临界现象的理解，并且也可应用于胶体形成、枝状聚合物的结构以及铁磁性与温度的关系等研究领域。

像图5.48所示的这种系统的最简单性质是网格的平均密度。如果我们考虑在图5.50所示的被占据网格中设立一个参考点，并画出一个边长为L的搜索区域，假定网格中被占据的小方格（瓦片）质量为M，则可以通过数出被占据的正方形个数而计算搜索区内瓦片的质量，再将瓦片的质量除以搜索区的面积，即得搜索区的物料密度为

$$\sigma = \frac{nM}{L^2}$$

其中σ是网格（面积为L^2）的平均密度；n是质量为M的瓦片数。

如果我们考虑的网格面积相当大，则其平均密度与多孔体结构的孔隙度有关

$$\sigma = \frac{M(1-\varepsilon)}{A}$$

其中ε是网格的孔隙度（即孔隙所占的百分比）；M是网格被充满时的质量。

对诸如图5.50中网格的研究表明，在一定搜索面积内的质量由下列关系式给出

$$M = \delta B$$

其中B是由系统的孔隙度决定的常数（将在本节的后部加以定义并讨论）；δ是被占据网格结构的分维数。可以证明，在一定数值范围内，上述方程可以写成下面的形式

$$M = \lambda^{(D-\delta)}$$

其中D为系统的欧氏维数；λ为搜索面积的边长。该关系式表明，如果我们画出平均密度对搜索面积特征长度的双对数图，则可得在考察范围内的斜率$D-\delta$。若被占据网格呈现

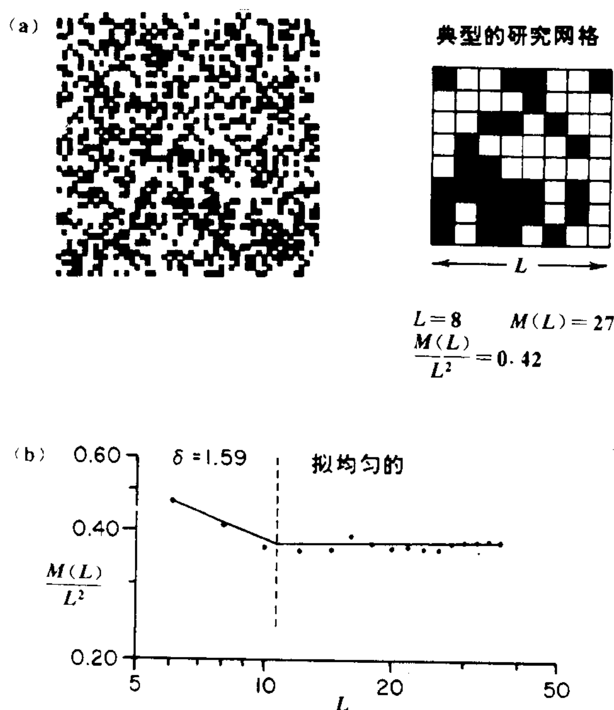


图 5.50 被随机占据的网格结构在一定的观察尺度范围内表现出分形特征，该尺度范围的下限是网格单元的尺寸，上限则是渗流极限(即刚出现渗流时)下最大簇的长度；在占据率超过临界值时，该上限尺寸则为最大"湖泊"的长度，系统表现为分形结构时的上限尺度即为系统的渗流相关长度。(a)一个被部分占据的网格，从该网格中获得的平均密度数据作图如(b)；(b)中的曲线表明在一定观察尺度范围内，网格为分形结构并可得出分维数。网格空间的欧几里得维数是 2

分形结构，则上述方法定义的分维数是 1.9[54]。

分形几何可以描述的网格密度的范围可由图 5.48 中 Voss 的数据予以说明。应用早期网格研究时所用的术语，我们记 λ 为单位象素的边长。显然，当搜索面积的边长小于 λ 时，网格平均密度的概念是没有意义的，从而 λ 是研究网格中材料密度分形结构时所用搜索面积的最小边长。Voss 已经证明，在形成一条完全的渗流路径之前，最大集簇的尺寸是搜索面积特征长度的上限，此时网格的平均密度尚未成为常量。因此，在图 5.48(a)中，白色最大集簇的边长就是搜索正方形的最大边长，在此范围内，平均占据密度呈分形分布。这个使被占据空间呈分形结构的搜索面积的上限尺寸称为渗流相关长度，记为 η。网格呈分形特征时，通常有下述关系式

$$\eta \geqslant R \geqslant \lambda$$

其中 R 为搜索圆的直径，η 为在给定面积内找到一个象素的概率为 P 时的渗流相关长度，符号"$\geqslant$"意为大于或等于。

在图 5.48(b)中，网格占据程度略高于图 5.48(a)白色集簇穿过整个视野，其结构可看作无限大。对该系统而言，渗流相关长度为图中用明亮的黄色标记的第二大集簇的长度。当搜索面积尺寸由下式

$$\eta = R$$

决定时(这里 R 为网格尺寸的 1/4)，被占据网格呈现分形结构。

当研究图 5.48(d)时，我们注意到它比其它结构更具有相似性。定量地说，这个准自相似结构的渗流相关长度比格子边长小得多，而近似等于结构中最大孔洞的尺寸。

Orbach 提醒我们，在可望找到分维数的分辨率范围内，被占据网格的平均密度由于网格中孔洞的生长而发生相当大的变化。因此，为了获得可信的分维数值，需要广泛地收集数据[49]。颗粒混合物结构的研究在工业上是一个重要的问题。例如阿斯匹林药物颗粒，

其成分中须混有淀粉(药剂师称之为赋形剂)才能制造出大小适宜的片剂)。当分辨尺度小于渗流相关长度时,混合物的分维数是粉末混合不均匀性的度量,渗流长度的大小与药片所可能具有的最小尺寸有关(药片在该最小尺寸时含有的剂量仍然合理且无大的波动)[68]。

Mandelbrot 杜撰了一个新词"Lacunarity"(孔隙度)来描述被占据分形网格的孔隙性质。这个名字的起源可从图 5.51 加以理解(见书前彩图 4)。这是 Voss 模拟出的一个随机占据的矩网格,网格的每边具有 3 000 个单位,网格的占据率为 59.9%。当我们看到这幅图片且事先不知道它代表什么时,我们可能认为它是北安大略省(有 250 000 个湖泊)或明尼苏达州(被称为湖岛)的航测照片,其中彩色部分代表村庄及城市,深色部分代表湖泊。Lacunarity 一词来源于拉丁文中的"Lacona",后者的意思是间隔,并且是英文中湖泊(lake)一词的词源。这样,结构中的孔隙即为其中的"间隔"或"湖泊",当讨论渗流系统时,Mandelbrot 还造出了 Succolating 一词来表示几乎渗透的分形系统,这个词的字面意思是"几乎流过"。我们在本书中并不会用到这个词,这里说一下只是为了完备性。

当我第一次看到图 5.51 时,我的 Rorschach 反应是非常有趣的,我把它当作了一个多孔体的剖面,实际上照片所要反映的是陶器在被烧制之前,其中的微粒是如何随机堆积而留下孔隙的。大多数人不会怀疑这些间隙是随机地留在多孔体结构中的。用 Mandelbrot 的话来说,未烧制陶器中的空穴之多令人吃惊。

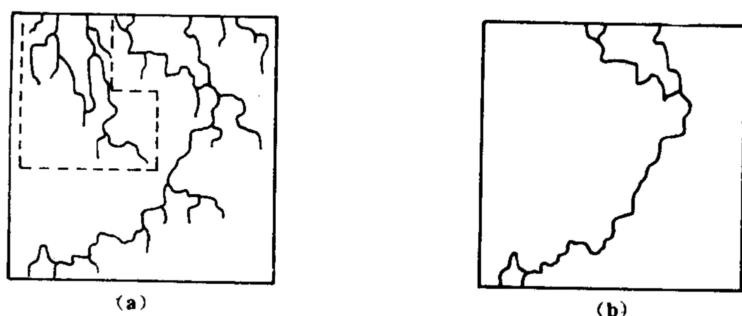


图 5.52 在研究渗流系统时,一个曲折渗流系统的"脊梁"具有重要意义。(a)连通多孔体两个表面的曲折的渗流路径;(b)从渗流体系中删去所有"悬挂端"及带有"死端"的次要路径而构造出渗流"脊梁"

在描述随机占据的网格结构时用到的另一个重要概念是簇脊(backbone of a cluster)。所谓簇脊,是指从簇的结构中除去所有悬吊着的或者是形成死角的部分后所剩下的簇的"脊梁"。如果我们让不同象素随机占据小网格直到形成如图 5.52 所示的贯穿通道,我们就在多孔体中产生了一条非常简单的路径,其渗流路径的"脊梁"则由图 5.52(b)所示。这种系统的实际意义可从微生物采矿或湿法冶金中得到印证。在湿法冶金中(湿法冶金一词在英语中的字面意思是水力采矿),我们试图使用流体中的生物或化学药剂从地下萃取有价矿物,而不需要真的开采出地下矿石。湿法冶金也可处理破碎后的矿石。在现场开采过程中,人们先使含有有价矿物的岩层裂开,然后将带有细菌的水渗入缝隙。细菌是经过严格选择的,它们可以藉生物和化学化用消化暴露在裂缝表面的有价矿物。大概说来,因为细菌是自动行走的,它们能够进入裂缝中的任何一个角落,在那里舒适地以矿物为生。然而,当由于细菌作用而溶解的矿物流生裂缝时,流体仅能沿着渗流路径的"脊梁"流动。这样当生物作用结束后用流体洗出裂缝中的有价矿物时,图 5.52 中虚线所包含的死角内的细菌就不能将有价矿物带出。唯一的希望是在矿物的生物浸出过程中,一些物理

及化学因素能够将有价矿物带出缝隙的隐秘处。例如，在采矿工业中用到的一类细菌能将硫化物变成硫酸，后者与缝隙表面上的其它成分反应而形成有价矿物溶液。反应热和/或生物作用形成的气泡有助于将有价矿物溶液带出死角而进入“脊梁”中的收集流体。另外，当有必要提供辅助营养液以提高浸出过程的效率时，“脊梁”可为营养液流提供通道。Laurientian 大学的采矿系正在研究金矿层中形成的裂隙的最佳结构问题，希望通过对爆破技术的进一步探讨以为有价矿物的生物浸出提供适宜的缝隙[67]。

渗流结构的“脊梁”已成为许多研究者的目标[34,51]。在图 5.53 中(见本书的彩图 5)，那些美丽的照片显示了枝叉横生的缝隙及其“脊梁”之间的差异，这些图都是 Voss 在计算机上产生的。在照片中，随着网格占据率的上升，簇的结构不断变化直到形成贯通的渗流路径。照片是在 600×400 象素网格上产生的。在每幅图中，最大的簇用白色表示，次者为黄色，再次者为暗黄色，更小的簇依次是橙色、红色和亮兰色，余下的则为黑色。在图 5.53(a)中，占据密度为 0.580(请记住，正交点形成的渗流路径贯通时的临界密度是 0.5928)。此时，所有的簇都是有限大的。渗流相关长度约等于着色集簇的平均尺寸，低于该长度时，对网格的分析可产生分形结构的平均密度。图 5.53(b)是图 5.53(a)中簇的“脊梁”，显然“脊梁”比初始簇小得多，另外，簇的内部具有相当大的空隙。图 5.53(c)及(d)是占据率为 0.593 时所形成的集簇及相应的簇脊，该占据率数值已足够接近于渗流贯通临界值，因此，我们可认为图中的渗流集簇为无限大。我们注意到，图 5.53(c)中的最大集簇在水平方向上完全穿过网格，在垂直方向上也几乎连成一体了，但图 5.53(d)中的簇脊比图 5.53(c)中的簇要小得多。在图 5.53(e)中，网格的占据率为 0.610，此时，最大的集簇在范围上是无限大的，渗流相关长度近似等于最大孔隙的尺寸。在这一占据率水平下，簇集也跨越了整个区域，从而表明如果这些簇是多孔物料压缩物中的路径的话，则穿过系统的通道将有许多条。Voss 等已将这一研究用以观察金箔中出现的实际集簇，观察时的覆盖密度接近于网格模型中相应的渗流临界值[56]。

研究象素空间在网格内随机占据而形成集簇的科学家们已经发现，簇的大小可以用比例函数予以描述。一个系统的某一特性可由比例函数描述，或者某一特定的物理性质是按比例变化的，这样的说法在有关分形几何的文献中屡见不鲜。比例函数的意义可由观察图 5.54 中的数据得以理解。如果我们观察占据密度为 0.1 时网格空间中产生的集簇，可以得到如图 5.54(a)所示的系统。当考察图中簇中结构时，我们允许斜交连接的存在，因为我们的目的在于观察受压物体中缝隙的生长情况。在这种情况下，簇的大小与相应频数的关系可在对数图纸上画出，如图 5.54(c)所示。图中的线性关系表明一定大小的簇的出现频率与其尺寸成比例。数学上，这一关系可表述如下

$$N(S \geqslant s) = s^m$$

其中 N 为尺寸 S 大于等于某一尺寸 s 的集簇的数目，m 为数据线的斜率。在图 5.54(d)中，我们给出了在网格随机占据率为 0.2 时形成的集簇频率与集簇尺寸的比例关系。尽管这是比例现象的一个简单例子，但它有助于弄清用比例函数描述某一系统时所涉及的概念。

前面几段中所扼要介绍的渗流理论的各个方面，可以作为计算机技术中的一个问题而通过 Kapitulnik 及 Deutscher[57]所报导的数据予以说明。两位作者研究了沉积在锗层

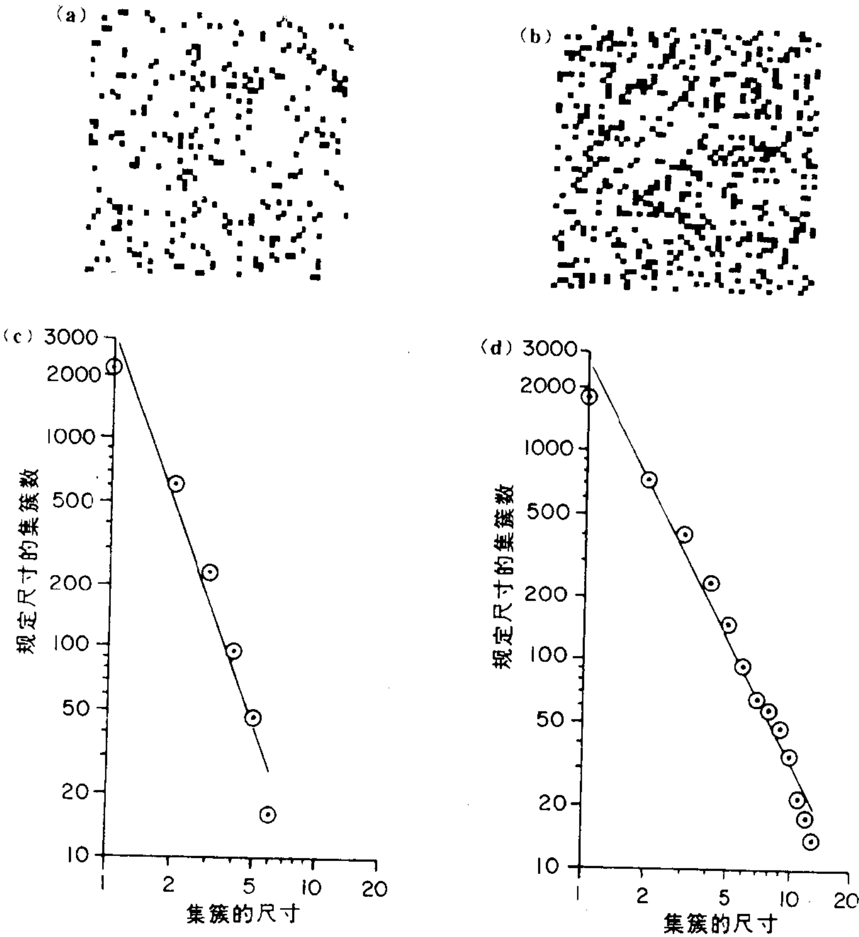
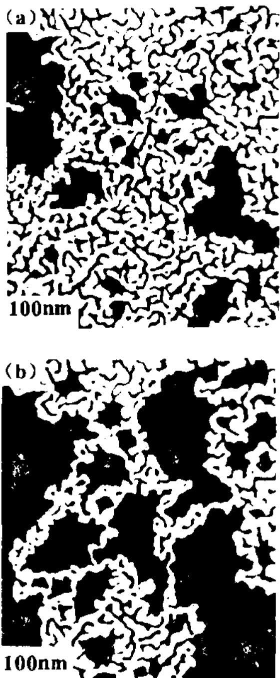


图 5.54 在被占据网格中生长的网格昆虫，其尺寸分布频数可由比例函数来描述。(a)、(b)网格的随机占据率为 0.1 及 0.2 时形成的网格昆虫；(c)、(d)在图(a)、(b)中簇的数目关于大小的对数分布图，这是一个线性关系图，说明簇的频数是一个比例函数



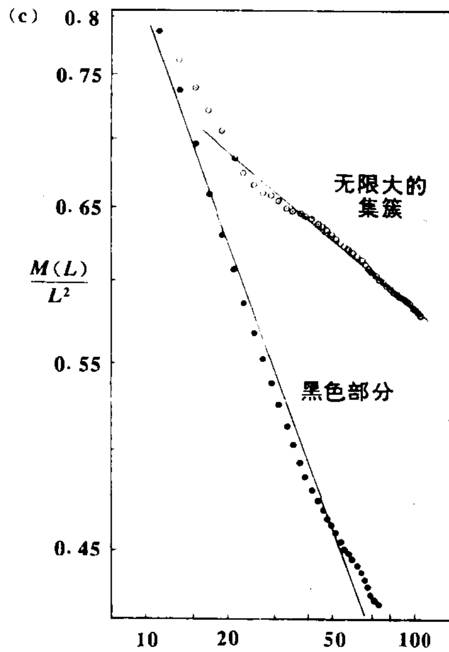


图 5.55 关于锗层上沉积的铅膜结构的研究可以用来说明描述渗流薄膜的各种分形概念。(a)在锗层上沉积的无限大铅簇的一部分，黑色部分是沿有被覆盖的剩余锗，白色回旋状结构是沉积的铅膜；(b)图(a)中集簇及其簇脊的平均密度可用比例函数描述，从铅膜的分形结构可解释这一现象

上的铅膜的生长问题。铅沉积的方式形成的结构与 Voss 等模拟的部分占据网格极其相

似。图 5.55(a)所示为两位作者所描述的铅沉积而成的无限大集簇的结构，可见，在渗流(无限大)集簇的路径中不导电的岛屿本身具有分形结构。这一特殊研究的兴趣在于沉积铅中存在的导电路径，因此从实验角度来看，渗流簇脊是一个重要的结构特征。图 5.55(a)的簇脊示于图 5.55(b)中，在图 5.55(c)中，画出了边长为 L 的搜索面积内簇脊及无限大渗流簇的平均密度(需要注意的是，图 5.56 中单个铅晶体的尺寸约为 $L=10$)。可见锗表面的平均铅密度可用比例函数描述，由曲线的斜率可从理论上推知，无限大集簇的分维数为 1.90，簇脊结构的分维数为 1.60(请注意，分维数不是曲线斜率的简单函数，而必须用 K. 及 D.[57]所建立的几何术语来解释；还要注意，无限大集簇的比例函数在 L 很小时不再成立)。

图 5.56(a)所示为表面占据率远远超过产生渗流簇的临界值时所形成的铅膜结构，图 5.56(b)则是搜索区域的边长 L 不断增加时的平均密度。从图可见，当 $L>40$ 后，平均密度几乎保持不变，表明图 5.56(a)中的铅膜的相关长度 $L=40$ ，将尺寸为 S 的集簇数目 n_s 对 S 作图，得到图 5.56(c)，此时的占据率大大低于形成渗流路径所需的临界值。从图 5.56(c)可见，簇的频数分布是一个比例函数，直线的斜率与统计物理学原理相当吻合。应该注意的是，当集簇很小时，质量(对应于集簇尺寸 S ——译者注)对频数的分布并不是线性的。如果我们考虑低占据率时簇的构造，则可以认为大集簇的形成是小概率事件；但是，当占据率接近渗流临界值时，正在生长的集簇之间的间隔缩小了，小集簇越来越难以保持同一性，因此小集簇出现的频数低于比例函数(该函数描述大集簇的结构)所预测的水平就不奇怪了。

如前面曾简要提到过的，科学家们研究的渗流结的另一主要类型是键接渗流。在键接渗流的研究中，我们取一个网格筛孔，并把兴趣放在筛孔结点间的连线上。例如 Mandelbrot 曾通过在正方形网格上形成的短棒阵列而引入键合渗流的概念，这里的短棒或者是导电的铜棒或者是不导电的 PVC。然后我们可以研究在形成导电路径之前取代筛网上的 PVC 短棒所需的铜棒数目。模拟网格上的铜棒形在的导电系统的方法之一是假设最初的筛网全部由 PVC 组成，然后随机选择筛网结点的位置，再以随机的方式将铜棒粘接到该结点上，铜棒的取向也从四个可能方向中随机选取，这样铜棒就躺在网格上并与结点相连接。图 5.49 就是以这种方式产生的具有不同占据率的两个系统。当结点连线的占据率较高时，新进入的短棒可能在所有四个方向上都不能“躺下”，在这种情况下，就要重新选择结点位置。Mandelbrot 指出，这种键接而成的网在占据率为 0.5 时应该发生渗透。确实，图 5.49(b)(i)中的系统已沿着(b)(ii)中的路径发生渗流现象。

键接渗流已被广泛研究，因为它是研究电阻网络及高分子结构的 Monte carlo 方法的基础[58,59]。Stanley 及其同事及其他研究者曾对高分子结构进行了深入探讨[34]。键接渗流还与自回避随机行走产生的网络结构非常相似，后者只有四个方向可以选择且步长为一个单位。图 5.57(a)就是一个由这样的自回避随机行走产生的键接集簇。请注意，这类特殊的随机行走在不能加入下一个“短棒”(键)时则终止进行，这是由于在行走终点遇到了死循环。这与高分子物理学中的实际情况相对应，因为如果事件链是一个随机生长的高分子，在枝叉的端点不能走出循环意味着高聚物的分子不能挤进已在链中的其它分了中间。图 5.57(b)所示是由 Stanley 及其同事模拟出的键接集簇及其簇脊，关于这一问题，

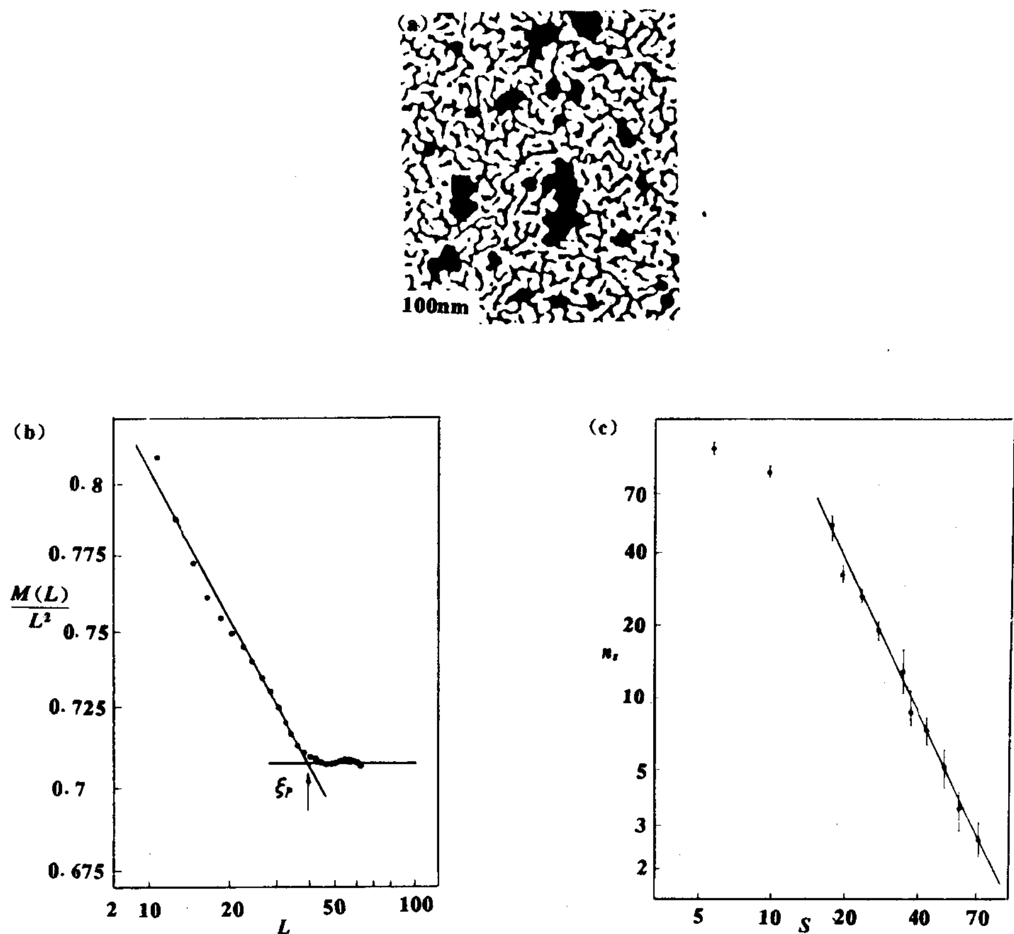


图 5.56 Kapitulnik 和 Deutscher 报导的铅膜数据也可用来说明占据率在临界值以上或以下时随机占据网格的性质。(a)恰好形成渗流路径(即临界占据率)时的铅膜;(b)图(a)所示系统的平均密度是边长为 L 的搜索正方形的函数。在 L 大于等于相关长度以后,平均密度成为常量值。用渗流物理学中的术语来说,平均密度在 L 大于等于渗流相关长度时变成欧几里得函数;(c)当占据率低于临界值且簇的尺寸大于 20 个单位时,铅膜中一定大小的簇的数目是一个比例函数

Stanley 讲过一个有趣的故事。他说,1977 年他曾在加拿大多伦多的一次物理学会议上阐述键接渗流问题。在他的报告中,他提到了在计算机模拟中产生键接集簇簇脊的困难性。会后,听众席上一名叫 Robert Pike 的大学生走到 Stanley 教授面前,提出了解决该问题的方法,于是这个学生得以和 Stanley 教授一起工作[60]。

Stanley 教授将集簇的键接类型分为如下三种:

1)悬挂端。如果集簇是由导电铜棒组成的,悬挂端将不载有电流。

2)红色连键。这是簇中一些单线连接键,其名称由下述事实而来:如果将网络看作电阻,则当电流穿过集簇时。单线连接的元素因为承载大部分电流而变红。

3)兰色链环。这是一些复合网链,载有的电流不象红色的连键那样多,因此将发出柔和的兰光。

图 5.57(c)是(b)中集簇的簇脊,红色连键由深黑线标出,浅黑线则为兰色链环。为看

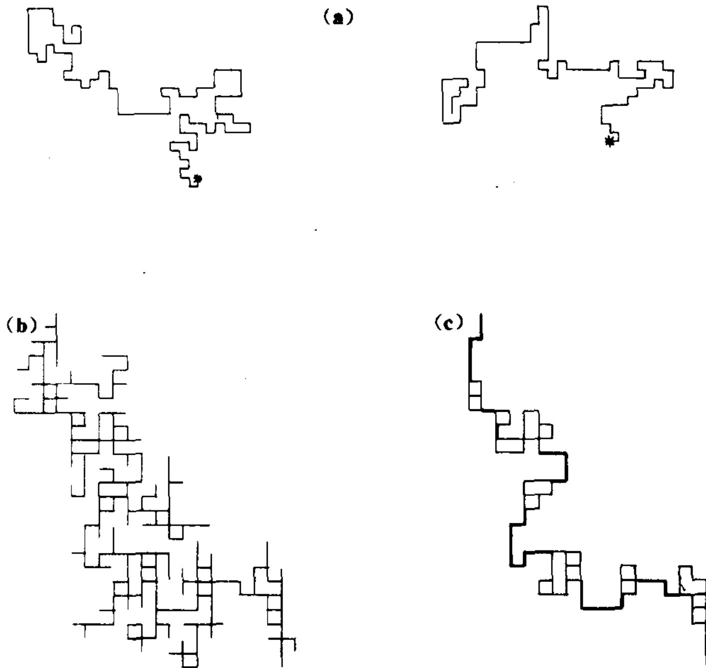


图 5.57 在键结网格上的自回避随机行走产生的集簇与聚合物分子的生长相似，并可用以研究导电网格的特性。(a)终止于死循环的自回避随机行走；(b)Stanley 及其同事们模拟出的键簇；(c)图(b)中键结簇的脊簇

到关于高分子链的更多文献，读者应从参考文献[34]中 Stanley 教授的综述性讲稿着手。图 5.57 中的渗流路径还可看作一种多孔膜中的通道，这种多孔膜是用来在一段时间内连续释放药物的。这种通过药物的连续溶解而在较长时间内释放出稳定剂量的方法已用于开发治疗宇航员空间晕船症的“粘帖”膏药。药物随机分散在一个多孔塑胶膜中，皮肤中的水分可溶解膜中的药物使其进入皮肤中，这种药物传送系统称为表皮贯通传送，传送药物的路径通常为分形结构[61,67]。

5.7 受限扩散凝聚(DLA)产生的集簇之分形结构

在 5.1 节中，我们曾通过讨论醉汉在年轻女郎周围的聚集概率而研究模拟了集簇生长的简单模型。当时，我们介绍了在 2 维空间中模拟集簇生长的 Whitten 及 Sander 方法，并在图 5.4(b)中给出了一个典型集簇。

Whitten 及 Sander 所进行的模拟在技术上称为“发射式生长网格模拟”。这一术语意味着随机运动的基本单元将自身沿随机方向向簇上抛掷，并且藉与布朗运动相同的随机行走而加入生长集簇紧密的空间结构中。

Meakin 指出，Whitten 及 Sander 进行的凝聚物生长的最初工作诱发了对凝聚动力学的大量研究，由不同研究者提出的不同模型已在应用科学的不同领域中得到广泛的应用[62]。就象渗流物理学一样，关于“分形几何及凝聚过程模拟”方面已出现了整本整本的著作[4]。这一节中我们要做的只是指出各种应用科学中的应用情况。应该注意的是，对生长的凝聚体只进行简单的“发射”而不是靠随机行走向其接近可产生非常不同的结构。Sander 指出，在这种“发射”式凝聚过程中，使集簇长大的子单元两点也似落到簇上，在最初的沉积表面上生长出相对均匀的羊齿叶状聚集物[63]。

Sander 博士已经持续与不同的合作者扩展了他的凝聚模型。例如 Richter，Sander 及 Cheng 都提出了最初模型的改进版，以对油烟凝聚物进行计算机模拟。图 5.58 所示就是上述合作者模拟的油烟微粒[64]。

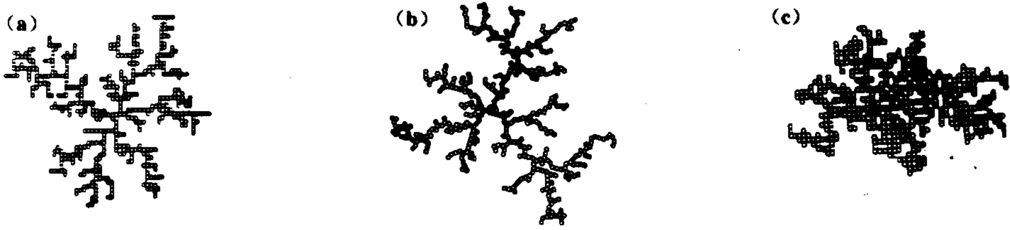


图 5.58　Richter，Sander 及 Cheng 改进 Whitten 及 Sander 提出的原始模型，对油烟凝聚物进行了模拟。(a)在正方形网格上用圆形象素形成的凝聚体(含有 500 个单元)；(b)应用比网格单位大 2 倍的圆形象素可钝化油烟凝聚物的棱角；(c)如果将加入的子单元发生永久性附着的概率从 0.1 变成 1，则由于子单元具有较大概率穿过凝聚体外围部分，从而产生较为密实的结构

在图 5.58(a)中，为使模型更接近真实油烟，原来的正方形象素已用图形象素取代。然而，图形有几何形状仍然近似于正方形。如我们以后将讨论到的，尽管使用了圆形象素，凝聚物却是正方形网格上生长的事实。在图 5.58(b)中，用来模拟集簇生长的圆形象素的直径为 3λ，这里 λ 为网格间距，象素在这样的网格上随机行走而加入集簇。从几何学上来看，这样大的象素使子单元粘附到生长的凝聚物上的角度发生变化，因而模拟出的凝聚体减少了棱角，从而接近真正的油烟粒子。模拟生长物时，一个重要的步骤是要确定加入的子单元在凝聚体表面的粘附概率。Whitten 和 Sander 的原始凝聚体以及图 5.58(a)及(b)所示的凝聚体中，都是假设当子单元到达凝聚物时以概率 1 粘附，即只要遇到生长簇就一定附于其上。图 5.58(c)中仍然应用图 5.58(a)中的模型，但粘附概率减少为 0.1，这时则形成了更加密集的凝聚物。乍看起来，粘附概率的降低生成更加密集的凝聚体似乎有点奇怪，但如果考虑到下述事实，你就会认为这是合理的。接触到凝聚体外部端点后，易动的(不易粘附的)子单元具有更大的概率进入凝聚物中的枝状部分，并进而深入到内部的树丛状结构中。在第 3 章中，我们曾讨论过 Elam 及其同事们的工作，那里在表面上生长的晶体看来在中心处显示出枝状结构，而外部的树叶反而比较浓密。如果我们观察图 5.58(a)及(c)中的两个模拟集簇，则有理由作出如下假设：即在 Elam 及其同事所做的实验中，真实晶体生长期间所发生的事情在上述两图中的凝聚物生长到一定阶段以后也发生了，这时候附着力发生了变化，加入的金属原子的粘附概率也发生了变化，从而在凝聚体的枝端形成了较为密实的结构。Richter、Sander 及 Cheng 还描述了在模拟凝聚集构造时考虑静电力影响所产生的一个非常细长的凝聚体结构。常用的计算机系统可以用来模拟凝聚体的 3 维生长(参见 Kaye 及 Clark 关于 3 维凝聚体在 2 维空间上的投影的讨论[79])。

Voss 考察了当不止一个子单元同时到达凝聚体的外围结构时凝聚体的生长情况。在他的模型中，假设凝聚体赖以生长的网格上被随机占据的位置分数为 F，并且这些生长单元象素中的每一个都随机地四处运动。开始模拟时先在网格中心处设立一个成核种子，然后在模拟过程的每一步中，都按随机顺序对每一个可动的象素进行检查，随机选择该象

素的毗邻位置之一作为下一步运动的目标。如果所选位置未被占据，则该象素移到这个新地址；如果所选位置已被占据，则该象素不再运动。如果新的位置与簇正交，则移入的微粒及其毗邻的粒子都成为簇的一部分。这样的簇生长过程所形成的一个集簇如图 5.59(a)所示，它由 5 000 个单元组成，开始时网格上的占据分数为 0.05。在簇的边界上明显可由少数移动象素组成的衰减层(depletion layer)。这种簇与 Whitten 及 Sander 一个一个地加象素单元所得到的集簇很为相似。

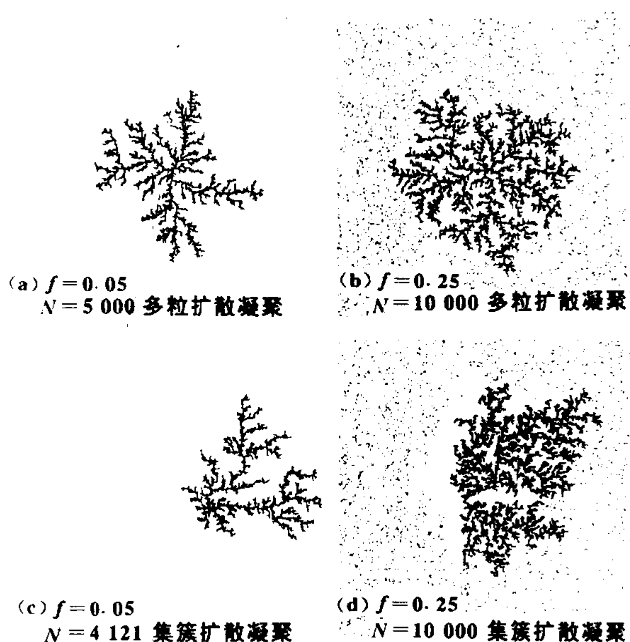


图 5.59 Voss[25]应用多粒扩散凝聚(MPDA)及在子单元“云团”内的集簇扩散凝聚(CDA)生成的复杂凝聚体。(a)空间占据率 $S=0.05$ 时 MPDA 形成的集簇(含 5 000 个子单元)；(b)空间占据率 $S=0.25$ 时，MPDA 产生的集簇(含 10 000 个子单元)；(c)基簇在 $S=0.05$ 的子单元“云团”内运动而产生的 CDA 凝聚体(含 4121 个子单元)；(d)$S=0.25$ 的 CDA 凝聚体(含 10 000 个子单元)

Voss[25]用来产生图 5.59(a)所示系统的过程称为多粒扩散凝聚(MPDA)，图 5.59(b)是在占据率为 0.25 时生长出的含有10 000个单元的凝聚体。这种簇比周围极窄的衰减层密实得多。显然 MPDA 模型可说明在诸如火焰顶端(此处未燃烧的碳分子密实成球，然后藉湍流碰撞形成油烟微粒)的云雾状子单元是怎样生长成集簇的。Voss 还指出，在某些系统中，集簇自身也会运动。由于模拟簇在子单元“云团”中的运动而生长成的集簇示于图 5.59(c)及(d)，在这样的模型中，大量的象素单元位置不变，而生长的集簇作随机运动。在集簇行走的每一步中，它只是象刚体似的运动，而不是沿任一随机方向转向网格中的新位置。运动着的簇遇到的任一象素立即加入集簇并随之一起进行行走。这样，集簇在运动中通过吸收路径上的象素而长大。当簇的外缘到达最初网格的边界时，则停止生长过程。图 5.59(c)所示为在占据率为 0.05 的象素“云团”中生长出的含有4 121个子单元的集簇。从中可以清楚地看到，由于集簇藉随机行走捕获子单元而形成了衰减区域。这种生长模型称为集簇扩散凝聚(CDA)。图 5.59(d)就是在 $F=0.25$ 的网格“云团”中生长出的 CDA 集簇，它含有10 000个子单元。正如 Voss 所指出的，这个簇比在稀薄的“云团”中生长的簇更加致密。MPDA 簇比较对称于起始点，而 CDA 簇则表现出结构上的较多变化。图 5.60(见本书前彩图 6)是图 5.59 中凝聚体的彩色照片，最初的生长阶段染上红色，中间阶段为黄色，最后则为绿色。从图可见，如所预料的那样，CDA 凝聚体在随机行走时，由

于生长过程主要发生在簇的一侧，从而生成的集簇一边松驰，一边紧密。Voss 进行的研究与诸雪片生长、火焰生成的颜料粒子及柴油油烟结构等紧密相关，这一点可从图 5.59 及图 5.60 中形象地反映出来。集簇周围的衰减区域清晰可见。

Meakin 在不同的条件下对凝聚体生长进行了广泛的模拟[62]。特别是，他使用的网格结构不是正方形。六边形网格对生长物的计算机模拟方法示于图 5.61(a)，为了解随机行走时所采用的步骤及“粘附”规则的细节，读者可参阅原始文献[62]。图 5.61(b)就是用这种网格及随机行走法在计算机上生长出的分形集簇。

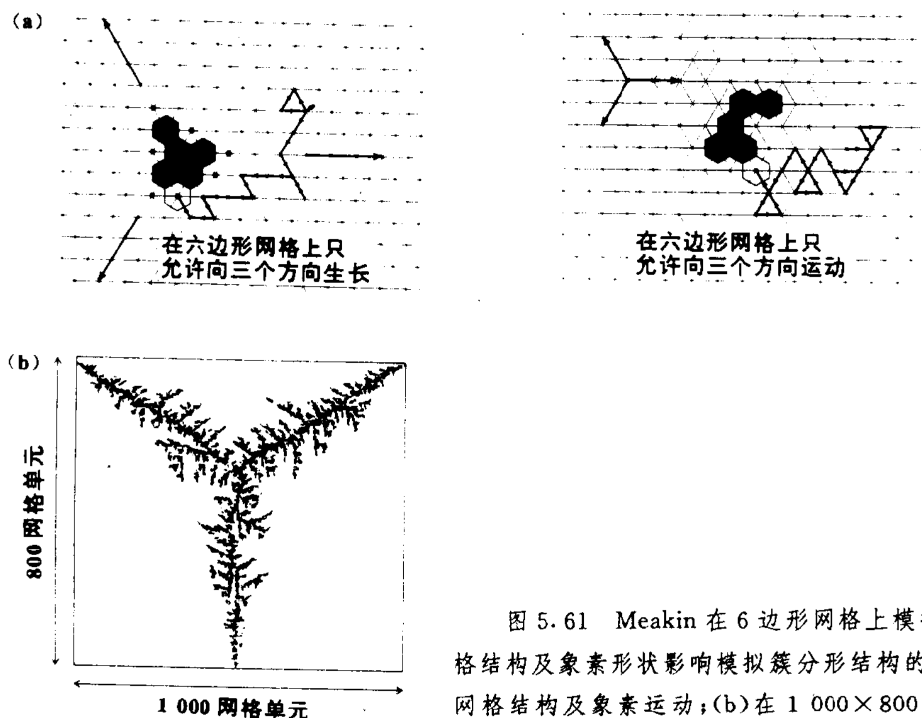


图 5.61 Meakin 在 6 边形网格上模拟的集簇表明：网格结构及象素形状影响模拟簇分形结构的总体形态[55]。(a)网格结构及象素运动；(b)在 1 000×800 网格上由 40 000 个单元形成的集簇(只允许沿三个方向生长)

这个集簇和那些由 Sander 及其同事们模拟出的集簇间的明显不同之处在于簇的外部形态。簇的形态显然与形成集簇的网格结构及粘附法则有关。这就进一步证明了下述事实，即簇的分维数只能刻划簇的结构与织构，而不能描述簇的整体形态。Sander 的模型通常保持基本的矩形结构，而其外部轮廓则反应出所用的象素网格的结构特征[66-68]。

Whitten 及 Sander 的模型与 Meakin 的 6 边形“分形”晶体之间的差别可用以说明另一个重要的物理现象——外延生长。当一种金属的分子蒸发到具有不同晶体结构的另一种金属晶体表面时，在最初的生长阶段，到达的金属气体分子在接收表面的晶格上结晶。希腊语词根“epi”及“taxes”意思是“在…”及“排列”。外延生长就是到达相异晶体上的分子，按照接收晶体的晶格模型而不是其自身的模型排列自己，它在薄膜物理学和计算机逻辑系统生成中是一个重要现象。因此，人们可以通过考察作为基本结构的不同晶体网格上金属原子的沉积而在计算机上模拟外延生长。

Meakin 还对在基本构成单元及碰撞而成的集簇萌芽所形成的氛围中一种烟尘聚集体的不同生长方式进行了模拟研究。在生物学上，“萌芽的”(embryonic)这一术语用来描述有机体成熟之前的早期阶段，它来源于希腊语词根“en”及“bryen”，意思分别为“进入”

与“膨胀”。萌芽一词在生物学上的应用显然与下述事实有关：种子开始生长时，第一个可观察到的变化是发芽前的膨胀。本书中，我们将仅包含几个显而易见的子单元但已显示出生长方法的简单集簇中做“萌芽簇”。这样，图 5.6(a)中由 6 个单元组成并已初步显示出分形特征的簇就是萌芽簇。在第 6 章中，我们将看到，溶胶物理学专家对由柴油烟气形成的有害健康的萌芽簇是如何地兴趣盎然。

在用计算机模拟烟尘微粒时，Meakin 考查了萌芽簇在随机运动的“云团”中碰撞、生长直至所有象素连成一个大集簇的凝聚过程。在他的一些研究中，Meakin 还探讨了凝聚体内部自我调整的可能性。所谓“自我调整”，意思是凝聚体内的某些集簇通过断开连接键而旋转并粘附于凝聚体内的另一部位。图 5.62 所示为 Meakin 的两个模拟集簇以及从汽车排气管中释放出来的实际烟尘微粒，图(c)中的实际微粒与(a)中的模拟簇之间存在明显的相似性。这表明由 Meakin、Voss 及其他人所做的模拟研究的价值在于，通过改变生长法则，人们可以将模拟凝聚体与实际凝聚体相比较，而获得凝聚体形成的机理的信息。从图 5.62(a)与(c)的比较可以看出，汽车排出的烟尘聚集体是分两个阶段形成的。最后的凝聚体可能是在汽车排气系统内产生的，而在燃烧过程初期形成的基簇则在燃烧完成后在湍流中相互碰撞而长大。

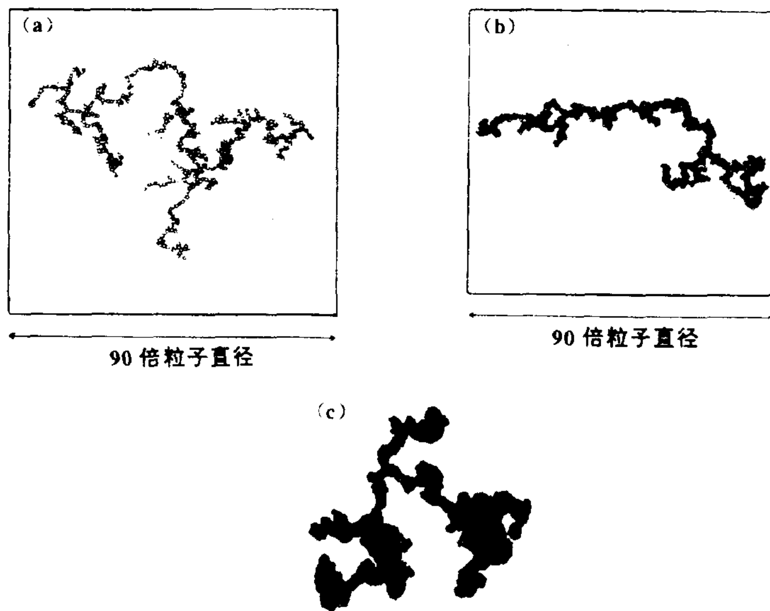


图 5.62 通过模拟的与实际的烟尘微粒结构的比较，人们可以弄清形成实际微粒的可能的动力学过程。(a)Meakin 应用簇—簇发散式凝聚产生的 2 维集簇(含有 512 个基簇，不允许簇间连接后有任何改变)；(b)发射式簇—簇凝聚形成的集簇(含 512 个基簇，基簇间连接后有一次旋转调整)；(c)由 R. J. Cheng[69]拍摄的汽车排气管中的微粒(放大 300 000倍)

当人们观察图 5.62(c)中凝聚体的结构时，可能会立刻提出这样的问题：该凝聚体的链状元连接起来的基本结构由多少其簇碰撞而成？肉眼可以观察到，在不同生长阶段，可能有 5～6 个基簇相互碰撞，随后则由基本单元形成。在第 2 章中，我们曾讨论过在图象分析仪中用浸蚀法分解基本微粒组成的凝聚体的问题。图 5.63 所示为对图 5.62(c)中凝聚体的浸蚀过程。到第 5 次浸蚀时，凝聚体明显地分成 7 个基簇。但是，关于基簇数目的确定显然带有主观色彩，必定依赖于实际经验[71-73]。图 5.63 对图 5.62 中汽车排放微粒的连续浸蚀，使人们得以估计碰撞形成整个凝聚体的基簇数目。大概从第 3 次浸蚀的情况即可假定有 7 个基簇加入了该凝聚体，但人们可能怀疑第 3 次浸蚀时左下角处较大的子单

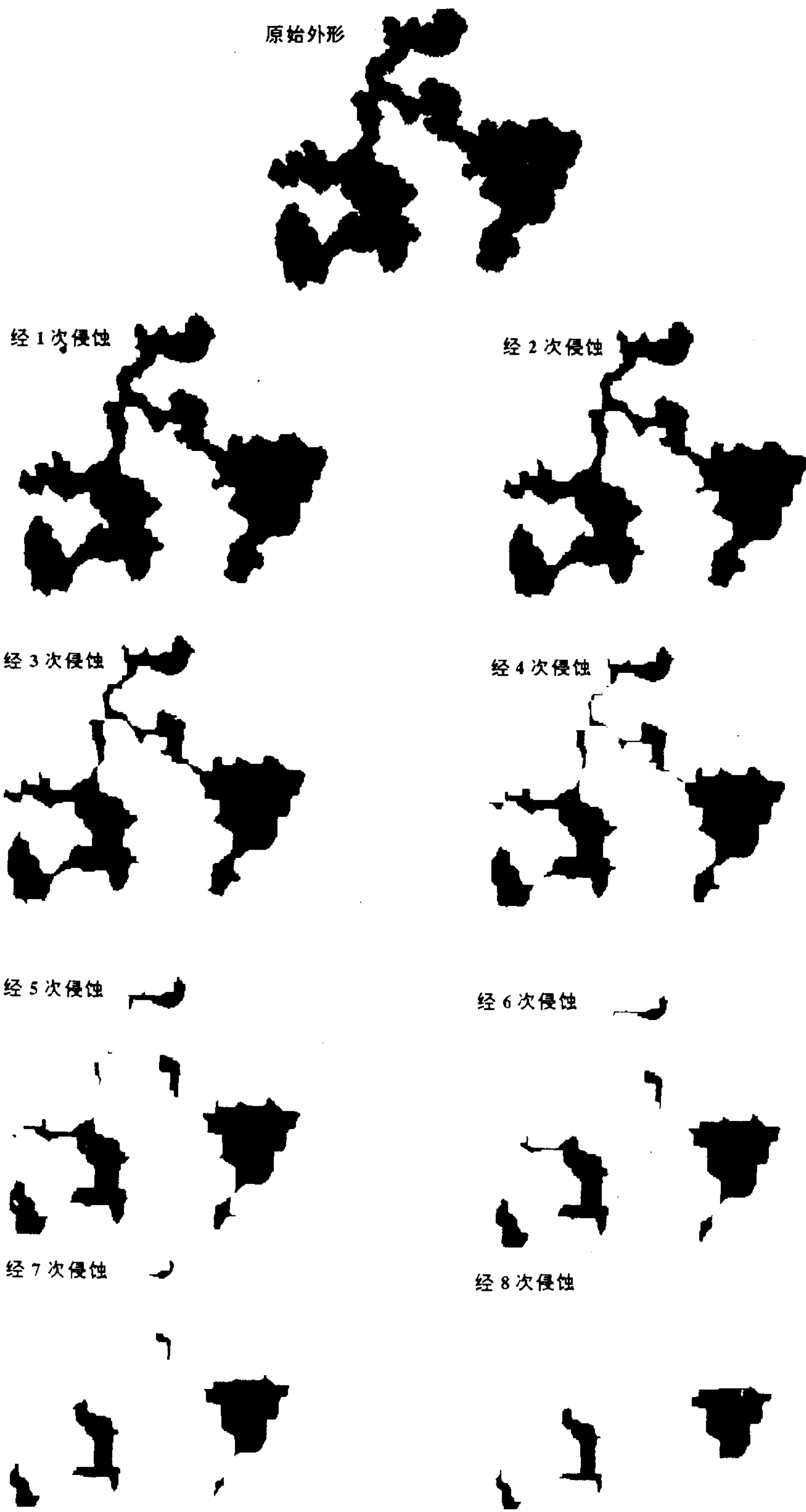
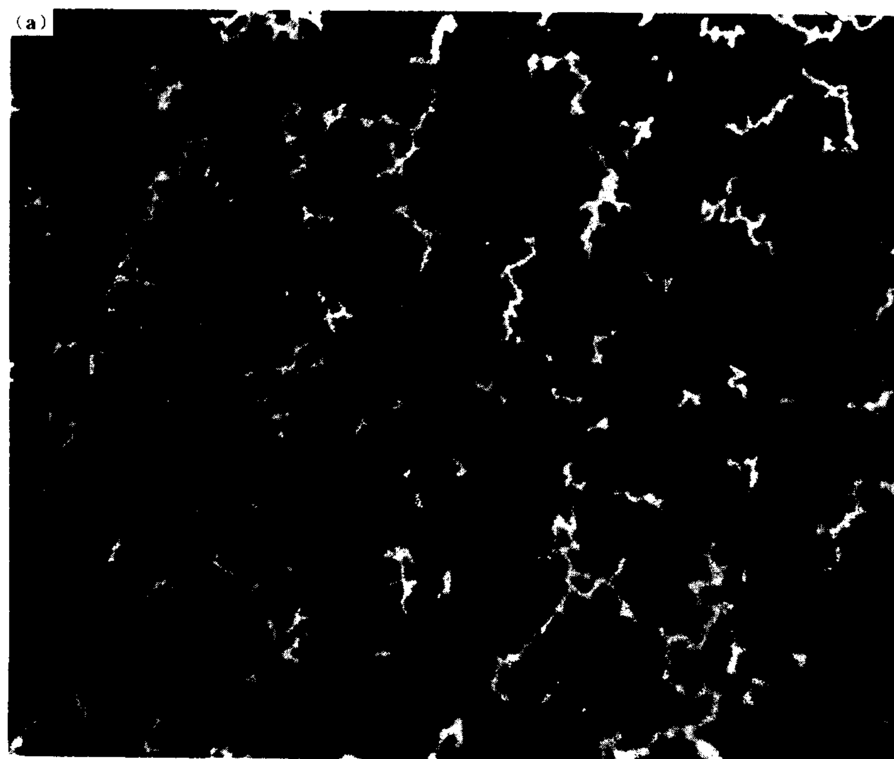


图5.63 对图5.62(c)中凝聚体的浸蚀[31]



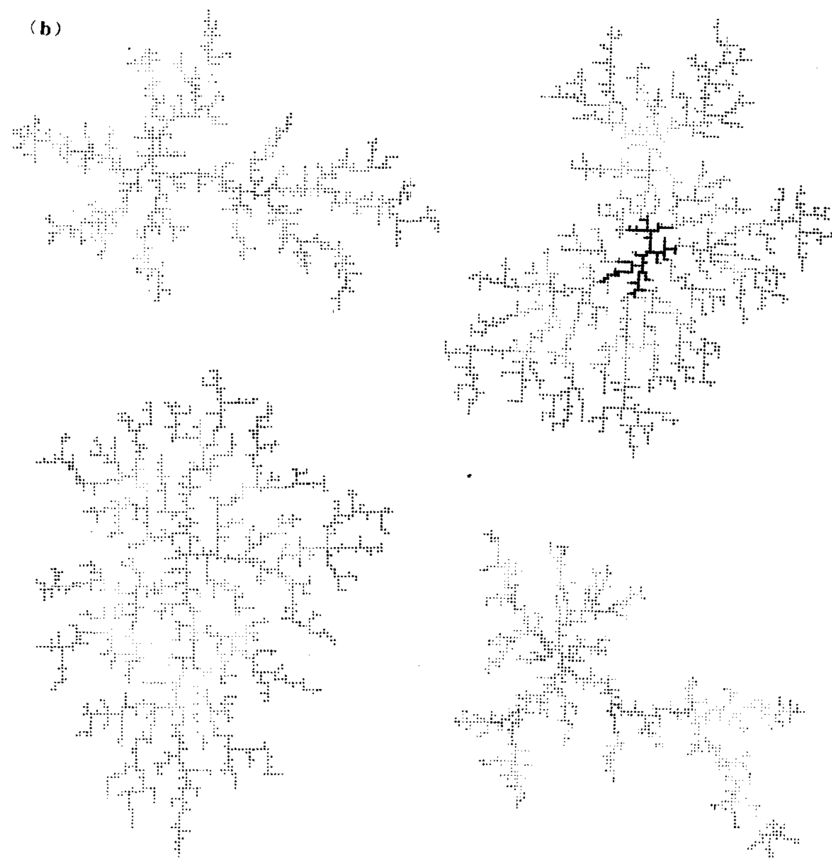


图 5.64 Hurd 和 Schaefer 用液体表面上的微球研究了微小硅粒在 2 维空间中的凝聚问题。(a)显微照片表明单个硅粒凝聚成分形集簇；(b)在计算机模型中引入形成集簇时的各种作用力后得到的 2 维空间中的模拟集簇

元本身可能是由油烟凝结的早期阶段形成的 3 个集簇碰撞而成的。

从第 3 次浸蚀后剩余的集簇明显可见这些簇的分维数比整个凝聚体的分维数小得多。当我们用膨胀法估计分维数时，若在某一膨胀阶段分维数发生突变，则该阶段可能正处于从凝聚体分维数向基簇分维数转变关头。这一信息可以应用于浸蚀过程的相反操作(即膨胀过程——译者注)中，以决定什么时候才能对凝聚体中的基簇数目作出合理估计。图象处理过程中浸蚀膨胀法的应用以及分维数的描述在可吸入的有害性烟尘(如焊接产生的烟尘及柴油机排出的气体)特征的表述方面正开辟一个新的天地，我们可以期待，在未来的岁月里对这种可吸入烟尘凝聚体结构的分析可能更为详尽。[71]

到目前为止，在关于受限扩散凝聚的讨论中，我们只考虑了模拟的生长问题。通过一些有趣的实验，Hurd 及 Schaefer 研究了一种物理系统，在该系统里可以观察 2 维空间内集簇的实际生长过程[74-78]。他们探讨了 2 维空间内在水/气界面上硅球微粒的凝聚问题，这里小球的直径为 0.3μm。下面这段话引自 Hurd 博士的一篇论文[74]：

“用一个带有微米标度的注射器将硅球微粒与甲醇试剂组成的悬浮液分散到盐水(1mol 标准氯化钙溶液)表面上，因为在高电解质浓度下，凝聚时系统是不稳定的，所以加入悬浮液时要格外小心，以免引起湍流。当样品开始凝聚时，进行光学观察并拍下显微照片。可以看到单个微粒相互粘附形成集簇，当出现几百个微粒组成的集簇(约需 1 小时)时，系统几乎没有单个微粒剩下来，基簇聚成大簇的现象明显可见。”

图 5.64 是这种生长簇系统的显微照片，Hurd 报告说，他所做的基簇比 Whitten 及 Sander 模拟的凝聚体有小得多的分维数，他认为这是由于 2 维空间中存在着某些力，这些力干扰了簇的 DLA 理想生长。然后他又在 2 维空间中液体界面上具有不同表面力作用的假设下，模拟了不同类型簇的生长。图 5.64(b)所示为在生长模型中考虑了不同类型力的情况下模拟出的几个胶粒生长簇。显然，我们可以模拟不同类型的簇，并将其与实际观察到的集簇相比较，从而弄清在给定类型的胶体凝聚物中究竟是哪种力起主要作用。应用白色塑料小珠与弱磁性的黑色塑料小珠的混合物模拟这种 2 维凝聚体可能是非常有趣的。在制做过程中，可将少量的铁粉加到黑色小珠中，从而当这些小珠在充填有不活动白珠的 2 维空间中随机运动时，一旦相遇便粘在一起。人们可以改变装有混合小珠的 2 维空间(该 2 维空间可看作一个浅盘子)中的运动类型。人们也可通过改变加入黑珠中的铁粉量以改变黑珠间的磁力强度，从而改变黑珠运动时的相互附着力(请注意，早先讨论过的 Nowick 及 Mader[23]模拟的两层体系中的小珠集簇显然与图 5.64(a)中的集簇相似，这种与 Nowick 及 Mader 的方法类似的技术可用以形成黑白小珠的 2 维阵列，阵列中黑色小珠互相吸引，由此产生的 2 维区域内的模拟脉动可研究簇的生长。科学家们对这种 2 维空间的模拟也许兴趣不大，但是它肯定有助于初学者对集簇凝聚动力学的理解)。

在某些科学分支中，模拟含有大量单元粒子的凝聚物结构是有意义的，但在另一些情况下，科学家们感兴趣的是簇群中存在的分形结构范围。因此，如果我们把图 5.64(a)看作柴油发动机产生的油烟微粒，那么预测这些油烟微粒对肺的潜在危害则需要知道微粒尺寸分布的数据以及粒群中存在的分形粒子的粒度范围。本书中下一章将简要讨论具有分形结构的可吸入粒子的潜在危害，并将把分形知识从 2 维空间推广到 3 维以致于更高维空间中去。

参考文献

[1] G. H. Weiss, "Random Walks and Their Applications," *Am. Sci.*, 71, January-February (1983) 65-71.
[2] For an interesting introduction to the many aspects of randomwalk modelling of physical phenomena, see R. Orbach, "Dynamics of Fractal Networks," *Science*, 231 (1986) 814-819.
[3] H. E. Stanley, "Applications of Fractal Concepts to Polymer Statistics and to Anomalous Transport in Randomly Porous Media, " *J. Stat..Phys.*, 36 (1984) 843-859.
[4] F. Family and D.P. Landau (Eds.), "Kinetics of Aggregation and Gelation," Elsevier-North Holland, Amsterdam, 1984.
[5] T.A. Whitten and L.M. Sander, *Phys. Rev. Lett.*, 47 (1981) 1400.
[6] R. Rammal, G. Toulouse and J. Vannimenus, "Self Avoiding Walks on Fractal Spaces: Exact Results and Flory Approximation," *J. Phys.* (Paris), 45 (1984) 389-394.
[7] Raham and S. Havlin "Exact Fractals with Adjustable Fractal and Fracton Dimensionalities."
[8] P. Meakin and H.E. Stanley, "Spectral Dimensions for the Diffusion Limited Aggregation Model of Colloid Growth." *Phys. Rev. Lett.*, 51 (16), October 17 (1983) 1457-1460
[9] H.E. Stanley and A. Coniglio, "Flow in Porous Media: the Backbone Fractal as the Percolation Threshold," *Phys. Rev.* B, 29 (1984) 522-524.
[10] P. Meakin and H.E. Stanley, "Spectral Dimension for the Diffusion-Limited Aggregation Model of Colloid Growth," *Phys. Rev. Lett.*, 51 (1983) 1457-1459.
[11] B. H. Lavenda, "Brownian Motion," *Sci. Am.*, 252, No. 2 (1985) 70-85.
[12] R. Hersh and R.J. Griego, "Brownian Motion and Potential Theory," *Sci. Am.*, March (1969) 69-74.
[13] A discussion of the modelling of Brownian motion and the progress of diffusion in the colloidal suspension is given by S. Walfram "Computer Software in Science and Mathematics," *Sci. Am.*, 251 (3), September (1984) 188-203. This article discusses the modelling of self-avoiding randomwalks and Brownian motion.
[14] A readable elementary discussion of Brownian motion is to be found in G. Gamow, "1, 2, 3 Infinity," Bantam Books, New York (1965), (paperback).
[15] J.G. Kemeny, H. Mirkil, J.L. Snell and G.L. Thompson, "Finite Markov Chains in Finite Mathematical Structures," Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1959.
[16] J. Perrin, "Atoms," Van Nostrand, New York, 1916.
[17] E. Nelson, "Dynamical Theories of Brownian Motion," Princeton University Press, Princeton, 1967.
[18] A. Einstein, "Investigations on the Theory of the Brownian Movement," edited by R. Furth and translated by A.D. Cowper, Dover., 1926.
[19] See entry on "Chromatography" in J.R. Newman (Ed.), "Harper Encyclopedia of Science," revised ed., Harper and Row, New York, 1967.
[20] C.L. Strong, "A Simple Laser Interferometer, an Inexpensive Infrared Viewer, and Simulated Chromatograms," "Amateur Scientist," *Sci. Am.*, 226 (2) February (1972) 106-111.
[21] G. Clark, "Fractal Geometry Applications in Filtration Science," *M.Sc. Thesis*, Laurentian University, in preparation.
[22] B.H. Kaye "Shape Characterization in Fineparticle Science and Technology,". Elsevier, Amsterdam, in preparation.
[23] A.S. Nowick and S.A. Mader, "A Hard Sphere Model to Simulate Alloy Thin Films," *IBM J.*, September/November (1965) 358-374.
[24] X-ray pictures taken from W. Bolton, "Patterns in Physics," McGraw-Hill, London, New York, 1974.
[25] R. F. Voss, "Multiparticle Fractal Aggregation," *J. Stat. Phys.*, 36 (1984) 861-872.
[26] R.F. Voss, "On 2-D Percolation Clusters and On Multi Particle Fractal Aggregation," in F. Family and D.P. Landau (Eds.), "Kinetics of Aggregation and Gelation," Elsevier, Amsterdam, 1984, pp. 8-9.
[27] T. Vicsek, "Pattern Formation in Diffusion Limited Aggregation," *Phys. Rev. Lett.*, 53 (1984) 2281-2284.

[28] For a discussion of the evaporation behaviour of a mixture of liquid droplets of different size, see a standard undergraduate textbook of physics; a text I have found useful is D.H. Fender, "General Physics and Sound," English University Press, London, 1957.
[29] Work similar to that of Vicsek and that of Voss was carried out independently by Kertesz and co-workers; reference 34, p. 249.
[30] B. Sapoval, M. Rosso and J.F. Gouyet, "Fractal Nature of a Diffusion Front and Relation to Percolation," *J. Phys. Lett.* (Paris)., 46, February 15 (1985) L149-L156.
[31] J.R. Hodkinson, "Some Observations on Particle Overlap Error in Dust Measurement," *Ann. Occup. Hyg.*, 6 (1963) 131-142.
[32] P.C. Reist, "Introduction to Aerosol Science," Macmillian, New York, 1984.
[33] B.H. Kaye, "Direct Characterization of Fineparticles," Wiley, New York, 1981.
[34] For the serious student of fractals who wishes to move into the more advanced problems of fractal geometry applied to material science, a very useful book is H.E. Stanely and N. Ostrowsky (Eds.), "Growth and Form; Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics," Martinus Nijhoff, Boston, 1986. This book is based on the proceedings of a NATO Advanced Studies Institute course along with scientific papers presented as part of the meetings held at the Institute Etudes, Scientifics de Cargese in Corsica, France, June 26-July 6, 1985. The 11 introductory lectures presented at this meeting are very useful for anyone wishing to pursue a particular topic in depth.
[35] H.E. Stanley, "Form and Introduction to Self Similarity in Fractal Behaviour," reference 34, pp. 21-53.
[36] A.L. Ritzenberg and R.J. Cohen, *Phys. Rev. B*, 30 (1984) 4038.
[37] D. Stauffer, "Percolation and Cluster Size Distribution," reference 34, p.79.
[38] In the UK jointly sponsored research organizations which are supported by indus-trial contributing members and matching government funds have been organized by many different industries. The Whiting Research Association of Quarry Owners produced natural pigment known as "whiting" from quarried calcium carbonate. Whiting is used in many industrial systems. In 1962 the scope of the organization was widened to accept general powder-using industries since manufacturers of whiting had accumulated a great deal of know-how concerning the properties of powdered substances. The inclusion of powder manufacturers in the organization seemed a natural extension of activities. I joined the organization in 1962 to help establish the Powders Division. I only stayed a year before leaving for Chicago. The organization flourished for several years until it was disbanded in the early 1970s with the whiting group reverting back to its own special interests.
[39] G.A. Zerlaut, "Utilization of Pigmented Coatings for the Control of Equilibrium Skin Temperatures of Space Vehicles," in "Proceedings of the Aerospace Finishing Symposium, Fort Worth, Texas, December 8-9, 1959."
[40] These experiments are fully described in B.H. Kaye, M. Jackson and G.A. Zerlaut, "Investigation of Light Scattering in Highly Reflecting Coatings, Volume 3, Monte Carlo and Other Statistical Investigations," Report No. 11TR1 - U6003-19, pro-vided under the term of a contract undertaken for the National Aeronautic and Space Administration Office of Advanced Research and Technology, Washington, DC, Contract Number NASA-65(07). This work was carried out in the period May 1, 1963 to September 30, 1966. The important features of this investigation were also reported in G.A. Zerlaut and B.H. Kaye, "Summary of Investigations of Light Scattering in Highly Reflecting Pigmented Coating," NASA contract report, NASA Cr-844, NASA Administration, Washington, DC, July 1967. This report is more accessible to the scientific investigator than the original IITRI report.
[41] F.B. Steig, Jr., *Off. Dig. Fed. Paint Varnish Prod. Clubs*, 25, (1957) 439.
[42] W.G. Armstrong and W.H. Madson, *Ind. Eng. Chem.*, 39 (1947) 944.
[43] R. Trottier, "Fractal Description of Fineparticle Systems," *MSc Thesis*, Laurentian University, 1987.
[44] A detailed discussion of the calculation of the moment of inertia and the radius of gyration can be found in most university first year level physics textbooks. A discussion of the radius of gyration of fracturally structured clusters can be found in several articles in reference 34.
[45] A technical discussion with photographs of how different features of a fineparticle profile affect the two-dimensional Fourier transform of the image of the fineparticle both by computer techniques and by optical diffraction can be found in A.G. Naylor and C.D. Wright, "Shape Analysis of Particle Profiles Used in the Fourier Transform," in M.J. Groves

(Ed.), "Particle Size Analysis," Heyden, London, 1978, pp. 110-119. This book is the proceedings on a Conference on Particle Size Analysis organized by the Analytical Division of the Chemical Society and held at the University of Salford, September 12-15, 1977.

[46] One of the more readable introductions to the general theory of Fourier transform is to be found in R.C. Jennison, "Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist," Pergamon Press, Oxford, 1961, 120 p. The mathematically gen-erated Fourier transforms in Figure 5.46 were generated by V. Roze of Tracor Inc., Toronto, Ontario and are used by permission of Tracor Inc.

[47] For a general article on the generation of Fourier transforms in two dimensions using optical diffraction techniques, see J. Hecht, "Processing Signals the Optical Way," *High Technol.*, October (1983) 55-61.

[48] An introductory article on Fourier transforms in one dimensional space and the fractal dimensions of irregular fineparticles is presented in some printed lecture notes prepared by B.H. Kaye entitled "Harmonious Rocks, Infinite Coastlines and Fineparticle Science" (40 typed pages and 35 diagrams). Copies of these lecture notes are available at the cost of printing plus a small charge for postage and handling, from Dr. Kaye, Physics Department, Laurentian University, Sudbury, Ontario, Canada, P3E 2C6. It is hoped eventually that these lecture notes will form a chapter in a planned book entitled "Delightful Instruments and Exciting Moments in Applied Science."

[49] R. Orbach, "Dynamics of Fractal Networks," *Science*, 231, February 21 (1986) 814-819.

[50] B.B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature," Freeman, San Francisco, 1983, pp. 126.

[51] D. Stauffer, "Introduction To Percolation Theory," Taylor and Francis, London, 1985.

[52] G. Deutscher, R. Zallen and J. Adler (Eds.), "Percolation Structure and Processes," *Ann. Isr. Phys. Soc.*, 5, Adam Hilger, Bristol, 1983.

[53] K.G. Wilson, "Problems in Physics With Many Scales of Length," *Sci. Am.*, 241 (1979) 158-179.

[54] R.F. Voss, R.B. Laibowitz and E.I. Allessandrine, *Phys. Rev. Lett.*, 49 (1982) 1441.

[55] The material in Figure 5.52 appeared on the front cover of *Science*, February 21, 1986.

[56] R.F. Voss, R.B. Laibowitz and E.I. Allessandrini, "Fractal (Scaling) Clusters in Thin Gold Films Near the Percolation Threshold," *Phys. Rev. Lett.*, 49, (1982) 1441-1444.

[57] A. Kapitulnik and G. Deutscher, "Percolation Characteristics in Discontinuous Thick Films of Lead," *Phys. Rev. Lett.*, 49, (1982) 1444-1448.

[58] C.M. Guttman, "Monte Carlo Studies of Two Measures of Polymer Chain Size as a Function of Temperature," *J. Stat. Phys.*, 36, (1984) 717-733.

[59] L. De, A. Arcangelis, S. Redner and A. Coniglio, "Anomalous Voltage Distribution of Random Resistance Networks and a New Model for the Backbone at the Percolation Threshold," *Phys. Rev. B*, 31 (1985) 4725-4727.

[60] R. Pike and H.E. Stanley, "Order Propagation Near the Percolation Threshold," *J. Phys. A.*, 14 (1981) L169-L177.

[61] A. Bunde, S. Havlin and R. Nossal, H.E. Stanley and G.H. Weiss, "On Controlled Diffusion-Limited Drug Release from a Leaky Matrix," *J. Chem. Phys.*, 83 (1985) 5905-5913.

[62] P. Meakin, "Some Recent Advances in the Simulation of Diffusion Limited Aggregation and Related Processes," Reprint supplied by Dr. Meakin, Central Research and Development Department E.I. Dupont de Nemours and Company, Experimental Station, Wilmington, Delaware, USA, May 1986.

[63] L.M. Sander, "Theory of Ballistic Aggregation and Deposition," Reprint provided by Dr. Sander, Physics Department, University of Michigan, Ann Arbor, MI, USA, May 1986.

[64] R. Richter, L.M. Sander and Z. Cheng, "Computer Simulations of Soot Aggregation," *J. Colloid Interface Sci.*, 100 (1984) 203-209.

[65] P. Meakin, Preprint provided by the author.

[66] P. Meakin and R. Jullien, "The Effects of Random Bond Breaking on Diffusion Limited Cluster-Cluster Aggregation," *J. Phys.*, 46, 1543 (1985).

[67] B.H. Kaye, "Fineparticle Characterization Aspects of Predicting the Efficiency of Microbiological Mining Techniques," *Powder Technol.*, 50 (1987) 177-191.

[68] B.H. Kaye, "The Description of the Structure of Powder Mixture Using the Concepts of Fractal Geometry." Notes for a workshop on Powder Mixing held at the Powder and Bulk Solids Conference, May 15, 1983.

[69] R.J. Cheng and A.W. Hogan, "Microscopic Study of Lead Iodide –Nucleated Ice Crystals" *Microscope*, 18, No. 4 (1970) 299-302.
[70] Dr. Cheng's picture of the fineparticle present in automotive exhaust is shown in F.P. Perera and A.K. Ahmed, "Respirable Particles," Ballinger, Cambridge, MA, 1979. The dust cover of this book shows a beautiful example of the fractal structure and several of the photographs used in the book cry out for the application of fractal geometry to the characterization of the hazards represented by some hazardous dusts encountered in our high-technology society (see reference 71).
[71] B.H. Kaye, "The Physical Significance of the Fractal Structure of Some Respirable Dusts," in prepartion.
[72] B.H. Kaye, "Erosion-Dilation Logic Strategies in the Characterization of Fumed and Precipitated Fineparticles," in preparation.
[73] J. Leblanc, "The Shape and Size Characterization of Respirable Dusts," *MSc Thesis*, Laurentian University, 1987, in preparation.
[74] A.J. Hurd and D.W. Schaefer. Diffusion Limited Aggregation in Two Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 54, Number 10, March 11, 1985 pages 1043 -1046.
[75] A.J. Hurd, "The Electrostatic Interaction Between Interfacial Colloidal Particles," *J. Phys. A.*, 18 (1985) L1055-L1060.
[76] A.J. Hurd, "Two Dimensional Diffusion-Limited Aggregation of Interacting Particles," in Extended Abstracts of Fractal Aspects of Materials, 1985 Fall Meeting of the Materials Research Society, December 2-4, 1985, Boston. Book of Abstracts available from the Materials Research Society, Suite 327, 9800 McKnight Road Pittsburgh, PA 15237, USA.
[77] A.J. Hurd, "Diffusion Limited Aggregation of Silica Microspheres in Two Dimensions," in S. Safran and N. Clark (Eds.), "Proceedings of the Conference Physics of Complex and Super Molecular Fluids," June 1985, Wiley, New York 1986.
[78] Lecture notes and diagrams provided as a personal communication by A.J. Hurd, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185, USA.
[79] B.H. Kaye, J.E. Leblanc and G.G. Clark, "A Study of the Physical Significance of Three Dimensional Signature Waveforms," *Part. Char.*, 1 (1984) 59-65.
[80] P. Meakin, "Formation of Fractal Clusters and Networks by Irreversible Diffusion-Limited Aggregation," *Phys. Rev. Lett.*, 51 (1983) 1019-1022.
[81] P. Meakin. "Structural Readjustment Effects in Cluster-Cluster Aggregation," *J. Phys.* (Paris), 46 (1985) 1543-1552.

6 消失地毯、分形毛毡及枝状捕获树

6.1 Sierpinski 地毯和瑞士奶酪

Mandelbrot 的分形几何专著中有两幅至善至美的(holy)插图(如图 6.1 所示)[1]。在读完图下的文字说明之前，我曾有两种 Rorschach 式的反应(西方有一种叫人解释十张墨水点画以测验个性的试验，称为 Rorschach 实验，图 6.1 使人想起墨水滴在纸上的情形，故作者有此反应——译者注)。首先，第一幅图使我想起了捧起曼氏专著前刚刚观察到的玻璃板上的农药微滴；第二幅图则使我不但想起了油画电影中的电子显微照片（图 5.35)，而且想起了一种多孔金属过滤介质的断面，这种过滤介质在某铀矿中用于过滤石英粉尘。显而易见，图 6.1 所隐含着的数学方法必然适用于农药喷洒技术及过滤介质的描述，对通过弥散的颜料颗粒体系及多孔体系的截面结构的刻划也将别有用途，当我向学生们出示图 6.1 (a)，(b) 的复印件，并问他们从图上看到了什么时，回答可谓包罗万象：月球上的陨石坑、从飞机上看到的树木、大海中飘浮的冰块、靶面上的弹孔、木块上的孔洞、玻璃窗上的雨滴、营养盘上的菌落、奶酪上的毒菌、汽车上的铁锈、通过砂岩的截面、混凝土坯块的剖面，甚至还有碎石组成的圣诞湖底（Christmas Lake）等等。答案的多样性暗示了隐含于图 6.1 中的分形数学应用范围的广泛性。

在浏览 Mandelbrot 的专著时，我才知道 Mandelbrot 把图 6.1 中的两幅图称为瑞士奶酪，数学上则称它们为随机 Sierpinski 地毯。显然，在用分形几何来描述沉落的液滴、过滤介质和细粒分散体系之前，我们必须先探索 Sierpinski 地毯的分形特征。

Sierpinski 地毯是以其发明者、20 世纪初波兰数学家 Sierpinski 的名字命名的[2]。Mandelbrot 把 Sierpinski 地毯想象成是由一只总是低着头的虫子一点一点地吃掉一块布料而形成的。(Mandelbrot 把这只虫子起名为“Trema”，该名字与白蚁（Termite）来自于同一希腊词根，曼先生说，Trema 可能是一个在科学上尚无重要意义的最短的希腊语词)。为构造分维数是 1.87 的 Sierpinski 地毯，Mandelbrot 指令 Trema 按图 6.2 设计的方法咬啮地毯，首先，把地毯的面积分成 9 个正方形，然后“吃掉”位于中间的正方形，这样就构成了分维数为 1.89 的一级 Sierpinski 地毯；然后把剩下的 8 块再“吃去”中间

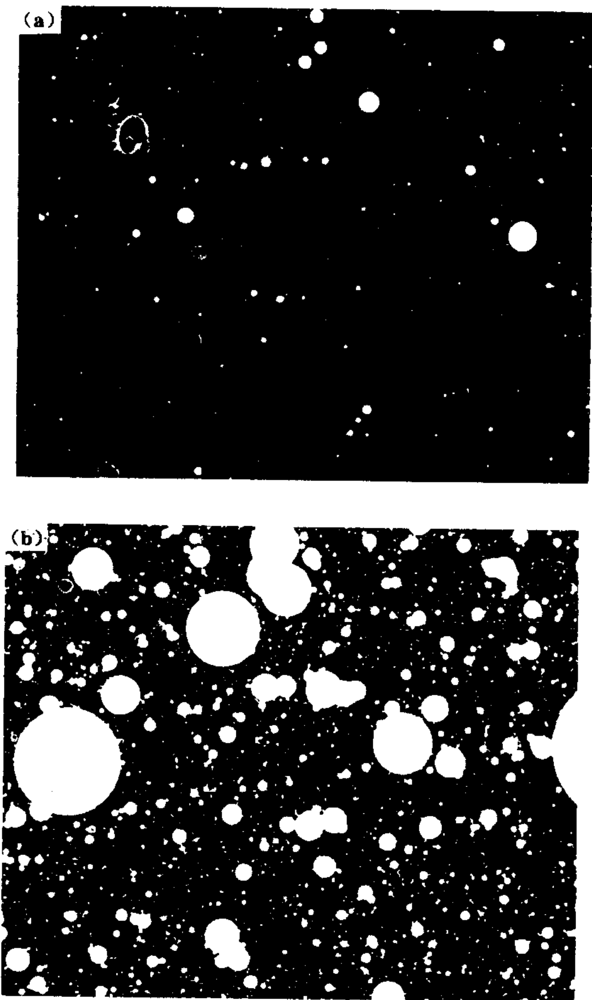


图 6.1 Mandelbrot 的瑞士奶酪是包含封闭"蛀虫"（孔洞、碎片等）的理想 Sierpinski 地毯，它能唤起从事分形几何在各科学领域应用研究的科学家们的"认识性反应"

的1/9而形成二级地毯，如图 6.2（b）；形成 Sierpinski 地毯的第三步如图 6.2（c）所示；如果把上述过程无限地进行下去，我们得到的将是看不见的地毯，因为其面积为零。这个地毯具有无数多个孔，这些孔由无数根无限长的线结成，而且孔与孔之间毫不相通。

当我试图理解描述一个无形的充满无限多个孔的地毯的数学概念时，我想起了安徒生童话：皇帝的新衣。在安徒生的童话故事中，有个皇帝想花巨资缝制一套看不见的衣服。于是，几个无耻的裁缝在一块看不见的布料上装模作样，为皇帝缝制了一套看不见的衣服。当皇帝在内衣外面套上这件无形的新衣而招摇过市时，无数逢迎拍马的人都假装看见了皇帝的新衣而大加赞赏。直到一个小孩大喊皇帝没穿外衣时，这个骗局才得以识破，那几位高级裁缝也被逐出王国。如果当时裁缝师们能找到一位皇室几何学家，说皇帝的衣服将由 Sierpinski 丝制做，这种丝将由无数根细线织成，需要花费无限的劳动，那么，这些裁缝师们也许能继续被皇帝雇用。不然，皇帝陛下的刽子手可用刀口锋利的欧几里得刑具把这些裁缝师们砍成分形！

用不同的构造方法可以产生维数不同的 Sierpinski 地毯，如图 6.3 所示。显然，我们不能指望用图 6.2 和 6.3 所示的对称地毯来描述很多自然界的事物。然而，如果构造一

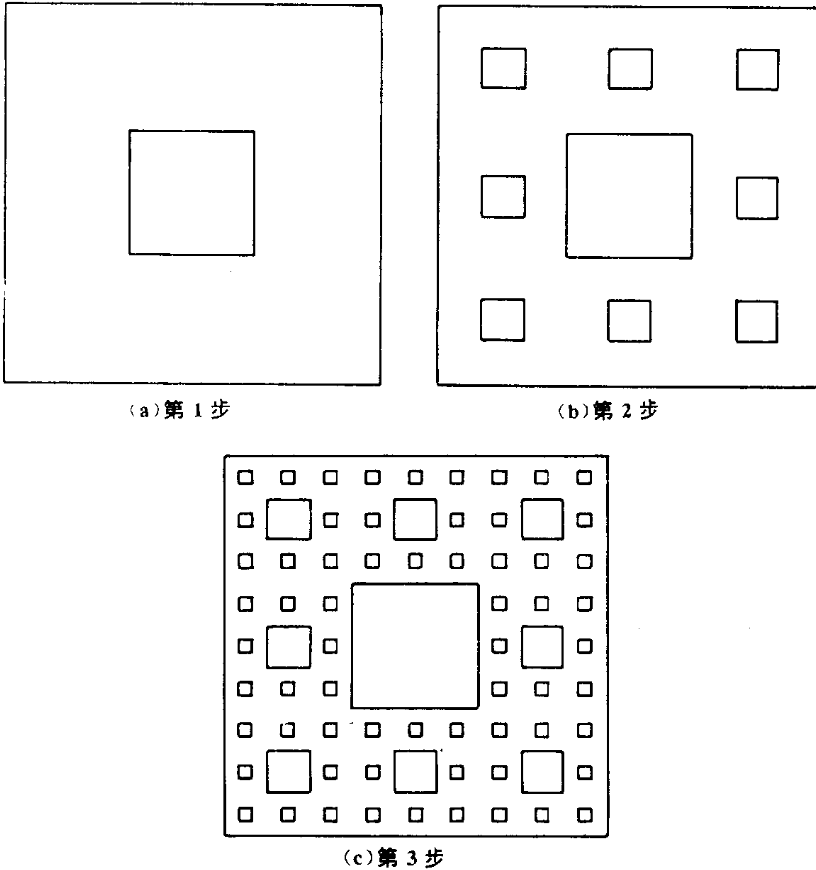


图 6.2 一个分维数为 1.89 的理想 Sierpinski 地毯可以通过上述步骤来构造，它没有面积，但包含无限条封闭直线

种自相似随机地毯，这种地毯中各单元的位置是随机的，那么我们就可以用这种地毯去近似表示自然界的许多现象。图 6.4 是把图 6.2（c）中大大小小的正方形位置随机化（即从随机数表上随机选择正方形的中心位置坐标 x，y）而产生的（该随机的 Sierpinski 地毯是由 Laurentian 大学物理系的 John 先生构造出来的）。假使这种过程对越来越小的正方形无限地进行下去，我们就可以得到看上去与许多自然现象相似的分形。

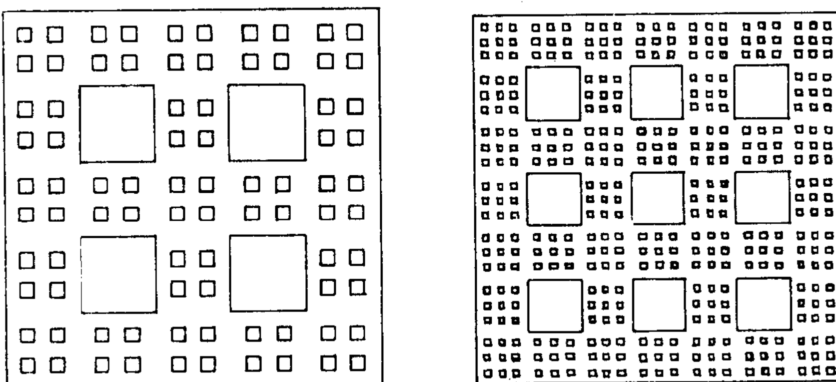


图 6.3 不同分维数的 Sierpinski 地毯可以通过移去不同的子地毯来构造

Mandelbrot 专著中的图 6.1（a）、(b）是用与构造图 6.4 类似的方法构造出来的，只不过 Mandelbrot 用圆代替了 Sierpinski 地毯中的小正方形，而且圆与正方形的尺寸分布相同。Mandelbrot 在研究图 6.1（a）、(b）所示的瑞士奶酪时，认为其分维数是当人们增

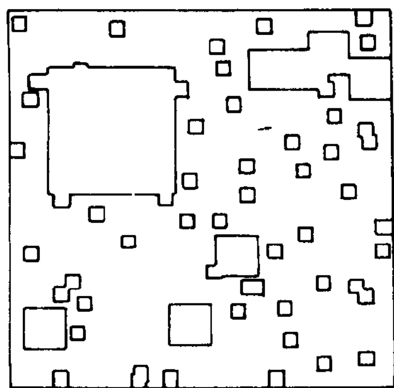


图 6.4　一种统计自相似的 Sierpinski 地毯可以通过使地毯中孔洞位置随机化的方法来构造

大分辨率看到越来越小的孔洞时孔洞背景消失速度的一种度量。因此，定义一个量（我们将把这个量叫做 Sierpinski 分维数）作为描述与图 6.1 相似的系统构造的有用参数是很有意义的。

为理解某一体系 Sierpinski 分维数的含义，我们想象用一系列不同放大倍数的光学仪器观察 Sierpinski 地毯，首先使用的仪器只能分辨出图 6.2 中最大的孔洞，这时所能看到的孔洞面积为 α_1，剩下的"未被吃掉的"面积为 β_1。然后通过分辨率稍高的仪器观察，使能看到的孔洞面积为 α_2，剩余面积为 β_2。这样，能过观察越来越小的孔洞可以考查地毯的消失速度。利用这些数据，我们可以得到图 6.5（a）所示的一条直线，直线的斜率反映了地毯消失的快慢程度。如同用周长增大至无穷的速率来度量边界曲线的分形结构一样，我们可以利用分辨率增大时地毯消失的速率来度量地毯分形结构。图 6.5（a）中直线的斜率为 0.11，如果用 2（未经啮啃的地毯的经典维数）减去这个数，可得：$\delta=2-m=1.89$。这就是曼氏从分形几何理论推出的 Sierpinski 地毯的分维数。一般来说，如果我们在一系列递增的放大倍数下，测得了分散系统中背景的消失速度，并发现了如图 6.5（a）所示的对数坐标中的直线关系，那么，该分散系统的结构就可以用 Sierpinski 分形描述，分维数的数值可以由直线的斜率求得。在本书中，我们将把描述图 6.5（a）所用的估计分散系统分形结构的数据形式，叫做"剩余面积——消失孔洞"型 Richardson 曲线。图 6.5（b）所示是具有随机统计自相似性的 Sierpinski 地毯（见图 6.4）的"剩余面积——消失孔洞"直线，由图可知，这种地毯的消失速率要比理想地毯的低，因为随机化使孔洞之间产生重叠，孔洞重叠的影响可以通过比较两个系统的 Sierpinski 分维数值来定量研究。

6.2　模拟的农药喷洒系统沉积效率的分形研究

为说明 2 维空间中分散系统的 Sierpinski 分维计算方法，可把图 6.1（a），（b）假定为农药液滴沉积在叶面上的模拟图形。科学家研究农药液滴沉积的目的，不仅在于研究液滴尺寸的分布，即农药喷洒时的分散能力，还在于研究农药液滴在叶面上的覆盖效率。在测得图 6.1（a）中圆形的尺寸分布并把它画在双对数坐标纸上后，所得到的是一条如图 6.6 所示的直线。为考查农药液滴在叶面上的覆盖效率，我们把图 6.6 中的数据形式

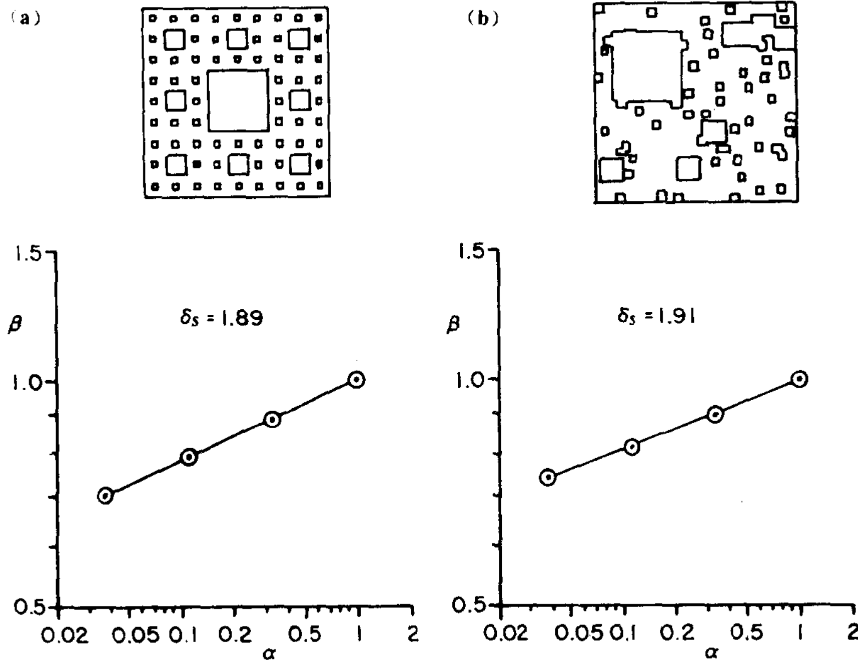


图 6.5 理想 Sierpinski 地毯的消失速率与其分维数 $\delta=2-m$ 有关，这里 δ 为地毯的分维数，m 为数据线的斜率（此处原文有误——译者注），在统计自相似的 Sierpinski 地毯中，由于孔洞的重叠减小了地毯的消失速率。(a) 理想 Sierpinski 地毯的消失速率；(b) 统计自相似 Sierpinski 地毯的消失速率；α 为刚刚移去的“蛀虫”（孔洞）；β 为未“吃掉”的地毯面积

作一下转换。首先，列出显微镜下测得的液滴面积，并用整个视野的面积去除以进行标准化（我们设想图 6.1 (a)，(b) 的正方形视野，是被农药液滴沉积的叶片面积的放大）。现在我们假定，最初把显微镜调到仅能看到标准化尺寸为 α_1 的最大液滴。如前所述，这一清晰可见的尺寸用 Mandelbrot 专著中的分形术语称为“刚刚消失的蛀虫”。因为我们所能看见的仅仅是大于“刚刚消失的蛀虫”的液滴，因此，可以求得没有被可见液滴覆盖的叶片面积分数为 β_1。

第二步假设把显微镜调到正好能看见标准化尺寸为 α_2 的液滴，这时，没有被可见液滴覆盖的叶片面积分数为 β_2。增大显微镜的放大倍数，我们依次可以看到标准化尺寸为 α_3 的液滴，而未被可见液滴覆盖的叶片面积分数为 β_3，等等，直至全部数据都被标准化。利用这些标准化的尺寸分析数据作图可得图 6.7。

图 6.7 中，横坐标为标准化液滴尺寸的对数值，纵坐标为剩余面积分数的对数值。由图可知，所得结果正好是一条直线，其斜率为 0.03，由此我们可以求得图 6.1 的分维数 $\delta=2-0.03=1.97$。这一分维数是当我们看见越来越小的液滴时，叶片背景消失快慢程度的一种度量，因此也是模拟液滴对叶片的覆盖效率的一种度量。

通过理论推演，Mandelbrot 得出图 6.1 (a) 的背景分维数为 1.990，而实验测得的分维数是 1.97，因此，对于这种测试方法，可以认为 Sierpinski 分维数的理论值和实测值是相当吻合的，这表明用上述的数据变换方法，可以准确地求得分散系统背景的 Sierpinski 分维数。

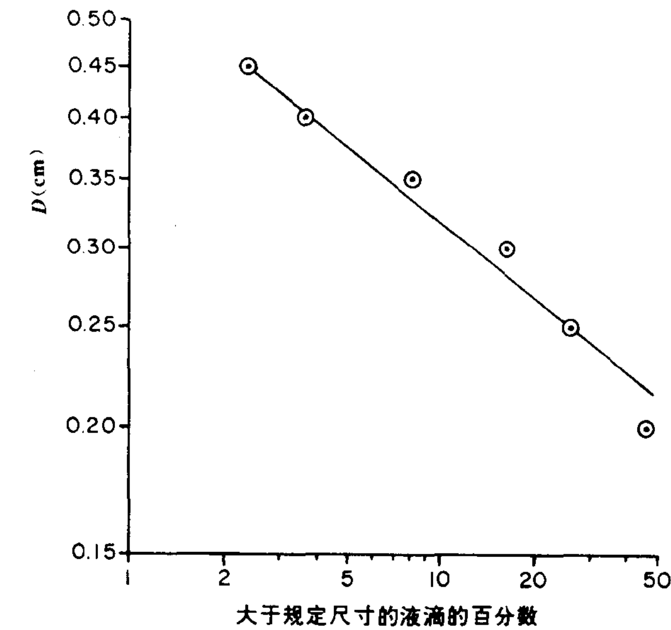


图 6.6 图 6.1 (a) 中的圆点可以认为是农药液滴，如果把 Dapple 图象分析仪测量模拟液滴得到的分布函数画在双对数纸上，可以得到一条直线

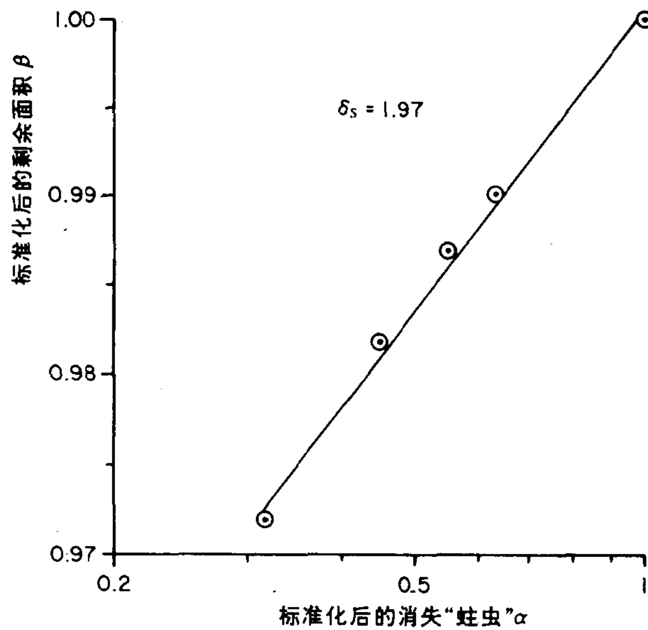


图 6.7 图 6.1 (a) 所示图形的 Sierpinski 分维数的实验值为 1.97

图 6.1 (a) 中的分散元的尺寸分布可以用对数分布描述这一事实表明，如果把具有双对数尺寸分布的细颗粒随机地分散在某一表面上，那么某结果可用 Sierpinski 分形描述。

图 6.8 所示的是图 6.1 (a) 的“剩余面积——消失孔洞”型 Richardson 直线，直线的斜率为 0.09，因此背景的分维数是 1.91。这和 Mandelbrot 求得的 Sierpinski 分形的理论维数 1.90 相当。比较图 6.7 和图 6.8 可知 Sierpinski 分形的物理意义是：Sierpinski 分形的维数越小表明放大倍数增大时背景的消失速度越快。值得注意的是用这种方法求得的维数比理论值稍大。造成这种差异的原因可能在于，用数学方法构造如图 6.1 (a) 的视野时，Mandelbrot 允许一些孔洞位于已有的孔洞上，因此，这些孔洞“吃掉”背景的

效率没有它应有的那么大，因为它们所“吃掉”的部分面积本来就是空的。

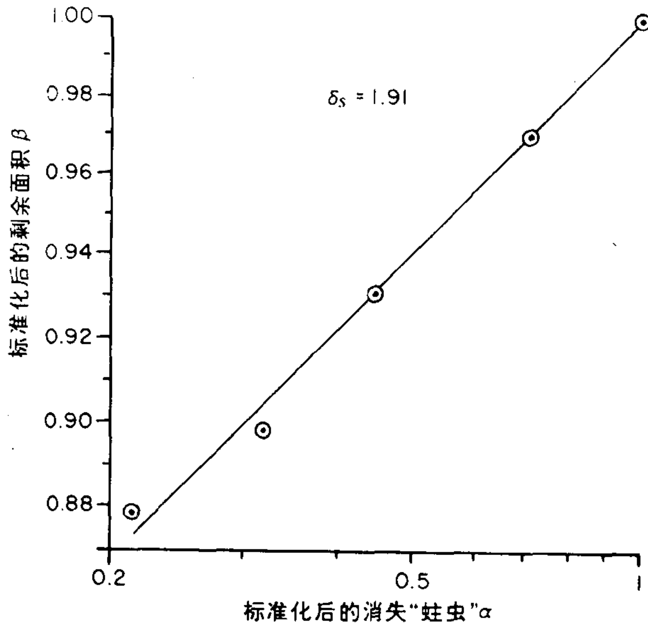


图 6.8　图 6.1 (b) 所示图形的 Sierpinski 分维数的实验值为 1.91

对于叶面上农药液滴的沉积而言，其 Sierpinski 分维数理论值和实验值之间的差异可用以评价不同喷洒技术的效率。例如，如果知道了喷洒农药时喷嘴喷洒出的液滴的尺寸，那么，就可以用计算机建立沉积液滴的理论分形模型。背景面积上液滴的随机沉积可以在计算机上用无重叠构造来模拟（实际上我们不必建立一个视野，因为已知液滴分布函数可以转换成“剩余面积——消失孔洞”型 Richardson 直线所需的数据，而无需对农药液滴的任何沉积形式进行测量）。人们进而可以测量在谷物或树木上实际喷洒时沉积液滴的 Sierpinski 分维数，并考查农药液滴荷静电后是否会增大在叶面上实际沉积图形的 Sierpinski 分维数。Sierpinski 分维数在理论值和实验值方面的任何差异，都可作为谷物保护技术效率的一种度量。

6.3　实际分散系统的 Sierpinski 分形描述

图 6.9 是复印机所用的珠状干墨（即我们所知的增色剂）切片的电镜照片，照片的放大倍数为 100000 倍。珠状干墨是将碳黑颜料分散在干净塑料上而制成的。这些分散碳黑的每一个微粒的边界都具有分形结构。图中所示的单个微粒边界结构分维数的分布已在第 4 章作过讨论。如果把视野中的碳黑颗粒看作正在形成的“蛀虫”，我们就可以计算出包含碳黑微粒的基质的 Sierpinski 分维数。计算时首先测出碳黑颗粒的尺寸分布，然后转换数据以构造处理 Mandelbrot 的瑞士奶酪（图 6.6）时所用的“剩余面——消失孔洞”型 Richardson 直线，计算结果如图 6.10 所示。由图可知图形由两段直线构成，其原因可解释如下。

原始的粉末可能并不包含分开的两个区域的左侧的微细粒子，标准化剩余面积不大于 0.15 的细颗粒的 Sierpinski 分维数很小表明，当碳黑分散到塑料上时，它可能受到了



图 6.9 颜料分散的背景，例如碳黑在塑料基质中的分散，具有分形结构，放大倍数为 100000

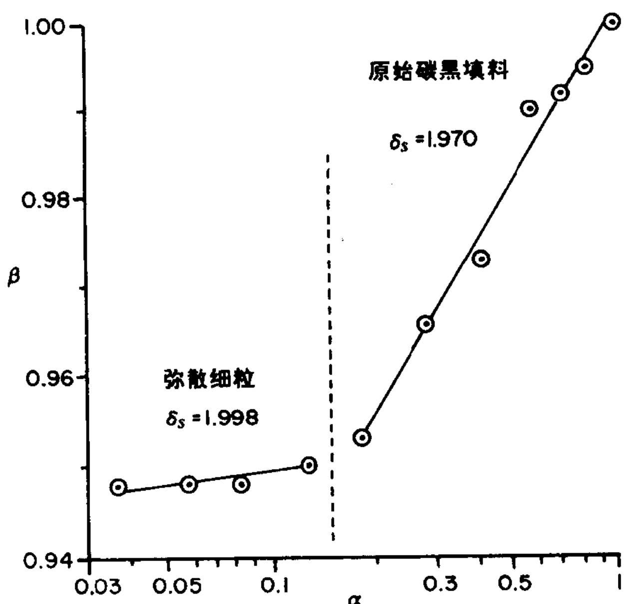


图 6.10 图 6.9 所示碳黑轮廓的“剩余面积——消失孔洞”型 Richardson 直线包含两个明显的线性数据关系。α 为标准化后的刚刚移去的“蛀虫”(孔洞)，在这里孔洞即为碳黑；β 为标准化后的剩余面积；α 和 β 用整个视野的面积进行了标准化；δ_S 为支承基质的 Sierpinski 分维数

很大的剪切力，这使得原始粉末颗粒脱落下一些微细碎片而形成第二个粒度区，即图中 Sierpinski 分维数为 1.998 所示的部分。

因此，图中两条线段代表的区域可称为“分散碎片”区和“原始碳黑填料”区。原始碳黑填料区与粗分辨率数据相对应，直线的斜率为 0.030，相应背景基质的 Sierpinski 分维数为 1.970，该 Sierpinski 分维数表征原始碳黑粉末在塑料上的分散行为。

原始碳黑粉末中微细颗粒的另一个来源，是为得到增色剂粉末的电镜照片而进行的切片过程。切片刀是极为锋利的，它可以通过待观察的标准精确切割，但切片时可能切去一些跨越切面的颗粒的棱角而形成碎末。

这类系统的 Sierpinski 分维数有可能用以表征颜料和复合材料的重要性质(见第 5.4 节中对薄膜涂料结构的讨论。)

使用最早的人造复合材料大概要算混凝土了，近些年来，人们对改进混凝土强度方面非常感兴趣，如排除混凝土中的气孔和使用特殊砾石来增大密度等[3]。图 6.11 是不同混凝土的两个切面。正常的混凝土（如图 6.11（a））中有许多气孔，空气所占的体积可达 30%。图 6.12 画出了图 6.11(a)中的气孔，同时画出了计算气孔周围背景的 Sierpinski 分维数的直线。如同分散的碳黑粉末一样，每个“蛀虫”（气孔）都具有分形结构。单个气孔的分维数和气孔周围基质的 Sierpinski 分维数可能与混凝土的断裂强度有关。图中两个线性数据区的重要性（如果有的话）要求我们扩大观察范围，以考查不同区域的准确特性，同时也要求除了这里所报告的实验外，再做一些与之相关的物理测试。

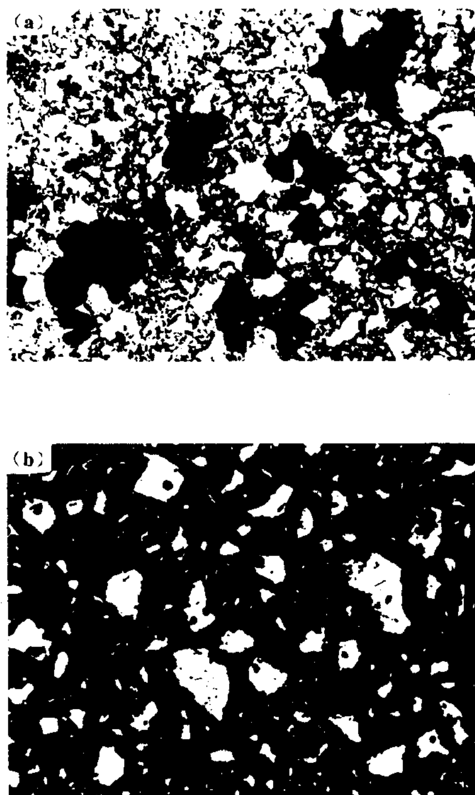


图 6.11　通过混凝土的切片是一种分散体系，对支承基质是一种 Sierpinski 分形。(a) 包含空气孔隙的普通混凝土；(b) 消除了空气孔隙的高强度混凝土[3]

图6.11（b）是一种高强度的新型混凝土，它内部的气孔实际上已被消除。图中轮廓显著的部分很可能是混凝土中砾石和砂粒的切面（注意：聚集体（aggregate）这个词在混凝土工业中用于描述充填在混凝土中的砾石，本书中该词的另一个含义是表示松散的细颗粒集合体。为避免混淆，当我们讨论混凝土时将继续用砾石或充填砂的原名，而不同聚集体）。

为获得砾石和砂粒周围基质的 Sierpinski 分维数，图 6.13 中作出了有关的 Richardson 图。结果表明，Sierpinski 分维数用于描述各种类型的混凝土结构或许是有用的。现在，Larentian 大学正对各种类型的混凝土和其它复合材料的 Sierpinski 分形进行实验研究。

许多岩石本身就是自然形成的复合材料。图 6.14 是被地质学家称为“长石流纹石”浸染体的切面图。我的一个研究助手（他正在开发测量自然物料分形结构的方法），从

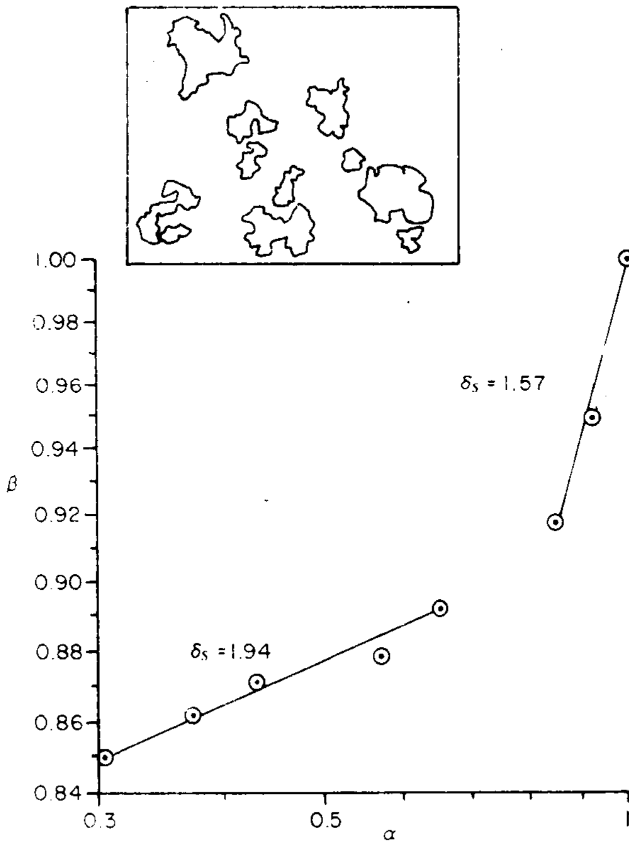


图 6.12 背景分形（由混凝土中的孔隙产生）的"剩余面积——消失孔洞"型 Richardson 直线，α 和 β 均已用整个视野的面积进行了标准化，δ_S 为背景基质的 Sierpinski 分维数

Larentian 大学地质实验室的几个陈列室里随机选取了这个样本，并测量了该岩石基质的 Sierpinski 分维数，得到的数据如图 6.14 所示。起先，我们曾被图 6.14 中存在两条不同的"剩余面积—消失孔洞"型线段所迷惑，然而，当把这幅图拿给地质系的 Beswick 教授看时，他立刻对此产生了极大兴趣，因为据说这种岩石显然存在两个阶段的结晶过程，从而产生了两组粒度与数目都不同的晶体。因此，图 6.14 中的两条线段可能正代表了岩石中这两组不同的晶体。事实表明，Sierpinski 分维数通常是定量描述矿石和地质系统结构的有用参数，（参见第 10 章路标 4 中讨论的阿波洛尼奥衬垫）。不过我们应该注意到，关于分散微粒在 2 维空间中的分布方式 Sierpinski 分维数并未提供任何信息。

6.4 过滤用多孔介质的分形结构

只要将我们的想象力作一次小小的飞跃，我们即可从前一节的研究领域过渡到图 6.15 所示的各种过滤介质上来。

图 6.15（a）所示是银膜过滤介质表面的照片[4,5]，这些过滤介质被健康与安全专家广泛地用于矿山空气中石英粉尘的过滤研究。这些过滤介质的标准规格，即介质能捕获的粉尘颗粒的最小尺寸，为 0.8μm。当可吸入的有害石英粉尘收集在过滤介质表面时，可以用 X 射线衍射的方法进行检测与定量估算以确定这种粉尘在矿山空气中的含量。银膜过滤介质的制造方法是把银粉压实并经轻微烧结而成含有开放式连续孔隙的垫状物。孔

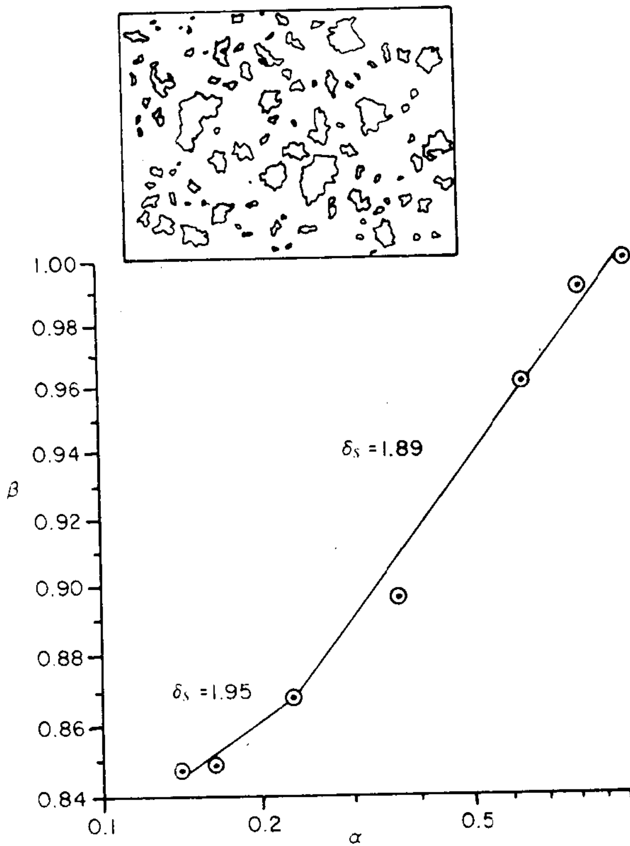


图 6.13 图 6.11 (b) 中砾石和砂粒的"剩余面积——消失孔洞"型 Richardson 曲线，数据线的间断点或许代表了某一分辨率，在该分辨率处开始看到砂子，因为混凝土中的砂粒要比砾石小得多。β、α 分别代表标准化后的剩余面积和消失孔洞(这里的孔洞就是背景基质中通过砂子和砾石所截得的轮廓)。α 和 β 均用整个视野的面积进行了标准化，δ_S 代表 Sierpinski 分维数

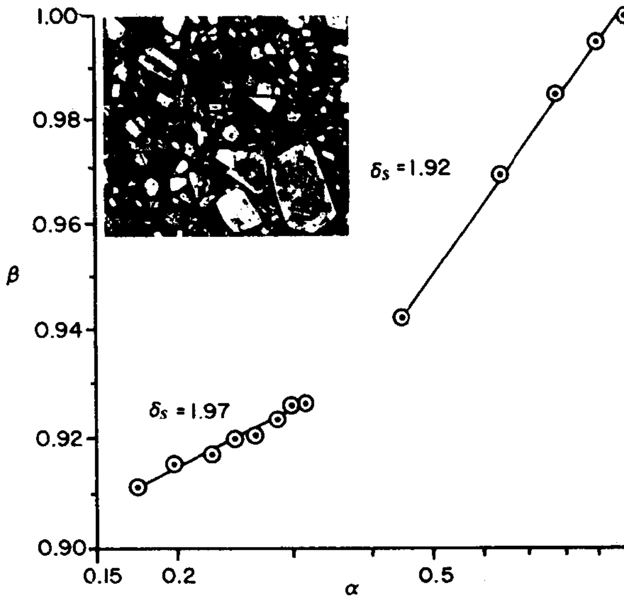


图 6.14 长石流纹石浸染体样本显现出二段线性区，这也许与岩石形成时二个不同阶段的结晶过程有关。α 和 β 分别代表标准化后的消失孔洞和剩余面积（这里的孔洞即为长石晶体)，α、β 均已用整个视野的面积标准化，δ_S 为 Sierpinski 分维数

隙结构的 Sierpinski 分维数可能与生产滤膜所用的粉末尺寸、烧结时间、介质强度及介质对空气的阻力有关。对于多孔金属电极及其它陶瓷或金属粉末的烧结产物而言，它们的结构特征也可以用 Sierpinski 分维数来描述。

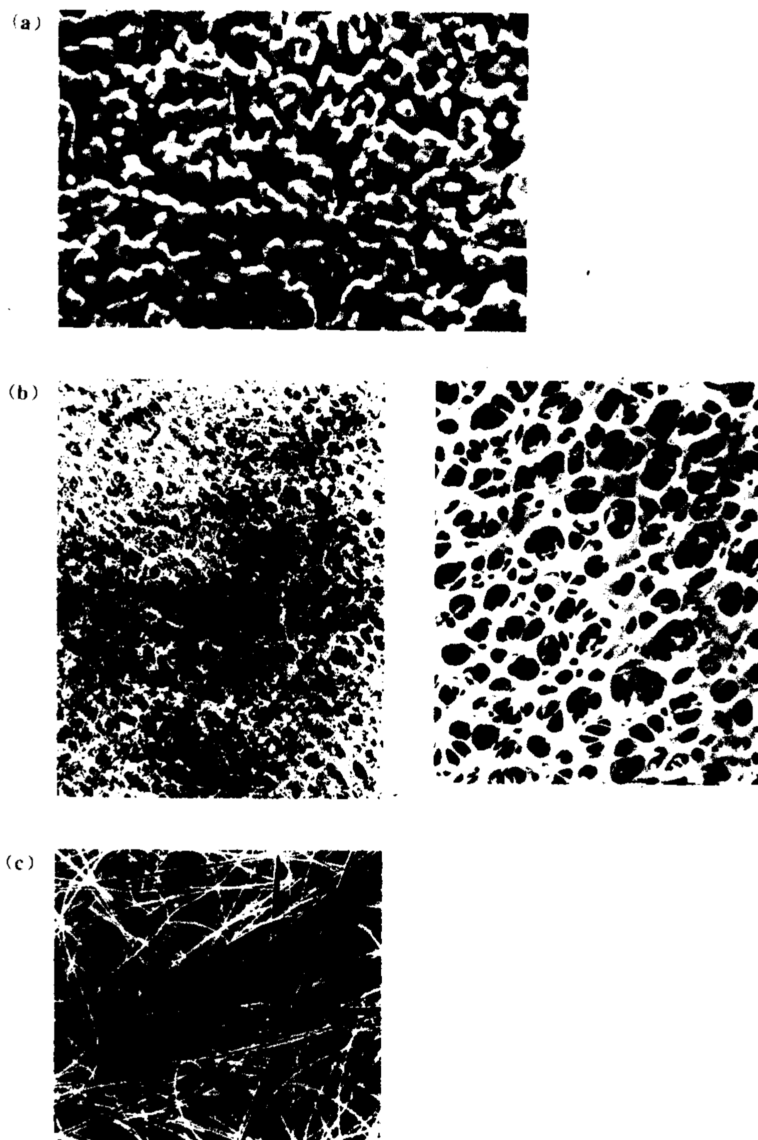


图 6.15 过滤系统的数学模型与 Sierpinski 地毯之间只需一个小小的想象飞跃。(a) 用于工作环境中石英粉尘过滤的银膜过滤介质的表面照片[4,5]；(b) Gelman Science 生产的塑膜过滤介质[6]；(c) Gelman Science Inc 生产的羊毛过滤介质[6]

图 6.15 (b) 所示的过滤介质称为过滤薄膜，这个名字的由来是因为它们很薄，看起来很象人体的膜。在讨论过滤技术时，区分两种主要的过滤方法是有意义的。一种是表层过滤 (Surface filter)，另一种是深层过滤 (Depth filter)，图 6.16 是二种不同过滤形式的示意图。表层过滤介质是用中子轰击塑料薄片制成的，如珊瑚藻。穿过介质的中子先削弱了塑料的强度，随后的中子侵蚀产生出贯穿于塑料薄膜的光滑的圆柱形孔隙．孔隙的尺寸受中子侵蚀时间的控制。使用表层过滤介质时，过滤过程实质上是把过滤物截留在过滤介质表面的 2 维过程。过滤介质的有效尺寸是被截留颗粉的最小粒度，亦即过滤介质中的孔隙直径。深层过滤介质比表层过滤介质厚得多，并具有类似海绵体的结构。这种过滤介质的截留能力必须用标准气溶胶或试验用悬浮液确定。颗粒在海绵体过滤介质中的滞留过程包括颗粒在 Menger 海绵中的随机运动。Menger 海绵是 Sierpinski 地毯在 3 维空间的扩展，我们将在下一章对其作简要讨论。尽管图 6.16 中的海绵型过滤介质的平面孔隙明显地比表层过滤介质大，但二种过滤介质的标准规格却是一样的。确定海

绵型过滤介质的 Sierpinski 分维数，并考查该分维数是否与测定的截留能力有关，将是一项十分有趣的工作。

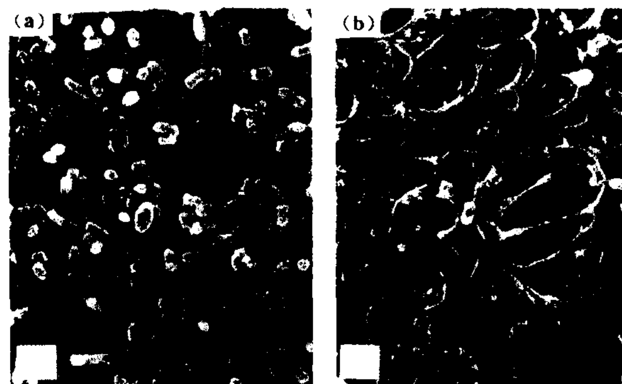


图 6.16 过滤专家把过滤区别为表层过滤和深层过滤两类[7]。(a) 截留于中子轰击法制得的过滤介质表面的细菌；(b) 海绵体过滤介质滤得的细菌，这种过滤介质要比中子轰击法制得的过滤介质厚得多，两张照片是在相同放大倍数下拍摄的，中子轰击型过滤介质中的单个孔隙的直径为 0.4μm,，海绵体型过滤介质所能截留的微粒的实验确定值为 0.15μm

图 6.15 (c) 是另一种相当不同的过滤介质，它是由细长纤维随机堆成的一块垫子。用术语表示，这种结构称为毡子。制造时，将纤维浆体滤过一个支承网格，一旦纤维形成垫子，则将其从网格上移走。许多自然纤维，如羊毛和头发，都具有足够毛糙的细微结构，因此压成毡子时能紧密地联结在一起，棉毡就是这样制成的。过滤介质 (Filter) 与毛毡 (Felt) 在构词上颇有关联，因为前人习惯上用动物毛的毡子缝制衣服，然后又用这种布片过滤饮用水中的脏物。纸张也是一种毡子，它是由纤维素压成的。新鲜的树木纤维不用添加任何粘合剂就能压成致密的毡子，但用回收的树木纤维造纸时，为形成致密整体，有时需要在纤维层表面喷上粘合剂。

多年来，设计一种能保持建筑物和人群免受有毒粉尘侵害的过滤系统一直是我的个人爱好之一。因为许多过滤介质都是由纸做成的，所以，这种过滤介质的基本结构与图 6.15 (c) 相似。1977 年秋天，当我首次翻阅 Mandelbrot 的分形几何著作，看到书中 105 页的插图时，我认为我已经找到了这种毡状过滤介质分形结构的断面。这幅特殊的图片复制于图 6.17 (a) 中，显然它与图 6.15 (c) 颇为相似。不过，从原图中的说明可以看出，Mandelbrot 是想用他自己画的这些杂乱无章的直线表示欧洲某城市的街道。图中粗细不同的直线分别代表宽阔的林阴大道和纵横交错的街巷，直至实际上是无穷窄的仅供蚂蚁爬行的路线。习惯于格子型街道的北美人也许没有见过图 6.17 这样的城市规划。为构造这幅图，Mandelbrot 假定“街道”的宽度分布是双对数比例函数。他讨论了这样一个事实，如果能画出窄得看不见的直线，那么，街道之间的“白宫（指图 6.17 (a) 中直线间的空白区域——译者注)”将小到面积为零！换句话说，图 6.17 (a) 是一种有别于 Sierpinski 地毯的 Sierpinski 毛毡。

Mandelbrot 认为图 6.17 (a) 这样的城市本质上是一件新奇的事实，而且多半是装饰性的。这与我的感觉截然不同，我认为这幅图正是描述纤维毛毡从而描述过滤介质分形结构的关键。如果实际过滤介质是一种 Sierpinski 毛毡，那么过滤介质内孔隙的 Sierpinski 分维数应该是描述过滤介质结构和截留能力的有趣而且有用的参数。

当我首次接触到 Mandelbrot 的街道模式时，我想起了早些时候看到过的一本关于气体过滤的书中的两幅插图，该书的作者是 C. N. Davies[9]。为便于直观比较，我在图 6.17

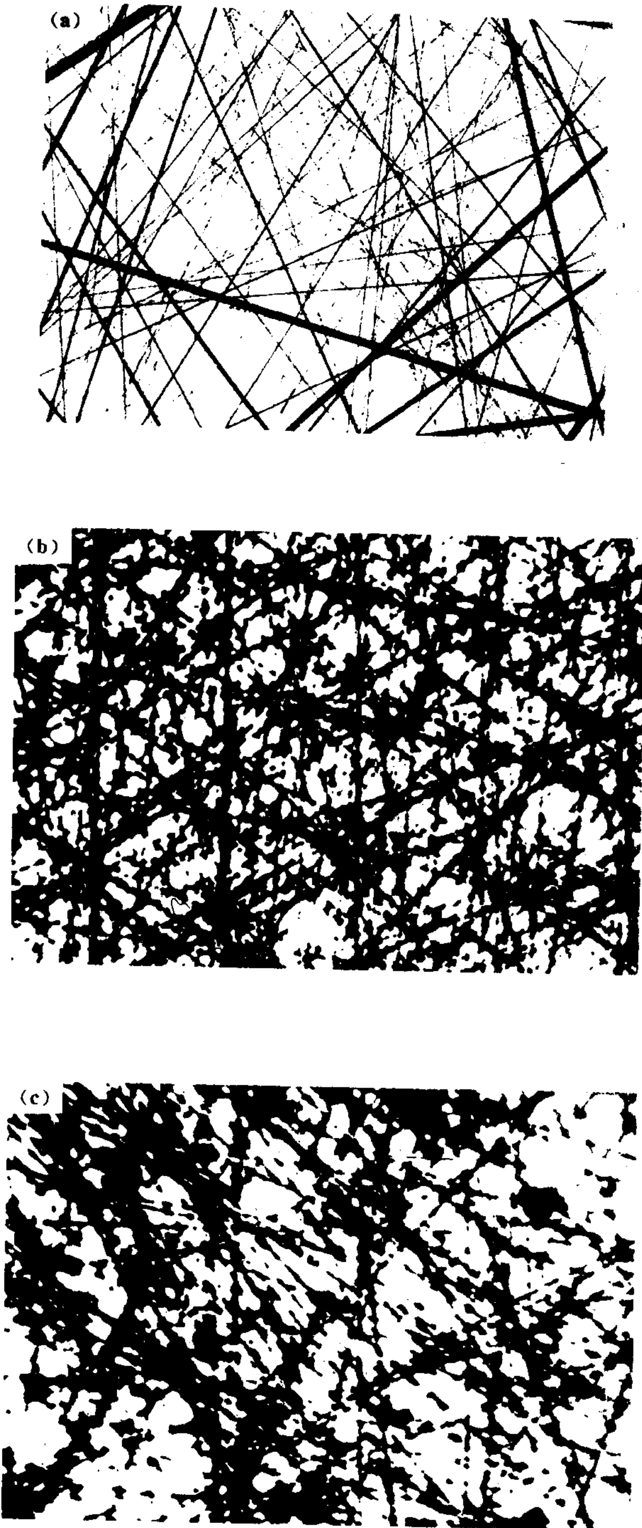


图 6.17 Mandelbrot 的街道地图，它看上去很像真实的和模拟的纤维过滤介质。(a) Mandelbrot 构造的街道图；(b) 计算机模拟的纤维过滤介质照片；(c) 实际纤维过滤介质的电镜照片[8]

(b)、(c) 中给出了这两幅图。它们最早被刊登在 Fuchs、Kirsh 和 Stechkaina 的科学出版物上[8]。

Sierpinski 毛毡看上去比图 6.2 所示的 Sierpinski 地毯具有更开放的结构。其实，是否如此完全取决于你准备在 Sierpinski 地毯中构造的孔隙数目。构造图 6.17 所示的 Sierpinski 毛毡时，一点一点“吃掉”的过程一直持续到地毯只剩下“赤裸的线”。

为探索毛毡的分形结构，在图 6.18 中构造了一个模拟的过滤介质，在毛毡结构的首次模拟过程中，为简单起见，我们假设所有的纤维具有同样的直径，而且长度是无限的。纤维越过过滤介质面的位置由图 6.18 (a) 所示的选择规则决定。在这样的条件下，模拟所得的过滤介质示于图 6.18 (b)。图 6.18 (c) 是计算该模拟过滤介质中孔隙的 Sierpinski 分维数的 Richardson 直线。可以看出，模拟的过滤介质在不同观察尺度下具有二个不同的 Sierpinski 分维数。除非进行更多的试验，我们很难断定这种双值 Sierpinski 分形是实验误差所致还是随机纤维毡的本质性质。目前，有关的试验正在 Laurentian 大学进行，其目的是为查明这样一种可能性，即过滤介质的双值 Sierpinski 分形是介质本身的真实特性，这种特性与科学家们（他们正试图研究用于空气中细粒粉尘过滤的过滤介质）所遇到的一个令人困惑的问题有关。观察图 6.15 (c) 所示的真实玻璃纤维毡子可见，毡子上看起来存在二三个大孔隙，这些残留的大孔隙使得在低分辨率下观察时，Sierpinski 背景具有较大的消失速率，这正好和图 6.18 的模拟过滤介质在低分辨率时具有较大的 Sierpinski 分维数相对应。而高分辨率时的低 Sierpinski 分维数则反映了为数众多的小孔隙。从过滤效率的角度来看，象图 6.15 (c) 那样的少数残留大孔隙不利过滤，因为通过过滤介质的大部分空气都会从这些仅有的大孔隙流过。实际应用的许多呼吸器，往往包括一个如图 6.15 (c) 一样存在残留大孔隙的纤维状过滤层。所幸的是，污染的空气中往往存在一些较粗的粉尘颗粒，这些颗粒会很快地充满大孔隙，从而使过滤器的效率不致降低，这就是为什么呼吸器在污染空气中使用几分钟后，其效率会显著提高的原因。然而，这又给工业卫生学家出了一个两难之题，因为，在他与工作环境中的粉尘作斗争时，他将设法滤去尽可能多的粉尘，但在滤去空气中可见的粗粒粉尘时，实际上又会降低过滤器对看不见的微细有害粉尘的过滤效率。小于 30μm 的粉尘肉眼就看不见了，而工作环境中一些危害更大的粉尘却小于 5μm[4]。

在随机形成的纤维毡中，存在少数大孔隙，这一事实可以用统计学的观点来解释。当我们一次一次地往纤维毡中加纤维时，该纤维位于大孔隙上的机率要比位于小孔隙上的机率小得多；至于纤维落在大孔隙并把它分成二个小孔隙的机率就更小了[11]。

当我们深入研究过滤介质的分形结构时，我们觉得没有必要继续研究图 6.18 (a) 的模型，而是把我们的注意力转移到了与纸张形成过程联系密切的纤维结构模型上。在该模型中，短纤维根据图 6.19 所示的规则随机地收集在纸上（该规则是由 Clarenburg 及其合作者首先提出的，参见对图 6.20 的讨论）。

在造纸模型中，对用于支承纸张的格子作如下假设：落到格子上的最短纤维的长度比格子的对角线长，而且总是随机地落到格子上。造纸时，如不满足上述二条要求，纤维就会透过格子流走，尤其是在格子上形成纤维网的初期，从而导致造纸厂排放水的污染。模拟用短纤维形成纸张的规则如图 6.19 (a)。

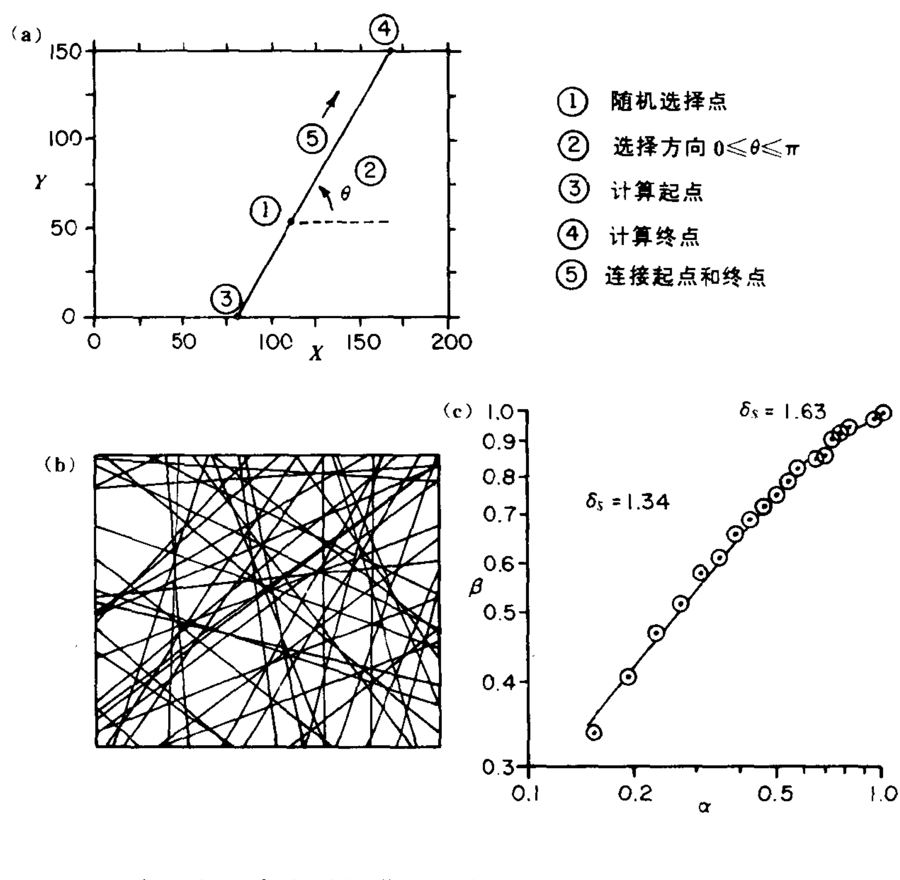
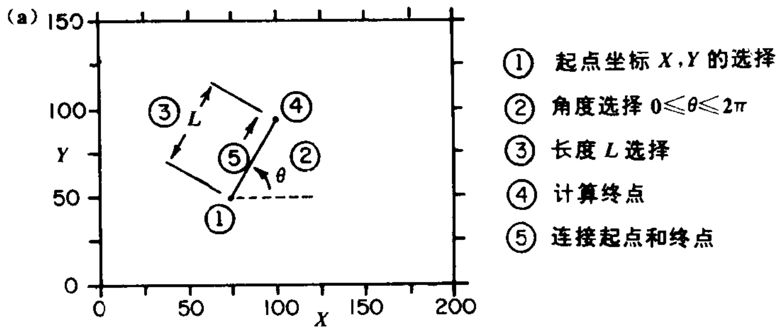


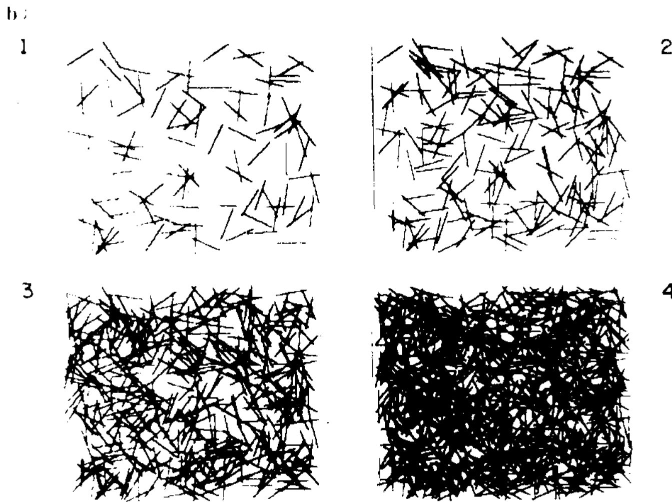
图 6.18 模拟纤维毡的孔洞结构可以用两个不同的 Sierpinski 分维数来描述，分辨率较大时的 Sierpinski 分维数反映了纤维毡中大孔洞的结构。(a) 添加在毡上的纤维的位置和方向是通过随机数据表确定的；(b) 根据图 (a) 构造的模拟纤维毡；(c) 图 (b) 所示纤维毡的 Sierpinski 分维数；α 为刚刚消失的孔洞；β 为剩余面积；δ_S 为 Sierpinski 分维数

显然，在这个由随机落下的纤维形成过滤介质的造纸模型中，人们可以引入许多变数，可以改变纤维的数目、长度和形状；可以选择不同宽度的纤维，并使其具有一定的卷曲及（或）曲率等。为便于讨论，我们把自己局限在相对简单的模型中，图 6.19 (b) 是在 200×250 个面积单位上用 30 个长度单位的纤维形成纸张的过程。长度和面积大小是根据画图用小型计算机的内存选定的[10]。

总纤维数目为 1000 条时，形成的纤维毡如图 6.19 (b)，依次为 1、2、3、4 的四幅图所示。存在一些相对较大的孔隙是这种纤维毡的一个显著特点。图 6.19 (c) 是纤维长度在 10 到 50 个单位之间形成的另一系列纤维毡。这里，对一定长度的纤维，其出现概率是事先赋于的。当在视野中放入一根纤维时，我们首先选择纤维的长度、位置，然后再是方向，所有这些都是由随机数据表中的随机数确定。研究表明，一旦纤维之间可以顺次连接，纤维长度的变化并不会明显改变纤维毡的结构。此外，我们再一次看到，纤维结构的一个重要特性：一些大孔隙的存在。

近年来，职业健康与卫生学专家研究了使用驻极介质纤维增大过滤毡对气溶胶粒子的捕收能力，从而提高呼吸器效率的可能性。驻极介电体是带有永久静电荷的系统。和暂时带电的状况不同。驻极介电体（Electret）这个名词是通过和永久磁铁相比较而产生的。后者具有的永磁场与只有在环绕线圈通电时才产生的电磁场不同[12]。Laurentain 大学的一些研究发现，让驻极介电纤维在静电场下排列而制造随机纤维毡时，可以减少毡中的孔隙[11]。这种排列纤维的技术并不局限于对驻极介电纤维，因为通过摩擦带电，可使普通纤维在到达造毡格子前带电。如后一种可能性得以利用，人们就没有必要总去判





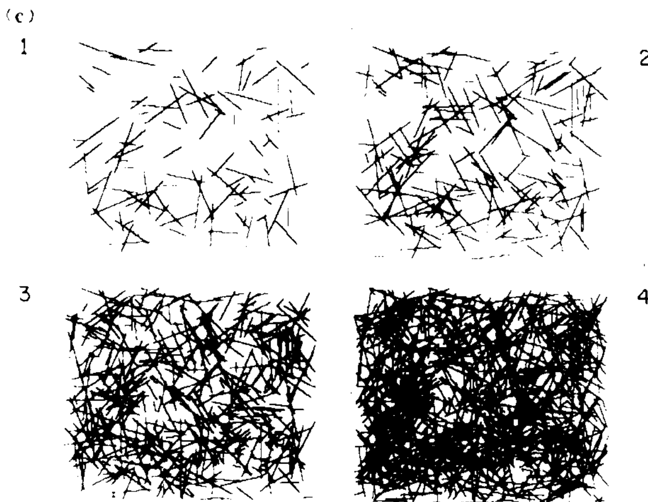


图 6.19 根据类似于 Clarenburg 首先提出的模型，用短纤维随机构成的纤维毡的结构可以用前述方法在计算机上模拟[10]。(a) 模拟短纤维毡时的构造规则；(b) 用 30 个单位长的纤维构造的、不同密度时的纤维毡；(c) 用长度变化的纤维构造的、不同密度时的纤维毡

断纤维表面是否带电，但是需要做一些初步实验，以模拟这种纤维毡的结构。在磁场中构成毡子的纤维有的平行磁场，有的垂直于磁场[13]。在制毡过程中，可将少量磁性材料参杂到合成纤维中使之定向排列。在纤维长度相同，并平行磁场和垂直磁场的纤维数相

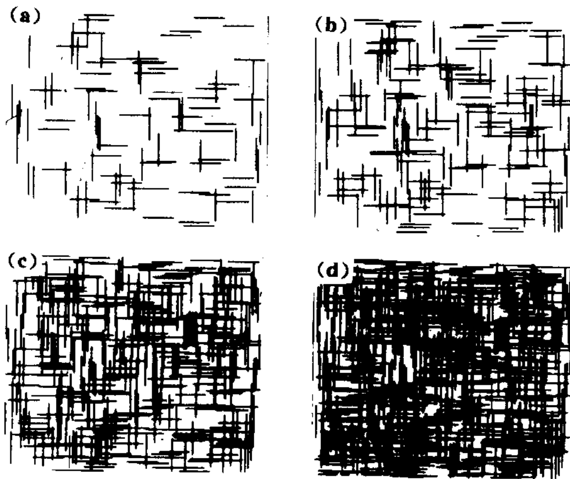


图 6.20 现在的造毡技术是在支承格子上叠加纤维，这样可以构造出前述形式的毡子

等的条件下，形成的毛毡如图 6.20。观察一下图 6.19 与图 6.20 中相应的第 4 幅图，看来有序排列的毛毡具有比随机构造的毛毡更均匀的结构。然而，需要进行大量的试验来比较许多随机构造的系统，同时计算有序排列和随机形成的毛毡的 Sierpinski 分维数，以考查肉眼看到的是视觉假象还是真实情况，Laurentain 大学正在进行一些模拟试验，以比较不同排列方式的从而具有不同性质的纤维毡的 Sierpinski 分维数[11]。

前已述及，在一组讨论纤维毡结构的科技论文中，Clarenburg 及其合作者首次提出了短纤维随机形成纤维毡的模拟技术[14—19]。图 6.21（a）是他论文中的一幅图[17]

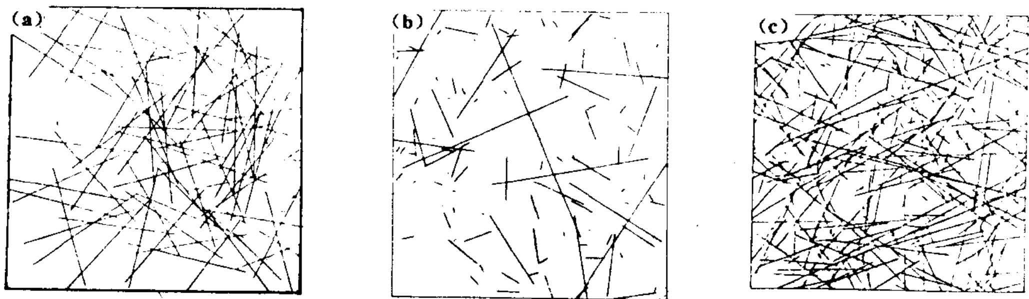


图 6.21 不同应用科学中能够用 Sierpinski 分形毡描述的例子。(a) Piekaar 和 Clarenburg 描述的初始短纤维毛毡[17]；(b) Balberg 及其合作者描述的模拟纤维复合材料[20—23]；(c) Jaeger 等模拟的压碎岩石中的裂纹结构[24]

随机纤维毡和排列纤维毡性质的模拟技术在其它研究领域也有应用，这从目测比较 Clarenburg 的图 6.21（a）和别的研究者的图 6.21（b），（c）可以看到。Balmberg 及其合作者研究了充填有碳黑的塑料材料的性质[20—23]。他们指出，碳黑充填色料可大致看作棒状的（Stick－like），碳黑在塑料中的粘接概率是粘结渗滤（Bond percolation）中的基本问题，这种渗滤在格子上是不会发生的，而且渗滤时各种长度的粘结都会出现。在生

成过程中，可以用各种各样的方法使纤维排列。Balberg 及其合作者证实，在生产过程中通过改变被排列纤维的数量可能改变普通材料的性质。他们的模型显然对任何纤维改进或加强性能的合成材料都适应。

图 6.21（c）是计算机模拟的被破坏岩石碎片内部的裂纹。在他们的研究中，Jaeger 等观察了岩石爆炸产生最初碎片时的碎裂方式[24]。从图 6.21 可知，在模拟充填物结构时作为练习的实验可以应用于模拟岩石和碎片的断裂性质（分形几何在碎裂研究中的应用详见第 9 章）。

6.5 过滤系统中的枝状捕获树

过滤专家们已经注意到，被过滤介质截留的微细颗粒倾向于在介质表面形成蕨类植物状结构，而不是在介质表面均匀分布[25,31]，这一现象如图 6.22（a）～（c）所示。颗粒专家称这些蕨类植物状结构为枝状晶体（Dendrites），该词源于希腊语“Dendron”，后者意为一颗树。在本书中，我把这种在纤维表面产生的枝状被捕获粒子称为捕获树（Capture Trees）。

1984 年，北卡罗来纳州三角研究所（Research Triangle Institute）的 Ensor 博士把我的注意力吸引到了这样一个事实上，即纤维过滤介质上看到的捕获树的结构也许可用分形几何的概念定量描述。这在 Ensor 博士及其同事 Mullins 博士后来的文章中作过论述[25]，图 6.22（a）即取自于本篇文章。比较图 6.22 和 Voss 模拟金属离子在电极表面沉积的图 5.24 可知，控制捕获树产生的主要因素是静电力，是静电力把通过的气溶胶微粒吸附到捕获树的枝端，从而表明捕获树的分数维可以作为碰撞粘合概率的一种度量，同时也可作为在过滤系统中起作用的静电力的一种度量，这种静电力决定了特定细颗粒在过滤介质表面的吸附效率。

图 6.22（b）、（c）所示的气溶胶微粒捕获树是由氯化钠微粒形成的。由图 6.22（b）可知，细纤维捕获颗粒的能力比粗纤维强。图 6.22（c）中的两根大捕获树的分维数如图 6.23 所示。

如何表征捕获树的分形结构对研究新型过滤介质的过滤效率是一项重要技术，这种新型过滤介质是基于前节所提到的驻极介电纤维。前已述及，驻极介电纤维带有永久静电荷，因而能够有效地截留某些有害粉尘。然而，驻极体过滤介质的工作性能与粉尘性质有关。这也是预料之中的，因为，如果静电力对捕获细颗粒起重要作用，那么与纤维有关的粉尘静电特性将随粉尘的不同而不同。环境条件（如湿度）的变化还将改变驻极体过滤介质的过滤效率。当在不同环境下生长的捕获树结构的分维数发生变化时，这种过滤效率的改变将越发明显。

因此，利用特定粉尘并控制环境条件，进行单根纤维上的捕获树生长实验，以考查捕获树分形结构是否和过滤介质的过滤效率有关，将是非常有趣的。

最近的研究表明，过滤系统的主要问题之一——细颗粒在过滤介质中的迁移，可能与捕获树的分维数有关。在一个过滤系统中，如果某一捕获树，如图 6.24（a），是在纤维表面以高捕获率形成的（例如捕获概率为 1，即通过粒子与捕获树的每一次碰撞都导致



图 6.22 不仅纤维毡的结构可以用分形几何描述，而且，纤维系统中生长的聚集体也显示出分形结构。(a) 直径为 25μm 毛纤维上形成的 4.1μm 胶乳捕获树，由 Ensor 和 Mullins 摄得[25]；(b) 纤维毡上形成的氯化钠枝状物，这是由 Minnesota 大学的 Rubow 博士摄得的[26]；(c) HEPA（高效颗粒过滤 (High—Efficiency Particle)）型毡上形成的氯化钠枝状物[27]； (d) 在 Hansen 过滤介质中，沉积在羊毛纤维上的粒状树脂被用于通过超声波捕获空气中的微细颗粒[28]

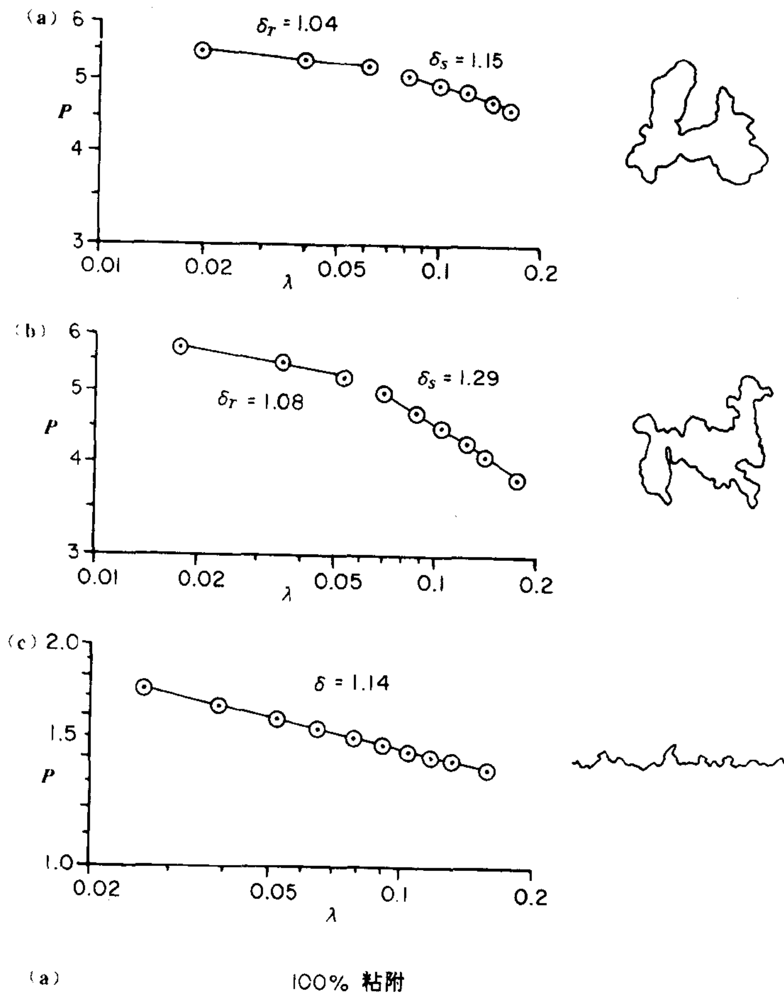


图 6.23 在 HEPA 过滤介质（图 6.22(c) 所示）上形成的氯化钠枝状捕获树的分维数。(a) A 组的分维数；(b) B 组的分维数；(c) 图 6.22 中纤维外形轮廓的分维数

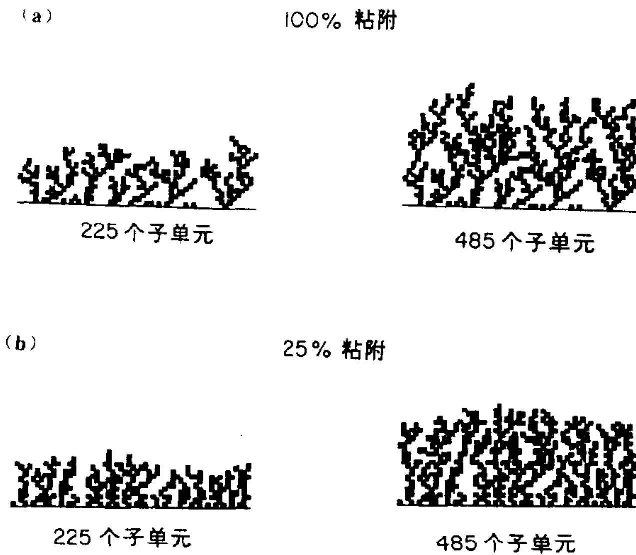


图 6.24 使用驻极体过滤介质的工程师所面临的一个设计困难是，高捕获效率往往导致低强度、高分维数值的捕获树，这种捕获树容易破坏并流过过滤介质（该图中的捕获树是一种模型，而非真实看到的捕获树）。(a) 高捕获机率时形成的弱茎高分维数捕获树；(b) 与高分维数捕获树相比，低捕获机率条件下，沉积过程中形成的低叉捕获树不易破坏并通过过滤介质流动

永久性的捕获)，那么捕获树一般是具有一根弱茎的开放式羽毛状结构。流过过滤介质的空气将对蕨状捕获树施加压力，从而有可能使捕获树藉以生长在纤维上的单茎折断。有鉴于此，如图 6.22 (c) 所示的多枝分形捕获树在图中标有数字 1～5 的几个点处显然存

在好几根弱茎。

另一方面，如果捕获树是一种象图 6.24（b）那样的低矮的灌木（对于一个碰撞颗粒，这种类型捕获树的捕获概率小于 1，见第 4 章讨论的 Voss 树），那么捕获同样数目的细颗粒就需要较多的纤维。不过，这样形成的捕获树轮廓低矮，结构稠密，因此不易折断，不易通过过滤介质而流失。运用 Voss 生成电极沉积树的类似方法，在单根纤维上生产捕获树，并把它与计算机模拟的结构相比较，我们可以评估各种作用力对捕获树生长的相对贡献。

值得注意的是，Ensor 和 Mullins 已经指出，沿着纤维生长的各种捕获树的外形和颗粒边界一样具有某一分维数，而纤维和捕获树的分维数很可能与测得的介质阻力系数相关（捕获树形成后，该阻力系数支配气体穿过介质的流动）。

图 6.22（d）是过滤技术另一领域的某一结构，在该领域中，分形几何对描述过滤介质的结构很有用处。1930 年，N. L. Hansen 开发了一种革命性的呼吸器过滤介质[9,28]。在这种叫做 Hansen 的过滤介质中，羊毛纤维的表面吸附了粉状树脂。羊毛纤维非常粗糙，其结构有如鳞片。细粒树脂粘附在纤维上并通过静电机理明显地吸附流过的粉尘微粒。吸咐在 Hansen 过滤介质中的树脂颗粒具有明显的分形结构。对于这类静电强化的过滤介质，其效率可能与树脂的形状密切相关。

粉尘颗粒在深层过滤介质中的渗滤是 2 维空间中的“漫步”过程，这种过滤理论将在下一章作简要讨论。

与本章前面几节所讨论的完全不同的另一类过滤问题是浆体过滤。浆体中含有大量固体物料，过滤时这些物料在过滤介质表面沉积成滤饼，滤饼（Filter cake）是经典的 3 维空间中具有分形表面的多孔介质，Houi 和 Lenormand 已从分形几何的观点出发研究了滤饼过滤问题[29,30]。

6.6 岩石上的康托分形

毫不奇怪，凭借读者已有的背景知识，本书的标题能使您脑海中产生许多想象：或许是一匹正在铺满石块的地面上奔驰的马，或许是一位正遇到财政困难的犹太教堂的会唱指挥（Cantor 是一种马的名字，教学会唱队的指挥在英文中亦叫 Cantor——译者注）。也许有些读者把本书的标题想象成是一位分形偏执狂调制的一种新式饮料的名字，事实上，本标题只是想说明，在看上去象 Sierpinski 地毯的岩石剖面上划线，可以构造出包含有用信息的康托集来。在讨论图 6.17（a）所示的“街道图”时，Mandelbrot 指出越过整个“城市”的某一条直线被别的直线所截成的线段（弦）就组成了一个康托集。

横越纤维毡的某一截线上的一组弦（即该截线被毡子本身所分成的一系列线段——译者注）是对过滤介质结构的一维控测。弦的尺寸分布和控测线上的康托尘（即截线与毡内纤维的交点）的大小都与纤维毡的 Sierpinski 分维数有关。研究探测线上康托尘的大小与过滤系统 Sierpinski 分维数关系的问题在于实验的置信度。因此必须对纤维介质进行大量测试，以建立准确的 Sierpinski 分维数。当我们转向用康托尘去描述建立在一维检测基础上的滤饼结构时，由于弦的统计波动性很大，因此获得可信度高的统计需要进行

大量实验。如何设计一个有效的实验过程，以使被研究的纤维毡中某一控测线上产生的康托尘和毡的 Sierpinski 分维数联系起来，是一个非常活跃的研究课题。为说明起见，图 6.25 列出了这方面研究的一些早期数据。

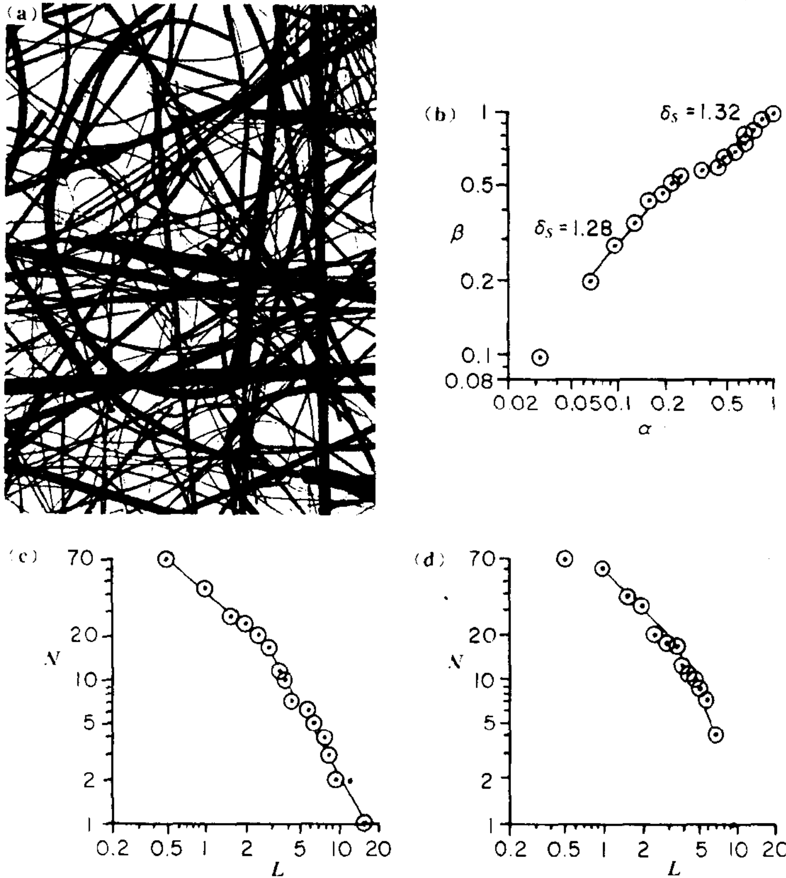


图 6.25 纤维毡的某一探测线被毡内纤维截得的弦是一种康托集，探测线上康托集的分维数是过滤系统结构的一种度量。(a)玻璃纤维毡的显微照片[16]；(b)玻璃纤维毡中孔洞的 Sierpinski 分维数；(c)图(a)所示的纤维毡中，探测线被纤维截得的弦的分布；(d)探测线被孔隙截得的弦的分布

如果能够借助于探测线上康托尘的相应维数，用划探测线这样的处理过程来充分描述纤维的结构，那将是很有意义的，因为探测线上“截留”的信息可以用配有现代计算机的显微检测方法迅速而经济地获得。

我最初在 Mandelbrot 的专著中看到康托棒和康托集时，它使我想起了地质学家用于描述岩石结构的方法，即所谓的 Rosiwal 截取法[32,33]，这也正是本节标题的来源。请看图 6.26 的上图，人们把它看成是一块待处理的矿石的剖面，其中待解离的有用矿物（用黑点表示）。在选矿处理之前，工程师们用爆炸法把岩石采出地面，他们希望知道矿石的品位，以便决定是否适于开采。研究岩石样本，确定有用矿物含量的专家称为岩相学家。岩相学是地质学的一个分支，在分形几何出现以前很久，Rosiwal 就已指出，如果在一块矿石的抛光剖面上随机地画一组直线，那么，样本中有用矿物的体积百分含量等于有用矿物所截取的线段长度与直线总长度的比（从我个人的经历来看，一个对岩相学陌生的人，是难以置信这一简单关系的。读者可以自己试着检验一下这一理论。因为图 6.26 中，圆圈部分的面积百分数为 7.8%，若读者在图中画一组随机直线，并用被圆圈所截线段的长度去除以直线的总长度，那么该比值恰好趋于这一百分数）。

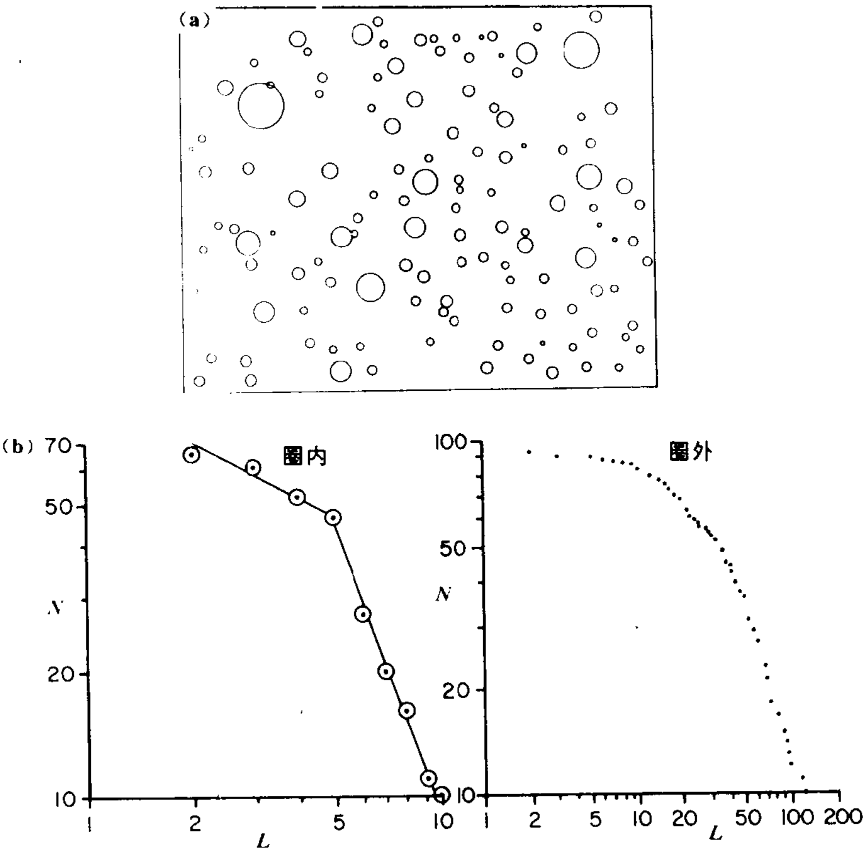


图 6.26 Rosi-wal 指出，探测线被分散物(此处指岩石抛面上的矿物组份)截得的弦可用于估计分散物的体积含量。因此，如果上图中一组探测线被分散物截得的弦的密度为 0.078(原文为 0.78)，那么黑圆圈所占的面积即为总面积的 7.8%。另外，截得弦的平均长度与分散物的平均尺寸有关

如果你能确信被测得的轮廓是随机分布在剖面上的，你就可以用一组规则的直线来测量，因为这种方法的理论不要求两者都随机。但是，如果被测轮廓存在任何非随机分布的可能，你就应该用一组随机直线去测量，以保证测试数据的准确性。然而，在许多情况下，我们都可以认为被测轮廓线是随机排列的，因此，用于测试的规则直线可以是电视摄相机的扫描线，所测数据可用与电视摄相机相连的计算机来处理。

致力于细颗粒特性检测方法研究的科学家也已注意到，检测某一体系的一组直线所截得的弦包含了确定分散物料粒度分布函数所需的所有信息[34-37]。然而，这种方法在初期曾陷入困境，因为为了获得置信度高的信息，必须测试为数众多的弦。有趣的是，在线扫描截取原理建立 30 年以后，基于这种原理的新设备才投放市场[38,39]。在新一代这样的设备中，激光被用于测量液体分散相中细粒物料的粒度。这种仪器是通过测量光线越过粒子时所产生的弦的长而表征粒度分布的。使用这种仪器时，由于激光光线是移动的，所以可以记录一段时间的光信号，而不仅仅是单个的物理量。30 年前，由于缺乏既便宜又强有力的数据处理设备，这种仪器的开发曾陷入迷途；现在不同了，随着快速便宜的数据处理设备的出现，这类粒度仪已成为现实。使用 Rosiwal 型截取信息可以评估岩石及其它复合材料的结构，对这种线截取技术的全面讨论已超出了本书的范围。然而，可以预言，随着分形几何的基本理论在地质学和金相学中应用的扩展，在用适合的康托尘维数表征体系的分形结构时，我们会看到上面提到的弦将得到广泛的应用。

参考文献

[1] The material reproduced in Figure 6.1 is taken from B.B. Mandlebrot, "The Fractal Geometry of Nature", (1983) B.B. Mandelbrot, San Francisco, 1983,pp. 306-307.

[2] Sierpinski's work is reviewed in Mandelbrot's book, [1]; details of his work can be found in the following publications: (a) W. Sierpinski, "Sur une Courbe dont Tout Point est un Point de Ramification," *C. R. Acad. Sci.* (Paris), 160, (1915), 302; (b) W. Sierpinski, "Sur une Courbe Cantorienne qui Contient une Image Biunivoque et Continue de Toute Courbe Donnée," *C. R. Acad. Sci.* (Paris), (1916) 162, 629; (c) W. Sierpinski in S. Hartman et al. (Eds.), "Oeuvres Choisies". Editions Scientifiques, Warsaw, 1974.

[3] J.D. Birchall and A. Kelly, "New Inorganic Materials," *Sci. Am.*, May (1983), 104-115.

[4] T.T. Mercer, P. Morrow and W. Stober (Eds.), "Assessment of Airborne Particles," Proceedings of the Third Rochester International Conference on Environmental Toxicity, 1972, Charles C. Thomas, Springfield, IL, 1972.

[5] Illustration in K.R. Spurny, "Aerosol Filtration by Means of Analytical Pore Filters," reference 4, Ch. 4.

[6] The filter systems in Figures 6.15(b) and (c) are taken from "The filter Book," Gelman Sciences, Ann Arbor, MI, 1986.

[7] The filters shown in Figure 6.16 are reproduced from B.H. Kaye "Direct Characterization of Fineparticles," Wiley, New York, 1981, p. 51. Nuclepore is the registered trademark of the Nuclepore Corporation, 7035 Commerce Circle, Pleasanton, CA 94566, USA. Comprehensive literature on the structure and properties of Nuclepore filters is available from the manufacturer who kindly provided the photograph reproduced in Figure 6.16.

[8] N.A. Fuchs, A.A. Kirschand I.B. Stechkaina, "A Contribution to the Theory of Fibrous Aerosol Filters," Faraday Division of the Chemical Society Symposium No. 7, "Fogs and Smokes," 1973. This diagram is also reproduced in reference 9.

[9] C.N. Davies, "Air Filtration," Academic Press, London,1973,p. 171.

[10] The data in Figure 6.18 are taken from G.G. Clarke "Fractal Geometric Description of Filters and the Filtration Process," *MSc Thesis*, Laurentian University, in preparation.

[11] This problem is explored in more detail in reference 10. See the discussion of Timbrell's work with asbestos fibres in reference 4.

[12] J. VanTurnhout, C. VanBochov and J.G. Veldhuizen, "Electret Fibres with High Efficiency Filtration of Polluted Gases," *Staub*, 36, No. 1.

[13] See the discussion of Timbrell's work with asbestos fibres in reference 4.

[14] R.M. Werner and L.A. Clarenburg, "Aerosol Filters - Pressure Drop Across Single Component Glass Fibre Filters," *Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev.* (1965) 288-293.

[15] L.A. Clarenburg and R.M. Werner, "Aerosol Filters - Pressure Drop Across Multicomponent Glass Fibre Filters," *Ind. Eng. Chem., Process Des. Dev.* (1965) 293-299.

[16] H.W. Piekaar and L.A. Clarenburg, "Aerosol Filters - The Tortuosity Factors in Fibrous Filters," *Chem. Eng. Sci.* 22 (1967) 1817-1827.

[17] H.W. Piekaar and L.A. Clarenburg, "Aerosol Filters - Pore Size Distributions in Fibrous Filters," *Chem. Eng. Sci.*, 22, (1967) 1399 1408.

[18] L.A. Clarenburg and H.W. Piekaar, "Aerosol Filters - 1 Theory of the Pressure Drop Across Single Component Glass Fibre Filters," *Chem. Eng. Sci.* 23, (1968),765-771.

[19] L.A. Clarenburg and F.C. Schierech, "Aerosol Filters - 2 Theory of the Pressure Drop Across Multi Component Glass Fibre Filters," *Chem. Eng. Sci.*, 23, (1986), .773-781.

[20] I. Balberg and N. Binenbaum, "Computer Study of the Percolation Threshold in a Two-Dimensional Anisotropic System of Conducting Sticks," *Phys. Rev. B*, 28, (1983), 3799-3812.

[21] I. Balberg and N. Binenbaum, "Cluster Structure and Conductivity of Three-Dimensional Continuum Systems," *Phys. Rev. A*, 31, (1985), 1222-1225.

[22] I. Balberg and N. Binenbaum, "Directed Percolation in the Two-Dimensional Continuum," *Phys. Rev. B*, 32, (1985). 527-529

[23] I. Balberg and S. Bozowski, "Percolation in a Composite of Random Sticklike Conducting Particles," *Solid State Commun.*, 44, (1982), 551-554.
[24] Z. Jaeger, R. Engleman, Y. Gur and A. Sprecher, "Internal Damage in Fragments," *J. Mater. Sci. Lett.*, December (1985).
[25] D.S. Ensor and M.E. Mullins, "The Fractal Nature of Dendrites Formed By the Collection of Particles On Fibres," *Part. Character.* 2 (1985) 77-78.
[26] Micrograph courtesy of Dr. K.L. Rubow, University of Minnesota.
[27] Diagram based on a photograph in the technical literature of Flanders Filters Inc., 1985.
[28] F.J. Feltham, "The Hansen Filter; Filtration and Separation," 16 (4) July - August 1979, pp.370-372.
[29] D. Houi and R. Lenormand, "Visualization and Statistical Modeling of Particle Accumulation on a Filter Medium," Extended Abstract from the 17th Annual Meeting of the Fineparticle Society,Miami, Florida, April 1985.
[30] D. Houi and R. Lenormand, "Particle Deposition on a Filter Medium," in D.B. Landau and F. Family (Eds.), Proceedings of the International Conference on Kinetics of Aggregation and Flocculation, held in Athens, Georgia, April 2-4, 1984.
[31] C.E. Billings, *PhD Thesis*, "Effects of Particle Accumulation in Aerosal Filtration," California Institute of Technology, 1966; see also a picture from this thesis in reference [9].
[32] For a readily accessible discussion of the Rosiwal intercept method, see G. Herdan, "Small Particle Statistics," 2nd ed., Butterworths London, 1960.
[33] Many of the appropriate statistical relationships involved in the assessment of rock structure by techniques such as the Rosiwal intercept method are to be found in F. Chayes, "Petrographic Model Analysis," Wiley, New York, 1956.
[34] The science of studying two-dimensional sections using statistical search methods, with consequent description of three-dimensional properties of the system, is known as quantitative microscopy or quantitative stereology. Comprehensive texts on these two subjects are available in R.T. DeHoff and F.N. Rhines, "Quantitative Microscopy," McGraw-Hill, New York, 1968, and E.E. Underwood, "Quantitative Stereology," Addison Wesley, Reading, MA, 1970.
[35] Information on the use of chord techniques for generating information on the size distribution of dispersed material can be found in B.H. Kaye, "Some Aspects of the Efficiency of Statistical Methods of Particle Size Analysis," *Powder Technol.* 2 (1968-69) 97-110.
[36] B. Scarlett, "A Statistical Description of Particulate Systems," in M.J. Groves and J.L. Wyatt-Sargent, (Eds.), "Particle Size Analysis, 1970," Society for Analytical Chemistry, London, 1970, 101-113.
[37] G. Mason, "Random Chord Distributions From Triangles," *Powder Technol.*, 12 (1975), 277-281.
[38] A commercial instrument based on laser linescan logic was developed by Procedyne Corp. See a discussion of this instrument in B.H. Kaye "Direct Characterization of Fineparticle Systems," John Wiley, New York, 1981.
[39] A size characterization instrument based on linescan logic with the information being generated by recording the time of flight of a laser beam, scanning a three-dimensional array of the fineparticle systems is available from Brinkman Instruments.

7 三维空间中分形结构的物理意义

7.1 三维、四维空间中粉末混合的随机行走理论

当翻阅 Mandelbrot 的原书时，我非常感兴趣于图 7.1 中复制的那段说明。我曾想，位于 Mandelbrot 博士这本书第一版 136 页的这幅插图一定是某种粉体颗粒在另一种粉末中刚开始分散时的照片。但当我开始阅读文字说明时，我才知道原来 Mandelbrot 称之为 Levy 尘埃（dust）的这幅图是外层空间星群的分散与成簇模型。Mandelbrot 关于图 7.1 中所含信息的讨论涉及到所谓的 Olbers 谬论。这个谬论是“*如果天空中有无数颗星星，为什么夜晚的星空不是处处同样明亮？*”当我开始阅读 Mandelbrot 书中含有图 7.1 的那一章时，我发现自己很快卷进了外层空间的 Levy 飞行（flights）之中。



图 7.1 外层空间中星系的分形结构与黑色粉末分散于大量的白色粉末中的混合系统可用相同的数学方法予以描述

一次 Levy 飞行是一种含有多级随机步长的特殊形式的布朗运动，随机运动的物体偶尔以这样的步长跳到另一个空间区域。图 7.2 是 Mandelbrot 书中一次 Levy 飞行的路径，在我看来，它象是一段时间内一种粉末颗粒在另一种粉末中分散的实时记录，一个

Levy 尘埃则是在一次 Levy 飞行中所占据位置的不画连线的记录。Levy 飞行和 Levy 尘埃是用法国数学家 Paul Levy（1886－1971）的名字命名的，Levy 是 Mandelbrot 的老师之一，他对 Mandelbrot 的思想很有影响，为此，Mandelbrot 在书中向 Levy 致谢，并用二页篇幅介绍了这位著名法国数学家。Levy 飞行可用来模拟传染病的扩散过程。例如，当飞鸟卷入疾病的传播中时，它的一次远途飞行就是一个大跳跃，但是当疾病在本地动物中缓慢传播时，则发生小范围的扩散直到另一只鸟再次将疾病跳带到远方（参见路标 8：伊甸园中的蝴蝶、蚂蚁和毛毛虫）。

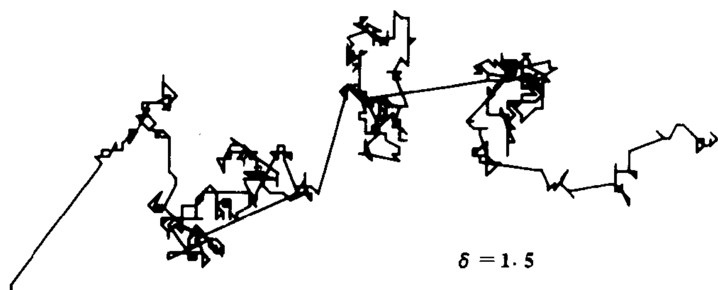


图 7.2　Levy 飞行是一类特殊的随机行走，其中任何时候都存在一个小而有限的概率，使质点从当前位置上发生一次大跳跃，从而物体的分散方式包含小步随机飞行中夹杂着偶尔的大步跳跃。该图即 Mandelbrot 书中的 Levy 飞行

当模拟包括 Levy 飞行的随机行走时，决定运动概率的随机数中只有少量的数能产生大步的随机行走。例如，如果我们有 100 个随机数代表 Levy 飞行中可能的不同步长，则 1－90 为单位步长，91 为四单位步长，92 为六单位步长等等，每一步的方向在空间中也是随机的。Mandelbrot 在其书中说明了如何将分维数与记录 Levy 飞行的 Levy 尘埃的空间密度联系起来的问题。根据 Mandelbrot 的定义，若一次随机行走恰好是 Levy 飞行，则一系列不同步长的选择概率必须由一个给定的数据函数确定。前面给出的可能路径所代表的模拟 Levy 飞行其实不是但接近于真正的 Levy 飞行，我们可将其称为 Levy 类飞行或准 Levy 飞行。

我已对两种或多种粉末的混合问题研究许多年了。我曾探讨过的工业问题相当广泛，从发射宇宙飞船用的粉末状火箭燃料的混合这样的奇特问题，到制作预填骨料的饼干混合物，再到制药行业中头痛片的生产等等。描述混合过程中一种粉末在另一种粉末中分散的传统工程词汇来自于液体混合技术。

在我研究粉末混合技术这些年中，我始终感到随机行走理论是描述一种粉末在另一种中分散的较好方法，但是一直没有时间以连贯的方式整理我的想法。本章中，我将简要地说明一下，随机行走理论是怎样在不用经典化工术语的情况下描述混合过程的，以及混合过程又是怎样被当作 3 维空间中的随机行走从而产生在 2 维、3 维、4 维空间中的分形系统的。然而，在我们通过随机行走以及分形几何观察粉末混合之前，有必要回顾一下粉末混合技术的经典术语。

当描述粉末混合时，机械工程师们用的术语有剪切混合、对流混合，而当涉及到粉末混合物中单个微粒位置的随机化时，则说是随机扩散[1]。图 7.3 所示为上述三种不同机理混合微粒的方法。为简化对粉末混合机理的讨论，我们仅考虑微粒的 2 维阵列。在构造图 7.3 时，假设所混合的是黑色及白色粉末颗粒，且每个颗粒在 2 维模型中用一个正方形表示。

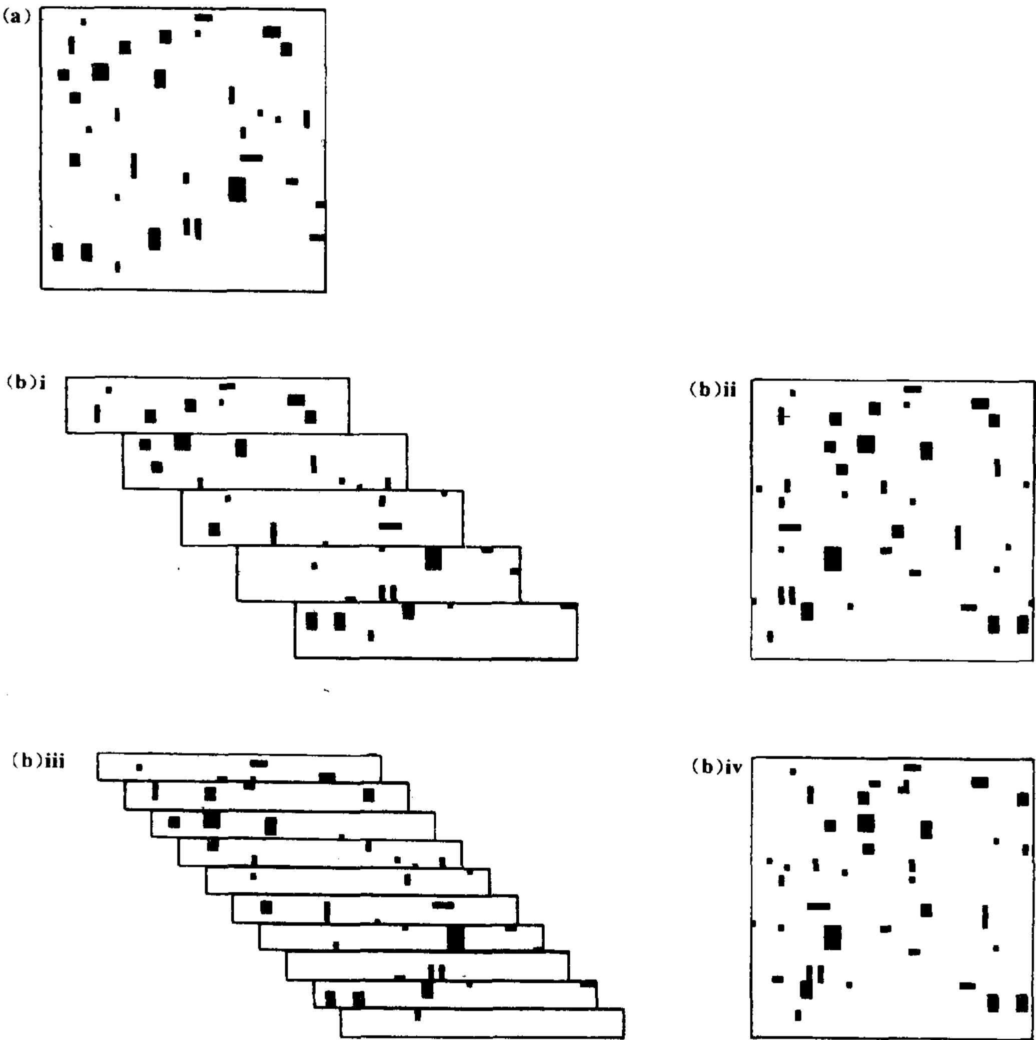


图 7.3　从事粉末混合技术的工程师们提出粉末混合过程中具有重要意义的三种不同机理：剪切、扩散及对流。(a) 用来说明粉末混合中三种不同机理的疏松凝聚的混合物；(b) 剪切作用使粉末混合物中的凝聚体分散开来：(i) 系统 (a) 的混合物受剪切，(ii) 在剪切作用下凝聚体被破坏重新排列后的剪切混合物，(iii) 及 (iv) 剪切强度支配着在受剪切粉末混合物中凝聚体的破坏效率

当剪切力作用于一部分混合物时，混合物层间的运动破坏了颗粒的凝聚而有助于物料的分散。图 7.3 (a) 是黑色粒子在白色粉末中发生 5%凝聚的混合物阵列。为模拟凝聚的混合物，假设母体中有2 500个正方形，则混合物中黑色正方形的数目为 125。当开始充填该阵列时，假定分别含有 4、6、8、12 和 16 个黑色正方形的凝聚体可以存在。模拟凝聚体混合物结构的第一步是给每一种凝聚体分配一个随机数以便选择。在一个简化模型中，假设不同大小的凝聚体以等概率被选取，从而随机数表为

凝聚体大小：4　6　8　12　16

选择数字　：1　2　3　4　5

并且假定所有凝聚体是密实的且不为链状。

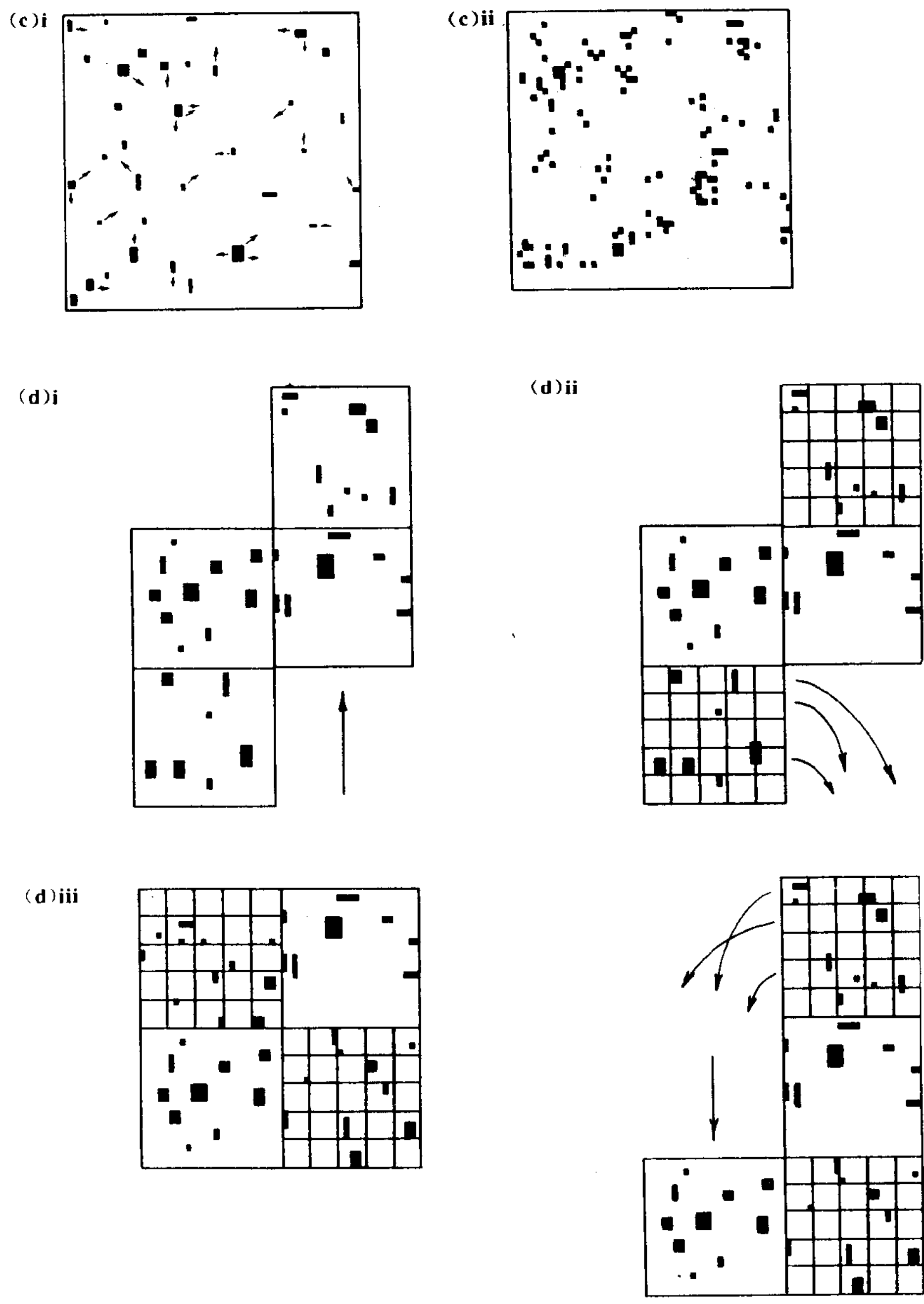


图 7.3（续） (c) 在松散的粉末层中可以发生单个颗粒的随机扩散：(i) 松散的混合物（松散可藉摇动、空气流态化或其它技术使床层扩张而实现，湍流在松散的混合物中可使单个粒子随机行走），(ii) 松散—扩散可使致密粉末床层的结构发生变化；(d) 在对流混合物中，颗粒整体发生运动，随后发生滚动随机化作用：(i) 对流重排的整体运动，(ii) 翻滚随机化作用，(iii) 粉末混合物的新状态

凝聚体在基阵中的定位方法如下：

(1) 从随机数表中选择凝聚体尺寸。

(2) 从随机数表中选择凝聚体的 X，Y 坐标。

(3) 如果凝聚体不是正方形，则通过从随机数表中选择一个数字来确定其走向，若

所有数字为偶数，则沿 X 轴放置凝聚体，否则沿 Y 轴放置。

(4) 当凝聚体进入模拟混合物的基阵时，记录下阵列中黑色象素的总数，当达到混合物的预期浓度所需的象素数目小于 16 时，则加进大小适合的最后一个凝聚体。

为模拟凝聚物的剪切作用，组成阵列的条带之间可相互运动，如图 7.3(b)i 所示。在一个真实的混合器中，剪切作用通常发生在圆筒的圆周附近，因此被剪切的物料实际上是连续的，图中标有 A、B、C、D 的部分移到被剪切阵列的始端，形成了图 7.3 (b)ii 中的系统。

不同剪切作用对凝聚体的分散效果可以通过在不同密度的条带中剪切物料的运动而加以模拟。例如，如果受剪切的条带宽度为 10 个象素，则它比 5 个象素宽的剪切条带产生较轻的剪切作用。图 7.3 (b)iii、iv 及图 7.3 (b)i、ii 分别代表这两种剪切作用。

从事粉末工作的技术人员研究了附着粉末与自由流动粉末之间的差别。在附着粉末中，微粒之间的作用力相对高些，微粒彼此较难分开，因此，在混合附着粉末时，剪切作用是拆散凝聚体使物料分散在混合物中的唯一有效方法。

在已发表的粉末混合文献中，单个微粒的随机扩散被认为是一种主要的粉末混合机理，但是，在这些文献中，有时并没有指出下述事实：在粉末混合过程中，使分子分散于液体中的这种扩散作用不可能发生，除非粉末混合物事先通过振动或其它方法被打开。打开某一粉末混合物使其中的单个颗粒可以自由运动的过程叫做分散。粉末混合中的扩散过程实际上分两步进行，首先将粉末床层松散，然后藉湍流或其它方法让可以自由移动的单个颗粒随机运动。现在有越来越多的工程师开始转向研究流动床混合器，在这种混合器中，待混合的微粒悬浮于脉动的空气流中，床层在空气流中得以松散，而流动床层中的湍流运动便是扩散作用的机理[1]。

应该指出，化学工程师们在应用流动床混合粉末物料时经常有些担心，这是因为被混合的许多物料(加饼干等)具有潜在的爆炸性。当混合这些物料时，有必要使用惰性气体(如氮气)使粉末流动，通过随机扩散使物料位置随机化的步骤已形象地示于图 7.3(c)中。

粉末床层中的滚动作用频繁地造成松散状态，从而使个体微粒的扩散得以发生。例如 Kaye 和 Sparrow 证明，在一个转桶式混合器内，有效混合发生在滚动物料上部落下的微粒中，而不是在桶的底部[2]。

粉末混合器中发生的第三种混合机理按化学工程师的说法叫对流。在对流混合时，借助于搅棒或别的什么系统使部分物料运动到混合器的另一区域，这使得混合物的组份全部重新定位，但对流作用本身通常不能使颗粒的位置随机化。但在对流混合中，整体运动之后，部分颗粒的滚动作用可使单个颗粒的位置随机化，这部分颗粒朝着搅拌器形成的空穴运动并充填之，而搅拌器的作用则是使混合物的内部结构发生迁移。因此，考虑一种非常简单的情况，我们可以想象有一只桨叶穿过图 7.3(d)中的混合物向上运动。由于桨叶的运动，混合物的一边被抬起(如图所示)，发生对流交换的粉末混合物通过随机滚动进入空穴，从而使单个粉末颗粒的位置随机化(注意：在粉末混合过程中，有时人们必须考虑某些物理性质，例如存在静电荷时，对流混合后的随机扩散就不是混合过程的正常步骤，对这方面的混合理论感兴趣的读者可阅读参考文献[3])。

作为用随机行走理论研究粉末混合过程的第一步，我们注意到化学工程师们所说的剪切，可以表示为适用于任意随机行走的在给定深度沿给定方向上的飘移概率。从而，当模拟被剪切物料的运动时，我们可让剪切方向上的单个微粒具有不同的步长，然后使单个微粒在许多方向以不同的步长作随机运动，并以较大概率沿剪切方向运动，这样即可描述混合器中颗粒在湍流及剪切作用下的运动。对流混合则可被描述成这样一类随机行走，即在给定方向上以某一概率作跳跃运动，再于新位置处作随机行走。换句话说，对流混合中粉末微粒的运动可用包含不均匀步长随机扩散的 Levy 飞行予以模拟。

早在我听说 Levy 飞行以前，我曾在一个装置中引入了 Levy 型飞跃，从而产生一种粉末混合物并将它输送到下一工序中去[4]。粉末混合技术的难题之一，是一旦人们想移动混合物时，它很可能离析原来的组份，因此，在混合器中制备好的混合物在运送到生产过程的下一阶段时，其中的组份可能相互分离。60 年代初，我曾进行过这样的试验，即将制做玻璃的所有成份倒入一只熔炉中，以使自由流动的成份进入反应器之前得以随机化。就我们的目的而言，这种做法与分别把三种倒入某一装置中再送往反应器是等价的。为进行混合，我们开发了原型如图 7.4 所示的系统。[4]待混合的成份从我称之为随机化塔的顶部加入，塔内有几块倾斜放置的板，板上随机分布着若干孔洞。图 7.4(b)就是一块典型的这样的板，当粉末瀑落到这种斜板式分布器上时，局部滚动产生的随机化效果与松散的粉末系统中随机扩散的效果相当。从板上随机分布的孔中下落的运动与粉末混合物中的对流脉动有同样作用。我现在乐于把这种从一块板到另一块板的跳跃称之为各组份随机行走混合中的 Levy 飞行。一块板上不同的孔间距和瀑落到下一块板上粉末颗粒构成了步长变化的 Levy 飞行跳跃。利用这样的随机行走在 3 维空间中成功进行粉末混合的秘密在于，穿孔而下的颗粒和沿板下滑的颗粒都不应运动得太快以免较大颗粒被分离出来[6,7]。

在随机化塔的原始专利中，曾设想在塔壁周围随机设置气体喷嘴以改进塔内的随机化过程[4]。从随机行走的角度来看，塔内下落的混合物颗粒进行的是 3 维空间内的随机行走，在塔底堆积的物料是一个可以用 3 维空间中的分形系统予以描述的分散体。若切开粉末混合物的断面，将可看到 Sierpinski 地毯的特征。如果混合物中的某种组份足够组成贯穿混合物的连续通道，则这些通道将形成 3 维空间中的渗流系统，这些通道的曲折程度可用分形几何加以描述。

曾在第 6 章中讨论过的海绵状膜过滤器的最初制造方法之一，是将研磨成粉的食盐晶体以适当的浓度混入合成树脂中，并使食盐颗粒间搭成连续通道。应用分形几何的知识，我们知道这意味着食盐晶体必须至少占混合体积的 60%。只有食盐的体积浓度超过这个数值时，渗流通道才能在混合物中形成。制造这种过滤器的最后一步是溶解食盐晶体，从而在过滤器中形成过滤通道。这类系统在受控释药装置的设计中也是非常重要的，这时药剂师希望药物从合成树脂基体中以稳定的速度渗漏出来[8]。

存在渗流通道的混合物的结构可看作 Menger 海绵[5]。一个理想的 3 维空间内的 Menger 海绵可以用产生 2 维空间中的 Sierpinski 地毯同样的方法得到，只是需在 3 维体中挖出 3 维的洞来。Menger 海绵的构造可从图 7.5 所示的海绵的外观想象出来。在一个实际的海绵类结构中，Menger 海绵上的洞的位置须加以随机化以产生一个统计自相似系统，该系统的结构可以用分形几何的概念予以表征。

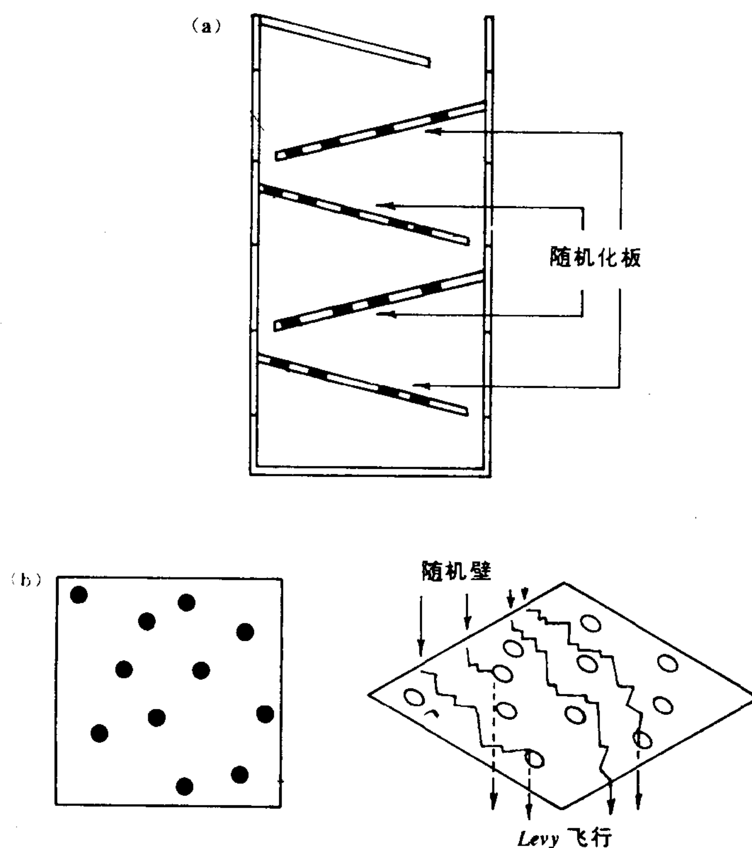


图 7.4　混合粉末组份的随机化塔中发生的3维随机行走。(a)含有随机化板的随机化塔;(b)典型的随机化板

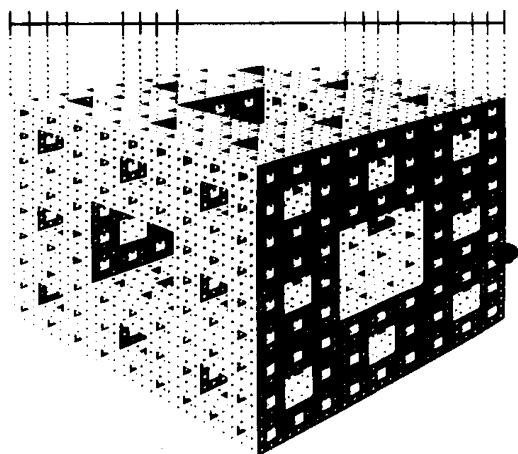


图 7.5　理想的Menger海绵是理想的Sierpinski地毯的3维扩展,Menger海绵的表面是Sierpinski地毯,在海绵表面画出的弦构成康托集

粉末混合工程师已经开发了各种类型的随机化塔,其中一些使用了局部扩散随机行走的混合方法,而其它一些混合装置则应用了3维空间中的自由随机行走进行混合。粉末混合专家经常把随机化塔称为被动混合器或静态混合器[1],我认同前一种叫法。

我希望,上述关于粉末混合过程中分形几何应用前景的简单讨论能使读者确信,粉末混合是一片肥沃的土地,分形几何将在这片土地上开花结果。

7.2 分形几何与气溶胶物理

气溶胶科学是雾、烟及灰尘这样一些物质的行为的研究[9,10]。正如前面的章节所讨论过的，科学家们曾很快应用分形几何的专门领域之一是对灰尘微粒结构的描述。维也纳工业大学的 Otto Preining 博士最先研究了分形几何在气溶胶科学另一领域的应用。早在1980 年，Preining 博士就曾送给我一篇题目为《分形与气溶胶特征描述》的学术论文[11]。在这篇论文中，他用分形几何刻划一团正在散开的气溶胶的结构特征。他指出，在某些气候条件下，从烟囱中出来的烟在很长一段距离内能保持细长的铅笔状结构。这时候，烟云可以看作维数为 1 的欧几里得系统，Preining 博士在他的一些开拓性论文中，曾讨论了烟雾的维数是如何随大气条件而变化的问题。

在 1984 年美国气溶胶科学家协会年会上的一次演说中，Preining 博士对分形几何在气溶胶科学中的应用作出如下评述：

“突然之间，沉默了 50 年左右并被看作是怪物的数学概念变成了模拟和定量描述复杂现象的工具，分形概念能够而且必须应用到气溶胶科学上来，应该而且已经用来描述复杂的形状及微粒的组成。只有象分维数这样的结构参数才能推动数学模型对实际气溶胶系统的鉴别与应用，因为所有的非线性过程，诸如凝结和某些化学反应，都强烈依赖于系统的结构”[12]。

正如 Preining 博士所设想的那样，气溶胶科学正在成为发展最快的分形几何应用领域之一。一团烟雾中的单个颗粒在 3 维空间内随机行走，经一段时间以后形成稠密的分形结构。对正在发散的烟云中不同微粒的分散过程，人们可以用随机行走模型予以模拟。这一模型与本章前一节粉末混合作为随机过程讨论时所用的模型基本相同。人们还可以观察一段时间后烟云散开结构在四维时空中的变化。与时间及空间有关的分形叫做时空分形(Fracton 一词暂译为时空分形——译者注)，关于时空分形的讨论已超出了本书的范围，这里提到这一概念只是考虑到本书的完整性。

如在本章前一节讨论粉末混合时所做的那样，研究气溶胶系统时也常常降低系统的维数，从而 Sierpinski 地毯及 Cantor 集在实验结果中得到应用。科学家们已经应用电脑轴向层析 X 射线摄影法(在北美该法叫做“CAT 扫描”)研究气溶胶的分布。层析 X 射线摄影(Tomography)一词来源于一个意为“贯穿系统的薄片图案”的词根，该词根则源于希腊语词“Temmein”(意为“切开”)。在电脑层析 X 射线摄影法中，人们用透视射线从多角度观察获得大量数据，从而在计算机上模拟出层面的结构[13,14]。在医用 CAT 扫描仪中，透视检查射线是 X 射线。在气溶胶科学中，由于被观察区域中物料的浓度低得多，可以用红外线进行多角度透视进而在计算机上获得 CAT 扫描图象。这样得到的扫描图象是一个 Sierpinski 地毯。应用层析红外线摄景法得到气溶胶云团的 2 维 Sierpinski 地毯的研究是 Luck，Siemund 和 Lorbeer[15]最先进行的(需要注意的是，这些科学家在他们的研究中没有使用分形几何的术语，但是浏览他们的研究结果很快会发现实验数据中的 Sierpinski 地毯)。使用 X 射线的 CAT 扫描仪也可用来产生粉末混合物中的 Sierpinski 地毯结构。

在一种广泛用于观察气溶胶结构的技术中，气溶胶微粒先被吸入一只细管，然后穿过

一束光线，微粒的大小可由其通过仪器的观察区域时所散射的能量推算出来。市场上已有几种基于上述物理原理的仪器出售，这类气溶胶粒度仪叫做光带流量计数器(Photozone Stream Counter)[16]。

现有的光带仪只记录穿过观察区域的每一尺寸及总数目。许多仪器工作时还需稀释样品，即从烟云中取出的气溶胶样本需经稀释降低浓度以免观察区域内粒子重叠，如果人们能将这种仪器稍加改进以观察从烟云中取出的未经稀释的粒子流，则微粒间距的记录将构成可描述所研究的烟云结构的康托弦集，这种可能性是 Preining 博士 1980 年首次提出的，尽管他的论文中没有使用康托集这一名词[17]。在分形几何领域，Mandelbrot 博士所杜撰的某些术语偶尔会产生混淆，用分形理论描述烟云的结构时就会碰到这样的情况。例如，用 Mandelbrot 的术语，为表述烟云的结构，我们必须讨论康托弦集中康托尘的维数(该康托弦集是由光带生成的时间长度记录中的时间间隔所产生的)。在这种情况下，概念上的康托尘与实际的烟尘令人失望地混淆不清。在研究烟团结构时，讨论一维空间中康托点而不是康托尘的维数可能更好些。这样，我们可以避免把实际烟团中的尘埃与观测线上数学意义上的尘埃相混淆。

在我们关于 2 维随机行走模型的讨论中，我们曾讨论了 2 维空间中凝聚集体生长以及烟尘凝结的模拟问题。烟雾微粒的凝结是气溶胶科学中一个极其重要的领域。模拟 2 维凝聚体生长的数学方法显然可以扩展到 3 维空间。一个模拟 3 维空间中凝聚体结构的简单方法是建立在随机数表基础上的，这种方法是针对象粉末混合系统中可以自由组合或

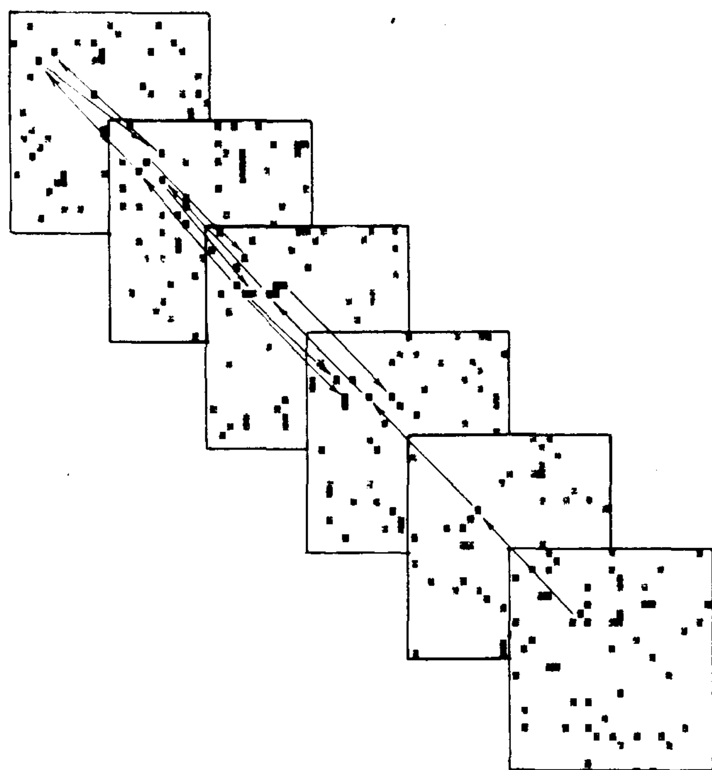


图 7.6 在 3 维空间中将单个随机数表看作垂直 Z 轴的 XY 平面薄片，则一组随机数表可用来模拟 3 维空间中自由结合的微粒簇结构

分散的微粒。例如，如果我们取 6 个不同的随机数表并使表中的数字 7 变成空象素，然后在空间中将这些随机数表叠加起来，则可以认为它们构成了 XYZ 空间中在 Z 方向的一

组投影薄片。这一系列2维薄片(即随机数表)可揭示出聚集体的3维连续结构(如图7.6)。

在图7.7中,用上述方法模拟出的凝聚体已被存入一台Macintosh电脑,藉某商用程序可获得该凝聚体的不同透视图。如果该物体是一个气溶胶微粒,那么这些不同的透视图将代表空间内微粒的不同定向。

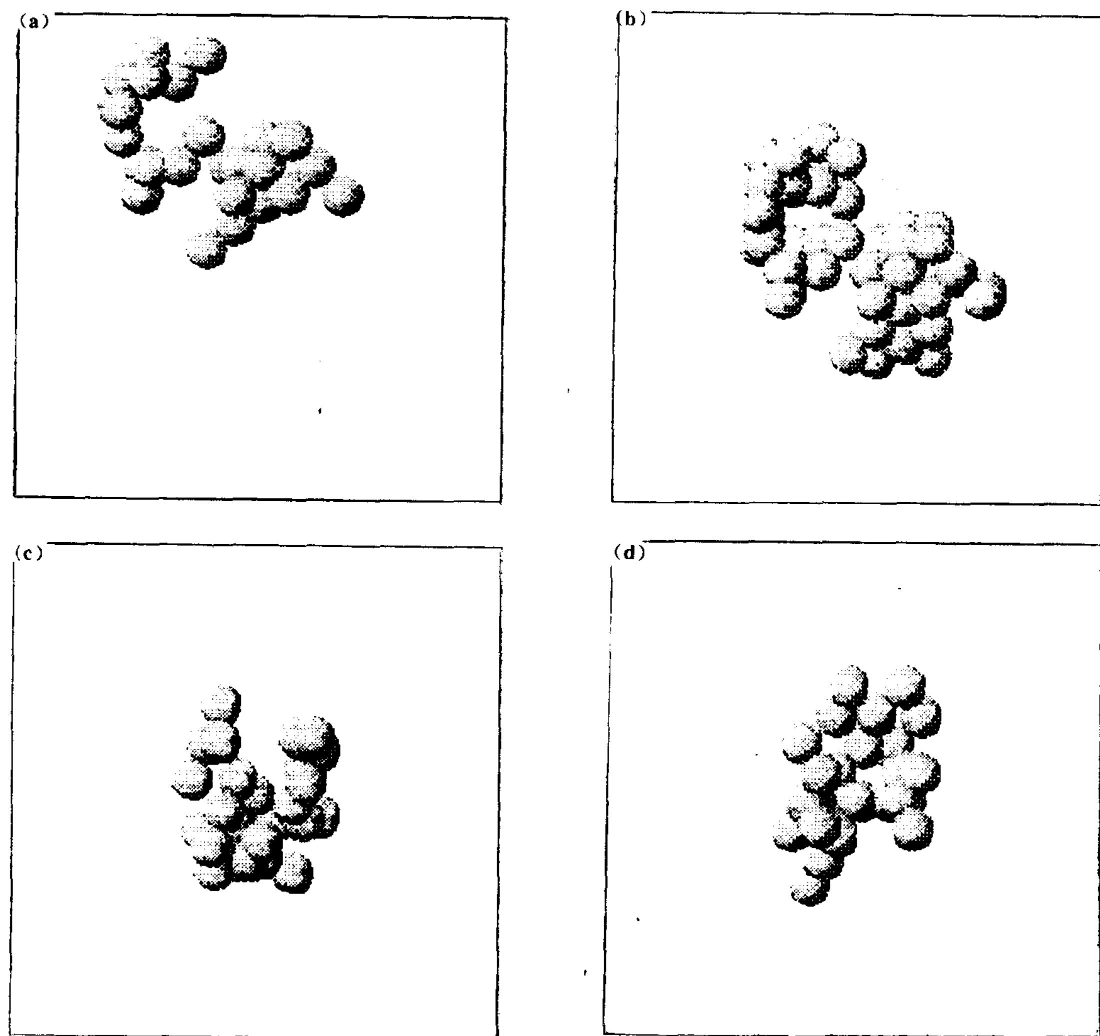


图7.7 应用现代计算机程序,人们可以在计算机上旋转凝聚体以显示凝聚体在不同方向上的形貌

对于开始形成时相互粘附而后迅速冷却以至碰撞时也不再粘附的气溶胶系统来说,上面所述的由几页随机数据表构成的凝聚模型是非常有用的研究法。例如,如果我们观察由蒸发形成的一种金属气溶胶的凝结情况,在气体刚刚凝结的高温下可能有凝聚体生长,但一旦冷却到某一特定温度以下,凝聚体碰撞时也不会粘附。

从事气溶胶工作的科学家们已经开发了研究烟云中凝聚过程的某些技术,对那些对分形几何感兴趣的人来说,这些技术可用以探讨在3维空间中随机行走形成的分形凝聚体。因此,如果人们用同样大小的颗粒形成烟云,且颗粒在湍动的烟云中相互碰撞形成凝

体，则从烟团中吸出一部分就可以考察凝聚体的结构。

Stöber 博士和他的同事们研究了由起始粒度相同的乳胶球组成的气溶胶云团，并计算了云团中形成的凝聚体的气体动力学直径。具有相同气体动力学直径的一组微粒叫做等气体动力学微粒。在由 Stöber 博士及其同事们研制的装置——螺旋盘式离心气溶胶光谱仪中，空气中的微粒按其空气动力学直径沉积在一块金属条上[18,19]，对于由若干单元球粒组成的凝聚体，人们可以将它们的空气动力学直径与物理尺寸及结构进行比较。为进行这种比较，Stöber 博士及其同事使用了下述概念，如果一个凝聚体含有 N 个直径为 d 的球，则可以计算出与该凝聚体体积相同的等效球的直径。当凝聚体在一个粘性系统中下落时，将比同体积的球受到更大的阻力，这是因为使凝聚体下落的重力与同体积球的重力相同，所以，如果凝聚体比同体积的球下落得慢，一定是由于它所受的与其结构有关的阻力较大的缘故。从而，人们可以用一个因子 K 来比较包含相同数目的单元颗粒而结构不同的凝聚体所受的阻力。K 定义如下：

$$K=\frac{v_A}{v_{SE}}$$

表 7.1　凝集体轮廓及相应的 K 值

n	外形	K
2	OO	1.12
3	OOO	1.27
3		1.16
4	OOOO	1.32
5	OO8	1.25
4	88	1.17
5	OOOOO	1.45
5	OOO8	1.30
5		1.19
6	OOOOOO	1.57
6	OOOO8	1.43
6	888	1.17
7		1.67
8	OOOOOOOO	1.73
8	OOOOOO8	1.56
8		1.64

其中 v_A 为凝聚体受到的粘性阻力；v_{SE} 为体积相同的球所受到的粘性阻力；K 为相对粘性系数。

表 7.1 中列出了一些由 Stöber 及其同事们研究过的凝聚体的轮廓及相应的系数 K。可见，系数 K 与凝聚体结构有关，并且受到阻力越大的凝聚体具有越为枝化的分形结构。我们可以把表 7.1 中的凝聚体称为分形萌芽。表中的数据明显表明，如果我们用 Stöber 的装置研究一些较大的分枝较多的凝聚体，便可能将凝聚体所受粘性阻力与凝聚体的分形结构及几何形状联系起来。从而，对那些高度结构化且吸入肺部有潜在危害的灰尘，我们有可能建立某种理论去预测其下落速度及动力学特性。

估计空气中的灰尘微粒对肺部的危害是一个复杂的问题，它取决于与尘粒的结构有关的好几个因素。关于吸入粉尘对健康危害的早期研究曾集中在与石英及煤灰有关的问题上，这些粉尘由结构相对简单紧密的微粒（如图 7.8(a)中的一组等空气动力学煤粒）组成。对于这种简单的粉尘来说，其空气动力学直径与物理直径的差别通常是粉尘密度相对简单的函数。

然而，我们可以注意到，在一组空气动力学直径相等的粉煤中，明显较大的煤尘开始表现出错综复杂的结构，这种结构在观察尺度不大时可用分维数描述。我们还注意到，煤粉的物理尺寸通常大于他们的空气动力学直径，尽管假定他们是由密度大于 1 的物料组成（大块高质量煤的比重范围一般为 1.8～2.0）。这一现象可从下述事实得到解释：煤是一种多孔性物质，等空气动力学直径煤粒的物理尺寸可能是粉尘形状及孔隙度的函数。

在对由吸入粉尘引起的职业病的研究中，需要考虑粉尘的三种主要结构参数。其中之一是空气动力学直径。一粒粉尘的空气动力学直径的数值决定了呼吸时该粉尘在空气中的运动状况。一旦微粒通过呼吸系统进入肺部上端，在分析微粒在肺内滞留及粘连的危险性时必须考虑微粒的物理尺寸及其空气动力学直径。当讨论粉尘对肺的危害时，粉尘结构

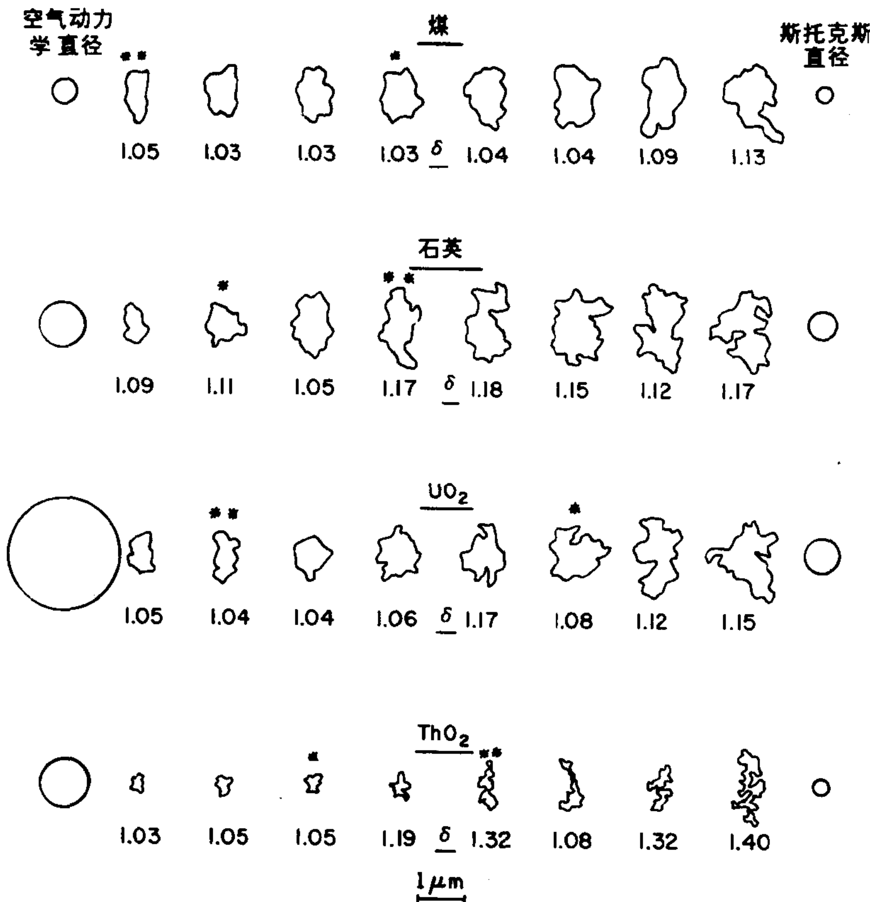


图 7.8 在等空气动力学粒群中，物理尺寸的增加似乎伴随着分形结构的加强。(a)等空气动力学煤粉[20]；(b)等空气动力学石英微粒[20]；(c)二氧化铀的等空气动力学微粒[21]；(d)氧化钍的等空气动力学微粒[21]

的其它一些性质也是重要的。以石英粉尘为例，锐利的边角就是其结构特征的一个重要方面。然而，因为本书中我们讨论的是分形结构，所以我们将主要研究由具有分形结构的粉尘的吸入危害[21]。

图 7.8(b)及(c)是其它两组已由 Kotrappa 研究过的等空气动力学微粒（这些微粒的轮廓早在本书第 3 章就已出现并简单讨论过。两种粉末都是由一种沉积过程产生的。它们不是在烟团中形成的分形凝聚体，但保留有来自于沉积过程中残余的分形结构）。我们再一次看到，一般来说，在一定的等空气动力学粒群中，微粒的物理尺寸越大，分形结构越明显。当我们考虑滞留在肺中的吸入粉尘的危害时，显而易见，由 * 标出的二氧化钍微粒

比由 * * 标出的粘附在肺部管壁上的机会要少得多，尽管它们具有相同的空气动力学直径。

如果人们试图对肺部吸入又呼出的二氧化钍进行定量估计，则图 7.8(c)给出的空气动力学尺寸的数值将起误导作用。如果物理尺寸较大的等空气动力学颗粒之一粘在肺壁上，则对肺部存留的二氧化钍的估计能大大偏低。看起来未来的职业健康研究对任一沉积在呼吸系统内部且具有开放式凝聚结构的粉尘，应考虑其分形结构，有助于估计具有分形结构的沉积尘的实际危害的参数可能是粉尘的分维数和某些形状因子(如描述凝聚体一般形状的纵横比)[21]。

一粒被吸入并沉积下来的灰尘微粒的第三个重要性质是它的表面积，因为由灰尘吸附并带入肺中的化学物质通常构成对健康的主要危害。如果粉尘具有分形结构，则从与之具有相同空气动力学直径的球的尺寸估计实际尘粒表面这些化学物质的吸附量可能过于偏低。通常，在职业健康及卫生学中，被吸入粉尘的空气动力学直径是被测量的唯一物理参数，这就导致有时候大大低估了粉尘对健康的危害性[22]。在观察原子反应堆熔化烟气及焊接烟气一类粉尘的危害时，具有分形结构的粉尘显得特别重要。在第 3 章中，我们曾讨论过由 Zeller 所描述的模拟原子反应堆的熔融烟气，它们具有比图 7.8 中的灰尘微粒更复杂的分形结构。用显微镜观察时，焊接烟气也显然具有分形结构。图 7.9 是氧化锌烟气的图片[23]，它是由 MIT 的 Bolsaitis 教授拍摄的，具有与焊接烟气相似的结构。如果人们计算它的空气动力直径来估计这样一个微粒对健康的危害，将导致很大误差。

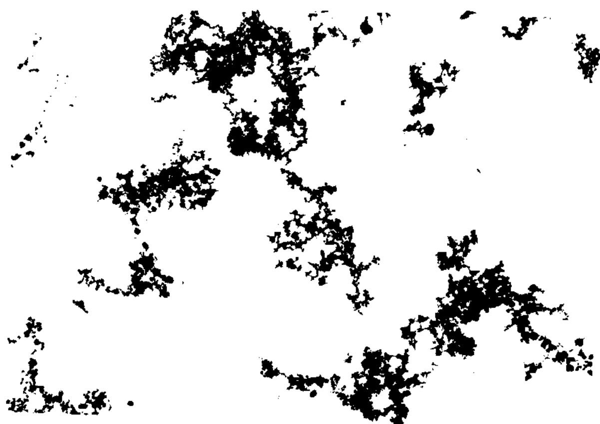


图 7.9　氧化锌烟雾微粒。烟尘的化学毒性对健康的危害与凝聚体的表面积有关，人们刻划烟尘微粒内部结构的一种方法是将凝聚体分解成其组成部分，测量凝聚体单位投影面积中组份的表面积

为表征与表面积有关的粉尘危害，我们试图使用这样一种方法，即在某一凝聚体的高分辨率照片中确定组份颗粒的大小与数目。为此目的，可在 Dapple 图象分析仪上对凝聚系统的相邻单元进行侵蚀处理，然后可以数出凝聚体内或单位面积凝聚体内的微粒数目，进而估计系统的整个表面积，估计的方法是将凝聚体的投影面积(从照片上测出)乘上单位投影面积内凝聚体组份的估计表面积(从组份的数目与大小而得)。

职业健康及卫生学中与工程技术有关的另一个重要方面是研究用呼吸过滤器除去空气中有害物质的方法。正如这一节前面所说的，非常小的尘粒通常在呼吸器内被捕获树捕获。显然，在图 7.8 中标有 * 的灰尘微粒被捕获的概率比那些标有 * * 的低得多，这是因为物理尺寸不同的缘故。模拟 Nucleopore 过滤器中微粒的捕获显然容易一些。但是，如果人们试图用物理方法滤去图 7.8(b)中的二氧化钍粉尘的话，粉尘的空气动力学直径将表

明过滤器孔径为 1μm 即可阻止粉尘通过，而事实上标有 * 的微粒的物理尺寸要求过滤器的直径为 0.5μm。另一方面，标有 * * 的微粒需要过滤器孔径为 1.5μm。因此，仅仅测量分形粉尘的空气动力学直径，人们可能低估或高估用来预防吸入粉尘危害的呼吸器的效率。

职业卫生学研究中较为成功的领域之一是从由柴油发动机产生的烟气中过滤出柴油废物，这种成功可能是由于下述事实：测量油烟粒子的空气动力学直径低估了具有分形结构的粒子尺寸，而实际上大得多的烟尘的物理尺寸意味着用低效率的孔径相对大些的过滤器就可以滤去油烟粒子。将微粒分成若干组等空气动力学粒群，然后用显微镜确定每组颗粒的分形结构与形状因子，通过这样的程序研究可吸入粉尘的潜在危害，人们就可以唯一地估计出所需的过滤条件。

预测在深层过滤器中一组象图 7.8(d)所示的二氧化钍这样的微粒的过滤特性是一项极其困难的工作。为研究在深层过滤器内这种随机行走微粒的物理捕获问题，人们也许可以引入一个假想的等效剖面，该剖面决定过滤器的沉积能力(这里的沉积能力与自由空间中的情况不同，它相当于等效剖面的欧几里得包络面)。

图 7.10 是一个简单的模型，它可用来在计算机上生成与深层过滤器中的通道相似的曲折孔洞。为形成这样的孔，取一组随机数表并把每页表看作 XYZ 空间内垂直于 Z 轴的薄片。为模拟 60%的孔隙度，可将表中的数字 6 变成空白，然后将一页一页上相邻的孔隙看作过滤器的曲折通道，气溶胶粒子及气体分子可在这些通道中随机行走。图 7.10(b)是模拟的深层过滤器通道的几个截面。可见，在这个深层过滤器的通道模型中，特定通道的截面积在不同的深度处是变化的。

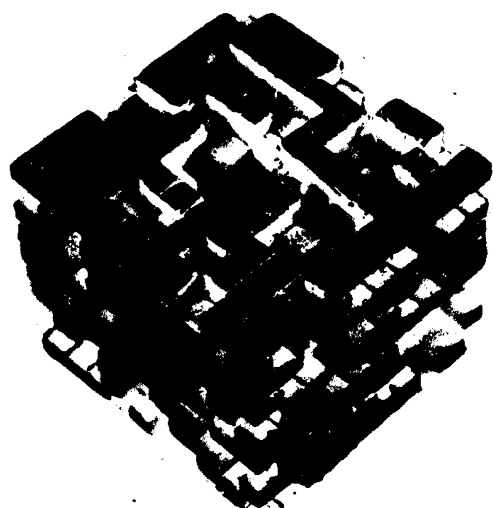
该模型可用来模拟氡气在房基土壤中的渗流，微生物在岩石缝隙中的运动等系统都可用这样一个分形空间中的 3 维随机行走模型进行研究[24,25]。分形空间中的所有这些随机行走形成的是时空分形。图 7.10(a)所示为图 7.10(b)中一系列截面模拟出的深层过滤器模型。

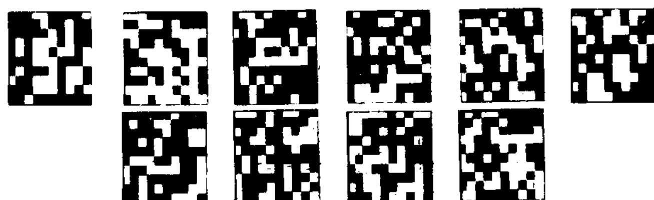
涉及到固体表面及溶液中反应动力学的许多问题都与粗糙表面上原子及分子的随机到达与离开有关。在许多这样的问题中，分子及原子的随机运动发生得极快，而系统的主要性质则是表面与孔隙的分形结构。

最近，科学家们报导了用计算机图象分析研究表面分形结构的方法，并且这种方法可能随着更好的图象分析仪的问世而日益显示其重要性。不过，目前的多孔体分形结构的表征仍建立在吸附作用及侵入法孔隙度量的基础上，这两种技术将在下面两节分别予以探讨。

7.3 吸附法研究粗糙表面的分形结构

近 50 多年来，科学家们一直通过气体或溶液分子在表面上的吸附来测量粉末的比表面积。有些书专门讨论这种测量技术[26]。在我们这一节的简短介绍中，我们只限于探讨分形几何对吸附法测量比表面积所作出的一些重要的新阐述。在吸附法估计比表面面积时引入分形几何概念的先驱者是 Avnir、Pfeifer 及其同事们[27—42]。





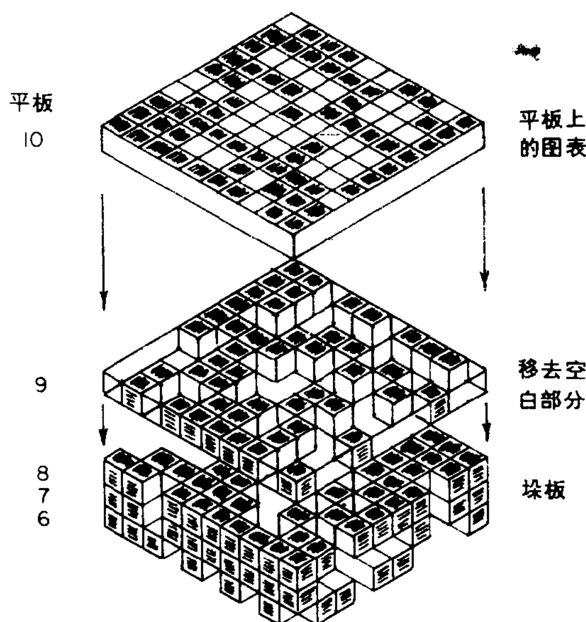


图 7.10　为模拟 3 维多孔体中的曲折孔隙，可将随机数表看作 3 维空间中垂直于 Z 轴的 XY 薄片，并把数据表中的某些数字按一定规则转换成孔洞

在粉末表面的气体吸附测量中，要研究的是，低温粉末在不同压力下的吸附容量。研究产生的数据可作出吸附等温线。例如，1956 年我曾用这种技术测量了二氧化铀粉末的比表面积，当时粉末冷却到液氮温度，所用气体为氪气。为了做这样一个实验，先将待研究的粉末置于真空中，让所有先前吸附的气体经过一段时间后脱除掉。然后将一定量的氪气引入已降到液氮温度的粉末容器中。从低温下的吸附等温线的结构，可由几种原理之一计

算出粉末的比表面积。实质上，比表面积测量的关键思想是：随着气体压力的增加，粉末表面将被单分子层气体所覆盖。到1977年的时候，大家都已知道比表面积的吸附法测量值与研究所用气体分子的截面积有关。科学家们经常用惰性气体，如氙气、氩气、氪气等进行吸附研究。

吸附研究中，特定气体的应用引起的比表面积测量误差通常被认为是不可避免的。然而，Mandelbrot 关于分形几何的书出版不久，Avnir 及 Pfeifer 就指出，用气体分子覆盖粉末的粗糙表面很象 Minkowski 用圆测量曲线的方法的推广。在气体吸附的研究中，人们通过计算覆盖整个表面所需球的个数来估计粗糙系统的比表面积。在3维空间中画出这种系统是困难的。为说明起见，我们可察图7.11来看一下在气体吸附研究中究竟发生了什么事情。如果在吸附研究中使用了氪气，这相当于用较大的搜索圆估计曲折轮廓的边

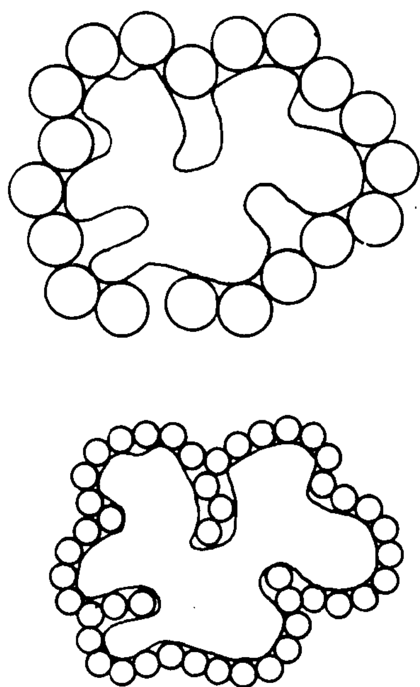


图7.11 从气体吸附估计粉末颗粒的表面积，与气体分子的截面积有关。较小的气体分子能够到达表面的小缝隙，从而随着表面吸附的气体分子的减小，表面积估计值增大

界。对这种较大的分子来说，边界上的窄缝是无法进入的。如果用氦分子进行研究，由于分子较小，则能进入表面的窄缝，从而粉末颗粒表面上吸附的分子数增加，比表面积的估计值随之增大。因此，如果能够用一系列不同大小的吸附分子估计粉末的比表面积，则由估计出的比表面积的对数与气体分子尺寸的对数作出的 Richardson 图将是一条与粗糙表面的分维数有关的数据线。

Avnir、Pfeifer 及其同事们分析了粉末气体吸附研究的有关文献后指出，使用上述方法，人们可以得到有关文献中描述的大多数粉末的分维数。他们说不具有分形结构的粉末只是粉末研究中的例外而非规律。从分形几何的角度来看，在吸附研究中，由于使用不同大小的气体分子而产生的比表面积差异并不代表误差或不确定性，而是隐含了粉末表面粗糙程度的有关信息（请注意：尽管在本节中我们讨论的只是气体分子的吸附作用，但染料、苯、水及四氯化碳等不同物质在粉末表面的吸附作用也是由同样的物理过程和关系所支配的，这些物质的吸附作用可用以确定表面的分维数）。

在他们的文章中，Avnir 及 Pfeifer 指出，有两种不同的实验过程可用来通过吸附研究估计粗糙粉末的分维数。一种技术是在一系列吸附研究中采用分子大小不同的气体(已如上文所述)；另一种技术是从同一粉末中的不同尺寸颗粒的吸附容能推算出表面分维数。如果我们估计由光滑球体组成的粉末的比表面积，则所画的比表面积与球体直径的对数图是斜率为－1的直线。通常，若颗粒具有维数为 δ 的分形表面，而所绘出的比表面积对颗粒尺寸的对数图中直线的斜率为 m，则表面分维数 $\delta=3+m$(对于光滑球来说 $\delta=2$，这使欧几里得几何体的数据线的斜率为－1)。一种在许多粒度表征中用作标准物料的粉末是渥太华砂粒，这是在美国伊利诺斯州的渥太华发现的一种特别光滑而坚硬的砂子(在加拿大也有一个渥太华，渥太华是印第安语地名，已被用来命名北美洲的好几个地方)。在

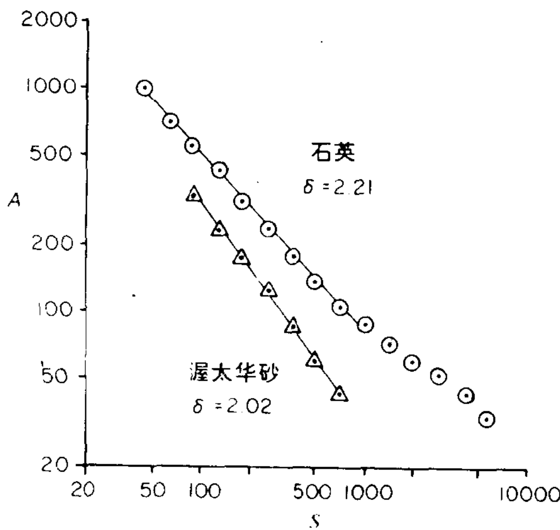


图 7.12　粉末的分维数可以通过将粉末分成不同大小的粒群并测量每一部分的比表面积来计算。A 为比表面积，cm^2/g；S 为粉末分形直径的对数

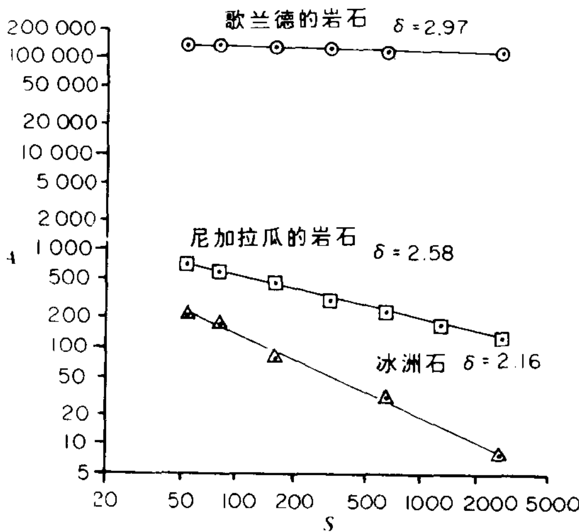


图 7.13　不同岩石的相对粗糙度可由它们的分维数描述

图 7.12 中，给出了渥太华砂的比表面积随尺寸的关系图，并与筛分成几组尺寸不同的石英砂的比表面积测量结果相比较。可见渥太华砂的比表面积测量值产生一条分维数是 2.02 的数据线。另外，石英粉末显然具有粗糙表面，其分维数为 2.21。图 7.13 是 Avnir，

Farin 及 Pfreifer 获得的[28]，它显示了不同产地的碳酸盐岩石由分维数表征的相对粗糙度。如果有人说，表面粗糙度的分形表征将在一些粉末技术领域引起革命性的变化，这可能并非言过其实(参见第 9 章关于粉碎机效率的讨论)。

7.4 分形几何对侵入法孔隙测量的解释

粉末技术人员研究多孔体结构的方法之一是侵入法测量孔隙度[26,43]。这种方法的物理原理可由图 7.14 中的简单系统说明。如果一个封闭的真空毛细管被倒着放入一个可以感受外部压力的汞槽内，则只有外加压力满足下述方程时，汞液才能进入管中

$$p=\frac{2\gamma\cos\theta}{R}$$

其中 p 所加压强；R 为管的半径；γ 为液体的表面张力；θ 为汞液与管壁所成的接触角。这个方程称为 Washburn 方程，是以最早从理论上得到该方程的科学家的名字命名的[26]。汞被广泛用作侵入液体，我们对侵入法孔隙度测量的讨论只限于以汞作为侵入液体。

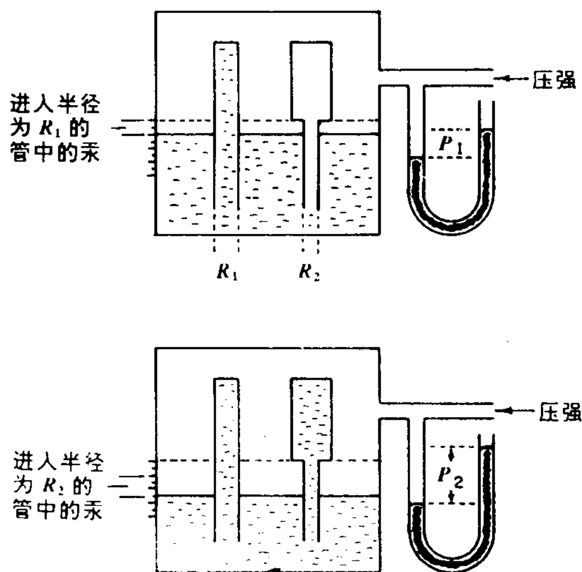


图 7.14 汞侵入法的数据通常解释为多孔体内的孔径分布，分形几何的概念可以用来重新解释这些数据，从而对粉末系统的孔隙结构进行分维数描述

从图 7.14 可见，当压强足以使汞液进入半径为 R_1 的管中时，管中将充满汞液并且汞槽中的汞液减少。汞槽中减少的汞液量可以测出并用来计算半径为 R_1 的管的体积。随着压强的进一步增加，配有球形(从图中看应为柱形——译者注)储槽的半径为 R_2 的窄管将充满汞液。随着汞液被压进越来越窄的管，从汞槽内汞液量的变化可以算出一系列管的体积。为研究多孔体的孔隙结构，我们将经真空泵抽气处理过的物料放于密封的真空容器内的汞槽中，然后增加汞液表面的压强，使其进入越来越细的物料孔隙中。每增加一次压力便记录一次进入多孔体的汞液体积。有一个最简单的模型常来用解释这样获得的实验数据，即假设多孔体中的孔是具有均匀半径的圆形管道，则随着侵入压强的增加，从汞液的体积变化可以测出相应孔隙的体积。然而，从图 7.14 中半径为 R_2 的管子可见，穿过窄小入口的渗流可以进入后面孔径较大的扩展空间。从图 7.14 的简图可以看出，用入口——体积模型解释实验数据对描述多孔体孔隙结构显然是太简单了。也许这样说会更好些，即

这种技术测量的是入口尺寸而不是孔隙半径。在缺乏更好的解释模型的情况下，已对不同类型多孔体进行了广泛深入的研究。用上述模型解释的数据通常被称作"孔隙尺寸分布"。图 7.15(a)就是这样获得的一组数据，其研究者是 Clyde Orr，Jr. 研究对象为一种比较粗的粉末，其中的每个颗粒都含有孔隙[43]。

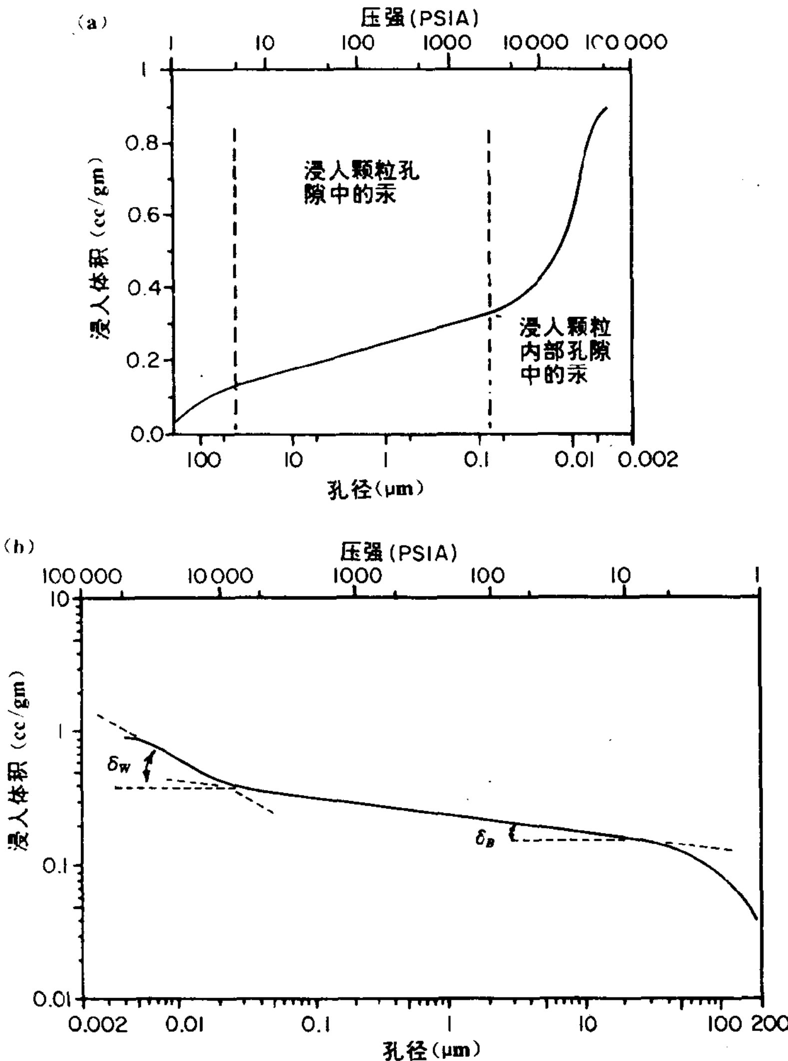


图 7.15 汞浸入法对多孔结构的经典表述掩盖了下述事实：浸入液体积对入口直径的关系在一定入口尺寸范围内是一个比例函数。Kaye 曾指出，比例函数的斜率是多孔结构的一个分维特征，δ_B 是颗粒间空隙的分维数，δ_W 是颗粒多孔结构的分维数

应当注意的是，图 7.15(a)中上部的横坐标轴给出了对汞液施加的压强，并且入口孔直径的单位是微米，在下面的横坐标轴上，设定适当的 θ 及 γ 值。如果人们在对数图上重画图 7.15(a)中的数据就可以得到图 7.15(b)，人们认为，图 7.15(b)表明，关于汞液的浸入体积与入口尺寸的数据可以用分形几何予以解释，因为图中显然有两个可用比例函数描述的线性区域[44,45]。因此，在一篇文章中出示这些数据时，我曾建议人们使用两个分维数 δ_B 和 δ_W，前者是从粒间空隙的角度表示多孔体的"浸入体积——入口结构"性质，后者则表示颗粒孔隙的内部结构。通过引入"浸入体积——入口分布"的分维这一术语，我们就不必特别指出实验数据关于粉末床层孔隙大小分布的物理意义了。这样推出的分维数是孔隙结构与整体粗糙度的综合描述而不是孔隙结构本身的描述。Friesen 及 Mikula 建议，人们可以用建立在 Menger 海绵基础上的模型来解释象图 7.15(b)中这样一些数据给出

的分维数[46]。最近发现，Appolonian 填充垫（将在第 10 章中讨论）是解释由浸入法孔隙度量而得到的多孔体的分维数物理意义的一个较好模型[47]。不管最终对如图 7.15(b)中的汞液孔隙数据的比例函数作何解释，它都将离不开分形几何。在下一章，我们将讨论一个显而易见的问题，那就是多孔体的分维数可能与一种重要的工业技术——从多孔岩石中回收石油密切相关。

参考文献

[1] A good introduction to the classical chemical engineering approach to the mixing of powders is given by S.S. Weidenbaum, in M.E. Fayed and L. Otten (Eds.), "A Handbook of Powder Science and Technology," Van Nostrand Reinhold, New York, 1984, Ch. 8.

[2] B.H. Kaye and D.B. Sparrow, "Role of Surface Diffusion as a Mixing Mechanism in a Barrel Mixer, Part 1," *Ind. Chem.* 14 (1964) 200-205; "Part 2," *Ind. Chem.* 14 (1964) 246-250.

[3] G.G. Enstad, "Electrostatic Mixing of Powders," in "Mixing of Particulate Solids, Second European Symposium 1981," European Federation of Chemical Engineer-ing Publication Series, No. 15, Institute of Chemical Engineers, Rugby, 1981.

[4] B.H. Kaye, "Improvements in/or Relating to a Method and Apparatus for Handling Particles," Br. Pat., 38871-63, October 3, 1963.

[5] It should be noted that in the first edition of Mandelbrot's book (1977), Mandelbrot referred to the Menger sponge as a Sierpinski sponge. In the second edition of the book, he points out that it was brought to his attention that the system in Figure 7.5 was first described by Karl Menger (see L.M. Blumenthl and K. Menger, "Studies in Geometry," Freeman, San Francisco, 1970) and not Sierpinski.

[6] B.H. Kaye, G. Clarke and, A. LaRocque, "Simulating Powder Mixing Processes Using Randomwalk Models," paper presented at the Rosemont Conference on Powder Technology, Chicago, Illinois, 1988.

[7] B.H. Kaye and G. Clarke," Characterizing Powder Mixing Progress Using Tracer Agglomerates and Poisson Graph Paper," Rosemont Conference on Powder Technology, Chicago, Illinois, 1988, Powder Mixing Workshop Notes.

[8] A. Bunde, S. Havlin, R. Nossal, H.E. Stanley and G.H. Weiss, "Controlled Diffusion Limited Drug Release From a Leaky Matrix," *J. Chem. Phys.*, 83 (1985) 5909-5913.

[9] Several books have been written on aerosol science. A good introductory text is P.C. Reist "Introduction to Aerosol Science," Macmillan, New York, 1984.

[10] A classical textbook on aerosol science, which is now out of print, but which contains a wealth of information, is H.L. Green and W.R. Lane, "Particulate Clouds, Dust Smokes and Mists," Van Nostrand, New York, 1957.

[11] The preprint of the scientific paper sent to me in 1980 was eventually published under a slightly different title: O. Preining, "On the Use of Optical Single Optical Counters to Acquire Spatial Inhomogeneities of Particulate Clouds," Atmospheric Sciences Research Centre, State University of New York at Albany, Publication No. 813. See also O. Preining and G. Reischl, "Aerosol Description and Descriptives," *J. Hung. MET Service*, 86/04 (1982).

[12] O. Preining, "Aerososl Characterization - A System Analytical Approach; Aerosols of the Atmosphere," by B.Y.H. Liu, D.Y.H. Pui and H.J. Fissan. (Eds.), in "Aerosols," Elsevier, Amsterdam, 1984, pp.253-256.

[13] For an introduction to the concepts and mathematical operations involved in computerized tomography, see R. Gordon, G.T. Herman and S.A. Johnson "Image Reconstruction From Projections," *Sci. Am.* October (1975) 56-68.

[14] H. Henderson, "A Sideways Look at Scanners," *New Sci.*, December 6 (1979) 782-785.

[15] H.O. Luck, B. Siemund and G. Lorbeer, "The Measurement of Spatial Aerosol Distributions in Enclosures by Means of Computed Tomography," *Part. Charact.*, 2 (1985) 137-142.

[16] For a discussion of the technical details of this group of instruments and the various commercial sources of the instrument see a discussion of this type of instrument in B.H. Kaye "Direct Characterization of Fineparticles," Wiley, New York, Chichester, 1981.

[17] B.H. Kaye, "Characterizing the Fractal Structure of Aerosol Clouds," in preparation.
[18] W. Stöber and H. Flachsbart, *Environ. Sci. Technol.*, 3 (1969) 1280.
[19] The Stöber Spiral Duct Aerosol Centrifuge is available commercially from Heraeus Christ GmbH P.O. Box 1220, D3360 Osterode Harz FRG.
[20] P. Kotrappa, "Shape Factors for Aerosols of Coal, Uranium Dioxide in the Respirable Size Range." in T. Mercer. E. Morrow and w. Stöber (Eds.) "Assessment of Airborne Particles," Charles C. Thomas, Springfield, Illinois, 1973, Ch. 16.
[21] B.H. Kaye, "The Physical Significance of the Fractal Structure of Some Respirable Dusts," in preparation.
[22] This aspect of the health hazard posed by fractally structured dusts is discussed in the essay B.H. Kaye, "What is the Size of an Inhaled Fineparticle," in "Contemporary Issues in Occupational Health and Safety" lecture notes for a short course, Laurentian University, Spring 1988 (a copy of the essay is available from the author).
[23] P.P. Bolsaitis, J.F. McCarthy, G. Mohiuddin and J.F. Elliott, "Formation of Metal Oxide Aerosols for Conditions of High Supersaturation," *Aerosol Sci. Technol.*, 6. (1987) 225-246.
[24] B.H. Kaye, "Fineparticle Characterization Aspects of Predictions Affecting the Efficiency of Microbiological Mining Techniques," *Powder Technol.*, 50 (1987) 177-191.
[25] B.H. Kaye, R. Trottier and T. P. Lim, "A Randomwalk Model for Radon Decay and Diffusion in Fractal Space Leading to a Fracton Measure of Diffusion," presented at Fineparticle Society Annual Meeting, Boston, August 4-7, 1987.
[26] A recent exposition of the theory of gas adsorption and mercury porisimetry for studying the surface of a pore structure of rough solids is the book Y.S. Lowel and J.E. Shields, "Powder Surface Area and Porosity," Chapman and Hall, London, New York, 2nd ed., 1984.
[27] P. Pfeifer, D. Farin and D. Avnir, "Chemistry in Noninterger Dimensions Between Two and Three. Part 1. Fractal Theory of Heterogeneous Surfaces," *J. Chem. Phys.* 79 (1983) 3558-3565.
[28] D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer. "Chemistry in Noninteger Dimensions Between Two and Three. Part 2. Fractal Surfaces of Adsorbance," *J. Chem. Phys*, 79 (1983) 3566-3571.
[29] D. Avnir and P. Pfeifer, "Fractal Dimension in Chemistry an Intensive Charac-teristic of Surface Irregularity," *Nouv. J. Chim.*, 7 (1983) 71-72.
[30] D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer, "New Developments in the Application of Fractal Theory to Surface Geometric Irregularity," in "Symposium on Surface Science," P. Braun G., Betz, W. Husinsky, E. Sollner, H. Stori and P. Varga (Eds.), Technical University of Vienna, Vienna, (1983) 233-236.
[31] P. Pfeifer, D. Avnir and D. Farin, "Ideally Irregular Surfaces of Dimension Greater Than Two, in Theory and Practice," *Surf. Sci.* 126 (1983) 569-572.
[32] D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer. "Surface Geometric Irregularity of Particulate Materials. A Fractal Approach," *Journal Colloid Interface Sci.*, 103 (1985) 1112-1123.
[33] S. Peleg, J. Naor, R. Hartley and D. Avnir, "Multiple Resolution Texture Analysis and Classification," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelli.*, PAMI-6, No. 4, (1984) 518-523.
[34] D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer. " Molecular Fractal Surfaces," *Nature* (London), (1984) 261-263.
[35] P. Pfeifer, D. Avnir and D. Farin. "Scaling Behaviour of Surface Irregularity in the Molecular Domain: from Adsorption Studies to Fractal Catalysts," *J. Stat. Phys.* 36 (1984) 699-716.
[36] D. Farin, S. Peleg, D. Yavin and D. Avnir, "Applications and Limitations of Boundary Line Fractal Analysis of Irregular Surfaces: Proteins, Aggregates, and Porous Materials," *Langmuir*, 1 (4), (1985) 399-407.
[37] A.Y. Meyer, D. Farin and D. Avnir, "Cross Sectional Areas of Alkanoic Acids: a Comparative Study Applying Fractal Theory of Adsorption and Considerations of Molecular Shape," *J. Amer. Chem. Soc.*, 108 (1986) 7897-7905.
[38] D. Rojanski, D. Huppert, H. Bale, X. Dacai, P.W. Schmidt, D. Farin, A. Sori-Levy and D. Avnir, "Integrated Fractal Analysis of Silica: Adsorption, Electronic Energy Transfer, and Small Angle X-ray Scattering, *Phys. Rev. Lett.*, 56 (1986) 2505-2508.
[39] D. Avnir, D. Farin and P. Pfeifer, "Fractal Dimensions of Surfaces. The Use of Adsorption Data for the Quantitative Evaluation of Geometric Irregularity." Preprint provided by D. Avnir, Institute of Chemistry, Hebrew University of Jerusalum, Jerusalum, Israel.

[40] D. Avnir, "Fractal Aspects of Surface Science - An Interim Report," in C.J. Brinker (Ed.), "Better Ceramics Through Chemistry," Materials Research Society, 1986.
[41] P.Pfeifer, "Fractal Dimensions as Working Tool for Surface Roughness Problems," *Appl. Surf. Sci.* 1984.
[42] M. Silverberg, D. Farin, A. Ben-Shaul,and D. Avnir, "Chemically Active Fractals. Part 1. The Dissolution of Fractal Objects," in R. Engleman and Z. Jaeger (Eds.), "Fragmentation Form and Flow in Fractured Media," Proceedings of conference held at Neve Ilan, Israel, 6-9th January, 1986, *Ann. Is. Phys. Soc.*, 8 (1986) 451-457.
[43] C. Orr, "Application of Mercury Penetration in Material Analysis," *Powder Technol.*, 3 (1969-70) 117-123.
[44] B.H. Kaye, "Fractal Geometry and the Characterization of Rock Fragments," in R. Engleman and Z. Jaeger (Eds.), "Fragmentation Form and Flow in Fractured Media," Proceedings of conference held at Neve Ilan, Israel, 6-9th January, 1986, *Ann. Is. Phys. Soc.*, 8 (1986) 490-516.
[45] S.H. Ng, C. Fairbridge and B.H. Kaye "Fractal Description of the Surface Structure of Coke Particles," *Langmuir*, 3 (3), May-June (1987) 340-345.
[46] W. Freisen and R.J. Mikula, Canmet Divisional Report, ERP-CRL 86-128. Avail-able from Energy Mines and Resources Canada, Canmet Technology Information Division, Technical Enquiries, Ottawa, Ontario K1A 0G1, Canada.
[47] B. H. Kaye, "The Appolonian Gasket as a Model for Evaluating Mercury Intrusion Porosimetry Data," paper presented at the Rosemont Powder Technology Con-ference, Chicago, Illinois, 1988.

8 分形指与注水

8.1 分形指

如果有人看了图 8.1(a)以后把它看作一幅现代印象派艺术家的作品是可以理解的，你看，它多象一只小公鸡在幻想的栅栏上走动！对于某些读者来说，它或许是正从沼泽中升起的一个恐怖的精灵。然而，事实上它并不是任何异乎寻常的东西，只不过是一只 Hele－Shaw 盒中流出的巧克力糖浆而已。这幅图是在 Walker 所做的一个实验中产生的[1]。图 8.1（a）中从糖浆与空气界面流出的“红色指状物”是前面流体的前锋，而毕加索（现代印象派艺术之鼻祖——译者注）作品似的形状则是流出的糖浆包裹的空气。

Hele－Shaw 盒是一位英国工程师为推动流体物理性质的研究于 1898 年发明的，为在相对简单的流动系统中考察这些性质，这位工程师做了一个由二块靠得很近的平行板组成的流动盒，并用之以研究物体周围的流动，研究时在运动流体中注入染料产生带色流线以显示运动状态[2]。

在 Hele－Shaw 盒发明 50 年以后，它变成了一种虽很方便但很少使用的观察流体流动情形的装置。然而，当英国物理学家 Geoffrey Taylor 爵士开始用 Hele－Shaw 盒研究石油工业的一个重要问题时，它重新成为人们注目的中心[3]。石油矿藏是在地下诸如石灰岩及砂岩之类的多孔岩石中发现的。当油井刚钻成时，通常有高压天然气存在于油层上面而使石油喷出油井[4]。而当石油不再从井中流出时，一般来说，仍然有大量的石油滞留在多孔岩石中，这些滞留的石油占油田总储量的 30%～60%。在早期的石油工业中，工程师们每年都能找到新油田，那里有足够数量的石油容易地流出来，所以他们对从一口枯竭的（不再有足够的天然压力的）油井中回收滞留在多孔岩石内的石油不太感兴趣。然而，最近几年来，石油部门对石油的二次回收日益重视。石油二次回收的方法之一，是将加压的气体或水注入旧油井，使石油从岩石中排出。加压的二氧化碳及水流已被用于这种技术中。

Geoffrey Taylor 爵士认为，人们可以用 Hele－Shaw 盒子研究气体或另一种液体将盒内狭窄空间中的液体驱出的机理。图 8.2 就是一些用 Hele－Shaw 盒研究石油二次回

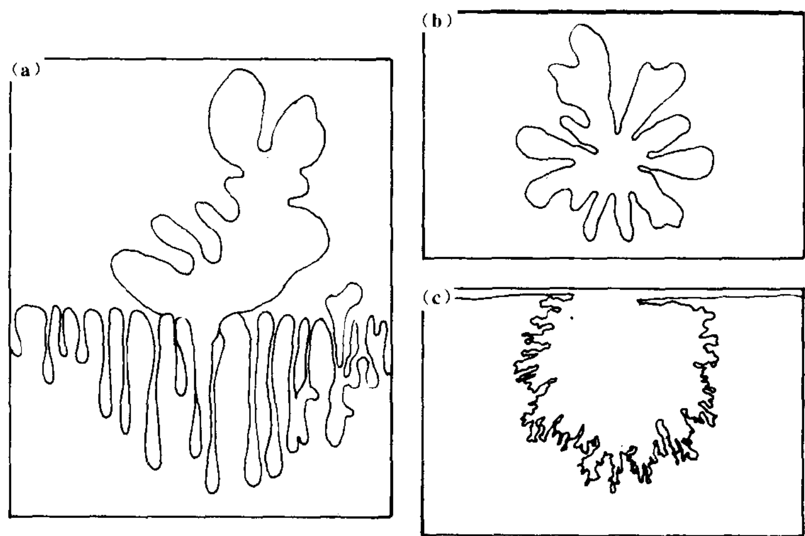


图 8.1 奇异的分形指可由 Hele—Shaw 盒中的液体边界产生（图形以 Walker 发表的照片为基础[1]）。(a) 以 Hele—Shaw 盒中流出的巧克力糖浆；(b) 空气挤出的谷浆；(c) 纤维素中的着色水

收的早期实验中得到的有趣结果[3,5]。在图 8.2 (a) 所示的一组图中，Hele—Shaw 盒竖直放置，加压空气以 0.1cm/s 的流速从上向下驱出盒中的甘油。从图可见，在这种流动中，形成了较长的流体指。这对石油工程师来说是一件坏事情，因为它意味着这些在驱动流体阵面之前进入岩石的"手指"会互相缠结在一起，从而当驱动流体向回收井挤压石油时，一些油可能被永远困在岩石中[6,7]。在此类运动界面上流体指产生的理论已被广泛研究。人们已经证明，指的形成与注入及排出流体的粘性和两种流体界面上的相对表面张力有关。石油工程师显然对改善石油二次回收中的驱动流体以阻止指的生长感兴趣[5,6,7]。

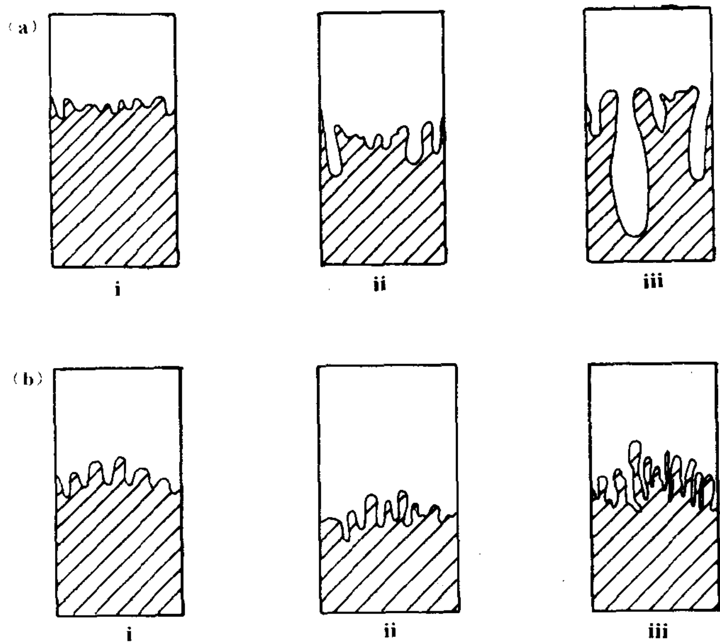


图 8.2 Saffman 及 Taylor 首先观察到的 Hele—Shaw 盒中的流体指[3]。(a) 流动开始后不同时刻空气取代甘油的情景（气流速度为 0.1cm/s）；(b) 水和甘油溶液（阴影部分所示）取代石油的情景[5]

在 20 世纪 80 年代中期，人们曾经发现，如果改进 Hele—Shaw 盒使之具有中心注入点并使流体从该点流出，则会形成具有分形结构的界面。图 8.1 (a) 就是 Walker 拍摄的

从自制Hele－Shaw 盒中排出的巧克力糠浆的照片（Walker 在其论文[1]中曾给出了 Hele－Shaw 盒中线性流动及径向排出物结构的完整描述），图 8.1（b）是当空气注入径流式 Hele－Shaw 盒中的黑色谷浆时指运动产生的分形萌芽。图 8.1（c）则是向纤维中注入被甲基染成紫色的水而得到的图形。在径流式 Hele－Shaw 盒中得到像图 8.1（b）及 8.1（c）这样的流动图形，使人们对形成这类界面发生了极大兴趣[8,9]，因为它对改进石油的二次回收技术以及研究自然界中分形的应用都很有意义。例如，图 8.3 就是由 Daccord，Nittman 及 Stanley 生成的三个模型[8]。

图 8.3（a）中的分形图是向充满一种多糖体溶液的盒中以 20mm/min 的流速注入水而得到的。实验表明，这种浸入多糖体溶液中蛛网式水流模式具有 1.70 的分维数。图 8.3（b）中的分形图形则是将水以不同于图（a）的流动条件从 Hele－Shaw 盒边缘注入同一多糖体溶液中所产生的，该分形图形的分维数是 1.50。图 8.3（c）中是将水注入口香糖溶液时获得的，该图形中值得注意的是分形指本身闭合而围注了盒内的流体。由于一种流体渗入另一种流体时所产生的分形指的分维数看来与注入及驱出流体的物理性质有相当重要的关联，因此人们正在对此进行深入研究，可能将有这方面的大量文献问世。

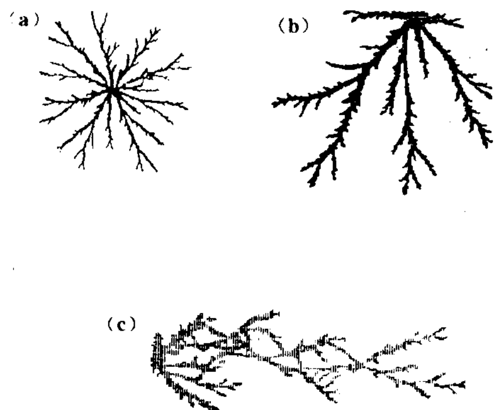


图 8.3　由 Daccord 等在 Hele－Shaw 盒中观察到的分形指[8]。（a）注入多糖体溶液中的水；（b）与（a）相同的二种液体，但水从 Hele－Shaw 盒顶部注入；（c）水进入口香糖溶液

8.2　分形注水与多孔介质中的流体锋

当我浏览一本名为“粉体技术”的杂志时，我第一次接触到这样的事实，即人们终有一天会碰到石油的二次回收问题，而分形几何对研究这一问题的科学家来说是非常重要的。我在翻动那本杂志时，偶尔发现了由 Lincoln Paterson 所写的一篇论文，文中似乎在每一页上都生长着分形[10,11]。我开始阅读这篇论文，企图从中找到关于分形几何的论述，然而看到的大都是拍下来的模型照片，其中两个被称为“粘性指”的模型如图 8.4（a）所示。这篇论文中没有提到分形几何的问题（但在这篇早期的文章之后，Paterson 博士陆续发表了一些关于粘性指分形结构的文章[12]）。Paterson 博士对石油的二次回收颇感兴趣，他用塑胶制成的柱状物充满 Hele－Shaw 盒，然后观察注入一种流体以排出另一种流体时形成的两种流体边界的运动。运动流体的锋是一个分形边界，我们已测出了 Paterson 博士的两张照片中运动流体边界的分维数。我很高兴地看到，当任何两种流体之间

的锋运动时，锋的分维数与时间无关[13,14]。图 8.4（b）是我测得的两组数据，在我发表我的实验结果时，我还没有意识到前一节中讨论过的一种流体渗入另一种流体的分形指运动已经发生了。但是，由于我关于渗透法测量粉末表面积的工作以及对汞液浸入孔隙的实验数据的解释（见第 7.4 节关于后一种方法的讨论），我已经知道了从多孔介质中排出流体的问题[15~17]。当我观察 Paterson 博士的研究系统所产生的图形时，我看到了液体试图进入由堆集的柱状物形成的多孔体中的景象。我曾把分形指看成有利于流体穿过相互联系的随机孔隙的最可能路径。我建议，它可以被当作一种随机行走，其中的流体正在寻找最可能的渗流路径。多孔介质中流体指的外观与 Daccord 及其同事们以及其他研究者报导的一种流体进入另一种流体时产生的分形指是如此相似，以致两者很容易混淆。但是，它们虽然看起来像却不是同一种现象。Feder 及其同事们在最近的论文中找到了这两种相似现象间的差别[5]。他们指出，人们必须慎用"渗透"这一术语。在早期的 Hele－Shaw 盒中，渗透率指的是整个盒中的流动阻力（这个盒子很象一个矩形管），当人们观察一种流体流过一堆球珠或其它多孔系统时，渗透率是一堆多孔介质中局部通道的流动阻力，这种通道就是多孔介质的孔隙。Feder 及其同事们在他们的论文中写道：

"用 Hele－Shaw 盒子研究多孔介质中流动模型的可靠性是值得怀疑的"。

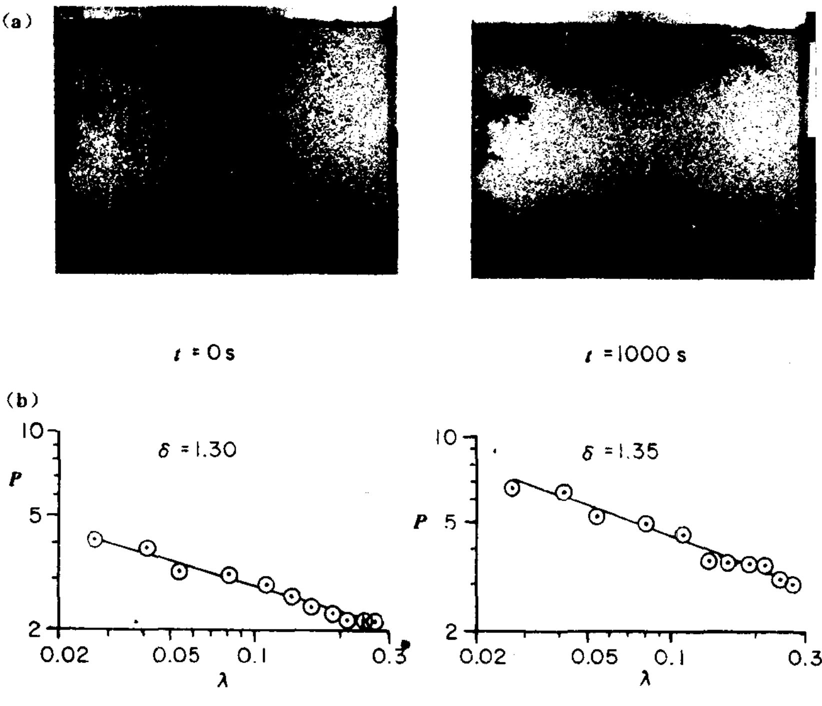


图 8.4 用水注入充满柱状塑料物及石腊油的 Hele－Shaw 盒拍下的流体分形锋[10]。(a) 起始时与 1 000 秒后锋的照片；(b) 两个分形锋的 Richardson 图表明，1 000 秒以后锋的分维数基本上没有变化[13,14]

在用粒状物料填充 Hele－Shaw 盒时，遇到的问题之一是很难做到微粒的随机填充，不论它们是球形还是不规则形状的，因为在 2 维平面内不可能不碰到难以处理的界面条件。例如，如果人们将球填入某一圆筒内，则固体壁面将把某种结构强加给球的随机填充，这通常在壁面处产生一条向下的通道，它对浸入流体的流动阻力要低于多孔介质本身对流体的阻力，这种壁面通道可以在图 8.4（a）中清楚地看到。液体测着边壁以相对快的速度运动，并从边壁处向介质中浸入形成羊齿植物似的生长体。

人们试图在 2 维空间中进行随机充填时遇到的另一个问题是在盒的顶部及底面上也

会发生与边壁处相同的现象，不过这在 Paterson 的工作中已被降至最低限度。

如果人们研究流体在填充有小珠的 Hele－Shaw 盒中的流动则应该注意，流体的优先流动路径与本章第 8.1 节所述的一种流体注入另一种流体后在 Hele－Shaw 盒内产生的分形指类型可能无关。指的运动可能是由填充物料（该物料产生流动的优先路径）错位引起的。因而，如果我们观察由 Nowick 及 Mader 所做的 2 维空间中的填充物（见第 5 章中讨论过的图 5.21），可以清楚地看到所谓的优先路径，而且如果充填阵列受到振动（即模拟的退火过程）则优先路径发生变化。图 8.5 所示为 Nowick 及 Mader 的一个 2 维阵列，从中我们可以清楚地看到，在壁面附近规则填充的结果是球体在此处成行排列，间隙点缀其中（如图的左边所示）。也许需要回忆一下，Nowick 和 Mader 的装配台具有不规则壁面的目的是防止壁面处规则充填对 2 维阵列产生影响，但显然这种影响没有完全

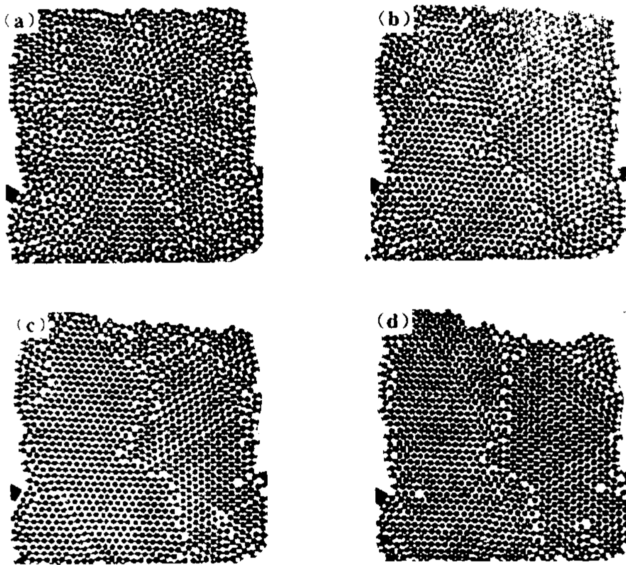


图 8.5　通过振动及施压可使粉末床层的密实而降低孔隙率，但微粒紧密堆积形成的通道使流动加快，壁面效应也能产生有利流动的通道。这两种效应可由 Nowick 及 Mader 研究过的受到振动的等径球 2 维阵列予以说明[21]。(a) 排好的阵列；(b) 振动 5s 以后；(c) 振动 15s 秒以后；(d) 振动 30s 以后

消除。最近 Onoda 及 Toner 证明了下述事实：在一般的盘式装配系统内规则充填物间的错位可能形成分形路径[18]。图 8.6 中的一些分形模型是 Maloy，Feder 及 Jossang 将流体注入 2 维多孔介质中得到的[5]。生长的指状分形图代表液体环氧树脂在 2 维多孔介质中的流动路径，多孔介质是将直径为 1mm 的玻璃球填入空隔为 1.6mm 的两块玻璃平板间而形成的。这些分形指的分维数为 1.62。Maloy 和他的同事们还证明，如果相同大小的球的填充阵列是非常规则的，则流体注入该阵列时形成的分形指具有雪花一样的对称性而不是图 8.6 中的随机模式[5]。

球体直径的均匀性以及产生阵列的装配技术的稍稍变化都会影响图 8.6 中分形指的模式。另外，系统的振动也很重要。我们现在正打算在 Lauventian 大学进行实验，目的是制造出以 Nowick 及 Mader 的随机阵列为工作基础的 Hele－Shaw 盒。原来装配台的刚性壁面将由软橡胶代替，这样在壁面通道中由于流体静力学作用而形成紧密的阵列边缘，同时我们还将这种新的 2 维 Hele－Shaw 盒中的充填物受到不同程度的压缩与振动作用。



图 8.6　Maloy 等将环氧树脂浸入 Hele－Shaw 盒中的塑料小球时所形成的 2 维阵列中的分形指[5]

Kaye 和他的同事们研究了砂石中的流体分形锋[19]，在他们的实验中，先制备一块砂岩薄片，再在砂岩的上表面钻一个中心井，该系统如图 8.7（a）所示。实验时，将染料溶液倒入砂岩中心，于是流动的染料溶液形成一个可能与砂岩的孔隙结构有关的分形锋，锋的分维数由图 8.7（b）所示。

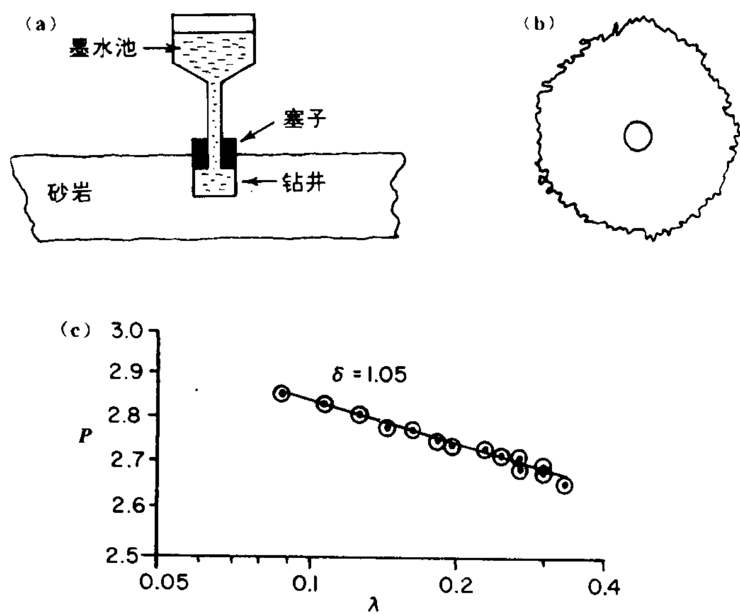


图 8.7　一种浸入流体在砂岩中产生的分形锋携带着关于岩石孔隙结构以及由受压流体进行石油二次回收的动力学信息[19]。(a) 在砂岩样本中流体渗流的实验系统；(b) 由渗入流体产生的分形锋；(c) 图 (b) 中分形锋的 Richardson 图

在讨论往等径球体床层中注入环氧树脂而得到分形指模型时，Feder 指出，若在通常的 Hele－Shaw 盒中研究分形指，那么分形指是盒的板间空隙的函数，而在多孔介质中分形指的长度则由孔的大小决定。他继而证明，孔隙结构的随机性是分形指形成所必需的，注入流体从给定孔由驱走另一种流体的作用并非仅与两种流体间的压力差有关，而且与流体压力对孔隙毛细压的相对值有关。

Wikinson 和 Wilemson 把穿过堆积的多孔床层的流体运动称为浸入渗流[20]，Feder 指出，强调下述事实是相当重要的：在浸入渗流（图 8.6 所示的一类分形指）中，流体进入任一给定孔与否只与该孔的本身性质有关，而流体的粘度在浸入概率中不起任何作用。换句话说，运动流体的前锋在给定孔隙中的渗流是进入孔口时所需浸入压力的函数，并且与第 7 章末考查汞液浸入时讨论过的“渗流压力”有关。所以，很可能由汞液浸入法测出的孔隙尺寸分布与注入流体在多孔介质中运动所产生的分形指的分维数直接相关。Feder 的流体锋是一系列进入单个孔隙的局部运动的综合，它基本上与我在第一次讨论 Pater 的工作时曾建议的模型一样，尽管两者的相似性对那些在多孔介质研究中尚无经验的人来说并不明显。在我所建议的模型中，我曾想象，一系列作随机行走的射流正在一定的表面张力、通道半径及外加压力条件下，在另一运动流体中左冲右突，从而推动了流体锋面的前进，因此，人们可以预计，重新解释的汞液浸入法测得的分维数既与多孔介质截面上的 Sierpinski 地毯的分维数有关，又与将一种流体注入多孔介质以排出另一种流体时所形成的分形指有关。浸入渗流及粘性分形指的研究是分形几何应用发展较快的领域之一[21—31]。

参考文献

[1] J. Walker. “Fluid interfaces, Including Fractal Flows, can be Studied in a Hele-Shaw Cell,” Amateur Scientist section, *Sci. Am.*, November, (1987) 134-138.

[2] H.S. Hele-Shaw, *Nature* (London), 58, (1898) 34.

[3] P.J. Saffman and G.I. Taylor, *Proc R. Soc.* London 245,(1958) 312.

[4] For an introduction to the basic processes which are believed to have caused the presence of oil in porous rock, see C.E. Zobell, “The Origin of Oil,” in R. Colburn (Ed.), “Modern Science and Technology,” Van Nostrand, New York, (1965) 595-602.

[5] J. Feder, T. Jossang, K.J. Maløy and U. Oxaal. “Models of Viscous Fingering,” in R. Engleman and Z. Jaeger (Eds)., “Fragmentation, Form and Flow in Fractured Media,” Proceedings of conference held Neve Ilan, Israel, 6-9th, January, 1986, *Ann. Isr. Phys. Soc.*, 8 (1986)

[6] See the diagrams and brief discussions dealing with secondary oil recovery in E.E. David, Jr., “The Federal Support of Mathematics,” *Sci. Am.* 252 (1985).

[7] K.J. Maløy, J. Feder and T. Jossang, *Phys. Rev. Lett.* 55,(1985) 2688.

[8] G. Daccord, J. Nittman and H.E. Stanley, “Fractal Viscous Fingers-Experimental Results” in H.E. Stanley and N. Ostrowsky (Eds.), “On Growth and Form,” Martinus Nijhoff, Boston, 1986.

[9] A.L. Robinson, “Fractal Fingers in Viscous Fluids,” *Science*, 228 (1985) 1077-2080.

[10] L. Paterson, “Dispersion and Fingering in Miscible and Immiscible Fluids Within a Porous Medium,” *Powder Technol.*, 36 (1983) 71-78.

[11] L. Paterson, V. Hornoff and G. Neale, “A Consolidated Porous Medium for the Visualization of Unstable Displacements,” *Powder Technol.*, 33 (1982) 265-268.

[12] L. Paterson, “Fingering with Miscible Fluids in a Hele-Shaw Cell,” *Phys. Fluids*, 28 (1985) 26-30.

[13] B.H. Kaye, “Application of Recent Advances in Fineparticle Characterization to Mineral Processing,” *Part. Charact.* 2(1985) 91-97.

[14] B.H. Kaye, “Fractal Description of Fineparticle Systems in N-dimensional space,” Preprints, 3rd European Symposium on Particle Characterization, Nuremberg, May 9-11, pp 131-148.

[15] B.H. Kaye, "Permeability Techniques for Characterizing Fine Powders," *Powder Technol.*, 1(1967) 11-22.
[16] B.H. Kaye and P.E. Legault, "Real Time Permeametry for the Monitoring of Fineparticle Systems," *Powder Technol.*, 23 (1979) 179-186.
[17] B.H. Kaye, "Fractal Geometry and the Characterization of Rock Fragments," in R. Engleman and Z. Jaeger (Eds.), "Fragmentation, Form and Flow in Fractured Media," Proceedings of conference held at Neve Ilan, Israel, 6-9th January, 1986, *Ann. Isr. Phys. Soc.*, 8 (1986) 490-516.
[18] J.Y. Onada and J. Toner, "Deterministic Fractal Defect Structures in Close Backings of Hard Disks".
[19] B.H. Kaye, G.G. Clarke, A.E. Beswick and R.A. Trottier, "Examination of Eluted Fractal Fronts in Porous Bodies as a Means of Characterizing the Pore Structure and Permeability of the System," in "Proceedings of the Conference on Fractal Geometry in Material Science held in Boston, December 4, 1986," Materials Research Society, Pittsburgh, 1987.
[20] D. Wilkinson and J.F. Willemson, *J. Phys. A, Math. Gen.*, 16 (1983) 33-65.
[21] A.S. Nowick and S.R. Mader, "The Hard Sphere Model To Simulate Alloy Thin Films," *IBM J.*, September, November (1965), 358-374.
[22] R. Lenormand and C. Zarcone, "Role of Roughness and Edges During Imbibition in Square Capillaries,"Society of Petroleum Engineers of AIME, Society of Petroleum Engineers Reprint 13264, paper presented at the Annual Technical Confer-ence and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, September 16-19, 1984. This paper contains some pictures of fractal fronts and a simulated section of growing clusters which looks exactly like a Sierpinski carpet.
[23] R. Lenormand and C. Zarcone, "Invasion Percolation in Etched Network Meas-urement of a Fractal Dimension," Reprint supplied by the authors.
[24] R. Lenormand, C. Zarcone and A. Sarr, "Mechanisms of the Displacement of One Fluid by Another in a Network of Capillary Ducts," *J. Fluid Mech.*, 135 (1983) 337-353.
[25] R. Lenormand and C. Zarcone, "Growth of Clusters During Imbibition in a Network of Capillaries," in D.P. Landau and F. Family (Eds.), "Proceedings of the International Conference on Kinetics of Aggregation and Agglomeration 1984,".
[26] P.G. deGennes, "Imperfect Hele-Shaw Cells," preprint provided by the author, College de France, 75231 Paris Cedex 05, France.
[27] P.G. deGennes, "Partial Filling of a Fractal Structure by a Wetting Fluid," in D. Adler, H. Fritzche and S.R. Ovschinsky (Eds.),"Physics of Disordered Materials," Plenum Press, New York, (1985), p. 227-241.
[28] M. Murat and A. Aharony, "Viscous Fingers and Diffusion Limited Aggregates Near Percolation," *Phys. Rev. Lett.*, 57, (1986), 1875-1877.
[29] E. Guion, J.P. Hulin and R. Lenormand, "Application de la Percolation à la Physique de Milieux," *Ann. des Mines*, Mai-Juin (1984) 17-40.
[30] A.J. Katz, and A.H. Thompson, "Fractal Sandstone Pores. Implications for Conductivity and Pore Formation," *Phys. Rev. Lett.*, 54 (1985) 1325-1328.
[31] A discussion of the problems of the movement of fluid through porous systems from a fractal perspective is available in B.H. Kaye, "Fineparticle Characterization Aspect of Prediction Affecting the Efficiency of Microbiological Mining Techniques," *Powder Technol.*, 50 (1987) 177-191.

9 断裂、碎片和分形

9.1 断裂表面的分形结构

Mandelbrot 在他的书中告诉我们，他创造了“分形”(Fractal) 一词来描述他新创立的曲折系统几何学，“分形”一词来自拉丁语形容词“Fractus”。“Fractus”的词根与 fraction 和 fragment 的词根相同，意思是不规则的或破碎的。“Fractus”本身的来源是“Frangere”，后者意为使（物体）破碎。在创造“分形”这个词时，Mandelbrot 已直接注意到断裂形成的表面是曲折的，不确定的，从而可以用分维数来描述[1]。有关材料的结构强度以及不同合金和复合材料抗断裂能力的研究已发展成为材料科学的一个特殊分支。这个领域的专家把断裂表面结构的定量研究称为“断口学”(Fractography)[2,3]。在科学研究领域运用分形几何的第一批应用科学家包括冶金学家，他们所关心的是发展断口学的理论与工艺[2,4,5]。

研究断裂表面的科学家面临的主要问题之一是要降低表征断口所需考察的空间维数。Chermant 和 Coster 曾通过研究断口的垂直剖面来降低维数，[4]这就把断口的表征问题转变为在 2 维空间中确定边界的分维数。如果剖面上的峰与谷之间差别不太大，就可以象在第 3 章中研究砂磨 (Sandblasted) 表面时那样，用轮廓曲线仪 (profilometer) 来研究表面的粗糙度。

图 9.1 所示是 Erwin Underwood 研究断裂表面时所测得的一些数据。构造步长技术被用于测量断口的分维数，研究所得的 Richardson 曲线示于图 9.1 (b) 中。曲折的断裂表面存在于 3 维空间，其分维数应是在 2－3 之间的一个数值。可以证明，如果 δ_B 是断口剖面曲折轮廓的分维数，那么断口的分维数 δ_A 为

$$\delta_A=1+\delta_B$$

如果曲折表面的变化是各向异性的，那么在由 2 维边界推得的 2 维或 3 维空间的分维数时，人们就不得不做很多剖面以获得足够的数据来充分地描述 3 维空间内表面的粗糙度。对于较硬的材料，如岩石或金属，在断口上做几个剖面则成为这类研究中的主要

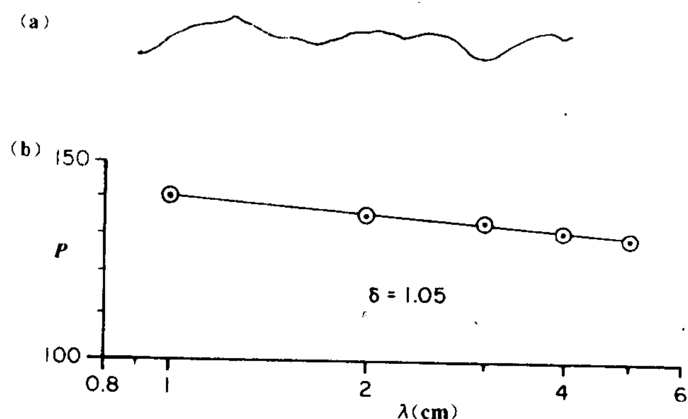


图 9.1 金属试样的断裂表面结构可用分维数描述。(a) E. Underwood 提供的断裂表面的剖面轮廓；(b) 用 Richardson 曲线表示 (a) 中的轮廓线结构

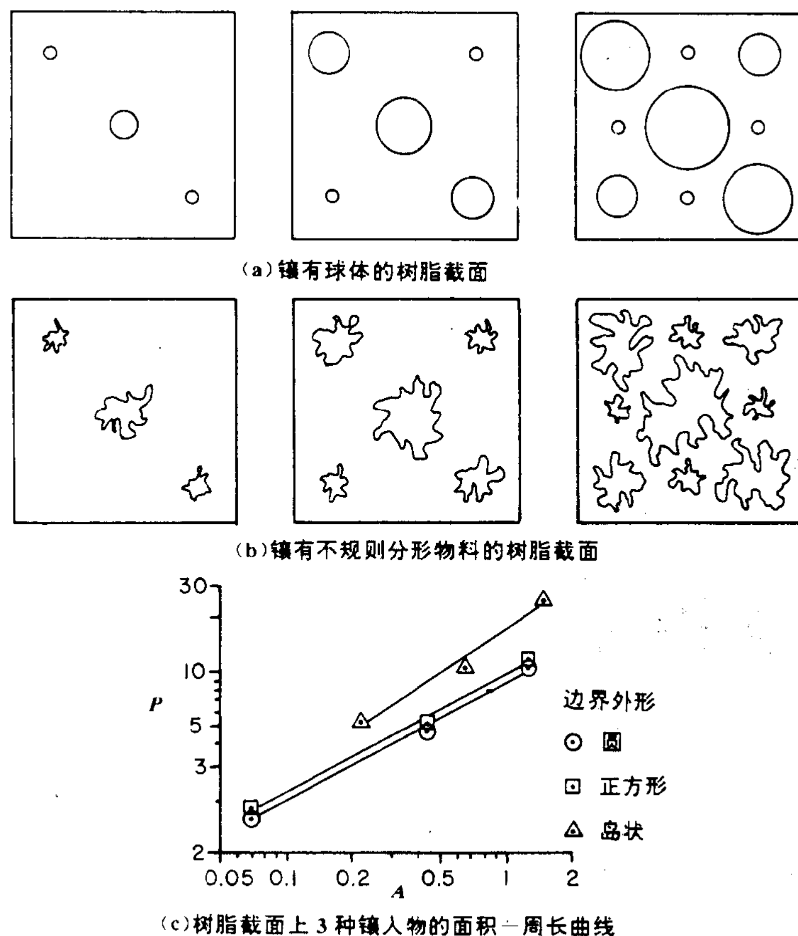
花费。Underwood 用这种方法也测得了金属断口的分维数[2]。

Passoja 及其合作者在研究断口时则采用了与 Chermant，Coster 及 Underwood 不同的方法。他们把断口镶嵌在树脂基质中，然后用标准金相技术沿平行断口的方向进行切割[5-10]。当我们对镶嵌的试样进行一系列切割或研磨时，断口就会慢慢地从树脂中显露出来，断口的峰部就象是被树脂的海洋所包围的小岛。继续该切割过程，树脂中的一系列小岛就会长大，这些小岛中也可能包含一些湖泊。Passoja 及其合作者就是从出现在这些截面中的小岛的结构特征来推断曲折断裂表面的分维数的。如图 9.2 所示。

为简化对这一方法的解释过程，我们首先假定所研究的小岛轮廓符合欧几里得几何，比如可在图 9.2 (a) 中用圆圈模拟实际中的小岛。随剖面的不断下移，小岛不断增大并出现新的岛屿。如果我们测量每一个横截面内小岛的面积和周长，并在双对数坐标下将小岛总面积对小岛周长作图，我们就会得到图 9.2 (c) 中所示的数据曲线。如果我们用正方形或椭圆来模拟长大的小岛，我们就会得到一条斜率相同的平移曲线。现在我们考虑当断口截面上的小岛具有分形边界时会出现什么样的情况。在给定的分辨率下，这将意味着所测得的小岛的周长大于用等面积圆代替小岛时所测得的周长，这大出来的部分与小岛边界的分维数及所使用的检测标尺有关。因此，当我们在一定的分辨率下测量图 9.2 (b) 中的一系列逐渐显露出来的图象而得到呈递增趋势的面积和周长时，据此画出的双对数坐标上小岛总面积和周长的关系曲线具有较陡峭的斜率，如图 9.2 (c) 所示，而分维数可从该数据曲线的斜率求得。我们可以清楚地看到，在这种测量技术中，获得实验数据的过程并不包含在一系列放大倍数下测量小岛的边界而推断其分维数这一方法。实际上，在这种测量技术中，或是对一系列剖面使用同样的放大倍数，或是当使用不同放大倍数时引入修正因子。

Passoja 及其合作者把他们估算断口分维数的技术称作“小岛法”(Slit—island technique)。图 9.3 (a) 给出了 Passoja 等测得的一组典型数据。而由断口分维数研究材料性质的方法则从图 9.3 (b) 可见，那里 Passoja 提供了一组金属热处理数据。

Passoja 等在他们的一些研究中发现这些露出的小岛的分维数并不依赖于所研究的实际截面。在这种情况下，使用小岛法足以测得抛光截面中小岛边界或部分边界的分维数。图 9.4 所示是用树脂充填的岩芯断口的一个截面内的曲折小岛。这组数据是在研究



(c)树脂截面上3种镶入物的面积—周长曲线

图 9.2 Passoja 及其合作者通过检测一系列镶嵌在树脂中的断口横截面上逐渐露出的小岛而获得断口的分维数。(a) 在一系列平行于断口的理论截面上正在长大的小岛，这里假定在每个抛光截面上的小岛是圆形的；(b) 一个镶嵌在树脂中的真实断口截面上依次出现的小岛外貌；(c) 根据抛光截面上增大的小岛给出的双对数坐标（小岛总周长对小岛总面积）曲线，该曲线的斜率与小岛边界的分维数有关

岩柱受压情况下的断裂行为时得到的。图 9.4 (b) 则是在 Dapple 图象分析仪上用膨胀法 (Dilation logic) 测量小岛边界分维数的结果。

Passoja 等还利用被称为“断口剖面分析”的方法 (FPA) 来定量描述断口的分形结构[5]。在这项技术中，他们使用与切岛法中同样的制样方法，把断口镶嵌在树脂中，但沿与断口的粗糙面垂直的方向切割断口。这样得到的断口剖面线看起来很象本书第 3 章中所描述的表面光度仪测出的轮廓曲线。Passoja 等将这个无规则的波形 (noisy waveform) 进行傅里叶 (Fourier) 分析，结果表明，该剖面线的分形结构可以从波形中各分量的能谱中推算出来。有关表征分维数的 FPA 方法的理论探讨已超出了本书的范围（本书的这一章节仅是关于分形几何在断裂学中应用的导言或叙述）对此技术感兴趣的读者可参阅 Passoja 等的出版物[5-10]。

另一些对断裂表面感兴趣的专家是选矿工程师，他们需要将岩石破碎成细粉以提取矿石中的有用成分[11,12]。当人们想表征破碎过程产生的较大碎片的表面结构时，可以把碎片镶嵌在树脂中，然后切片，对截面上的边界用膨胀法在图象分析仪上进行分析。另一种测定岩石粉末这类碎片的分形结构的方法是由 Pfeiffer、Avnir 及其合作者提出的气体吸附或染料吸附技术（参见第 7 章）。

对利用分形几何定量描述裂纹结构感兴趣的专家遍及从地质学、市政工程到食品技

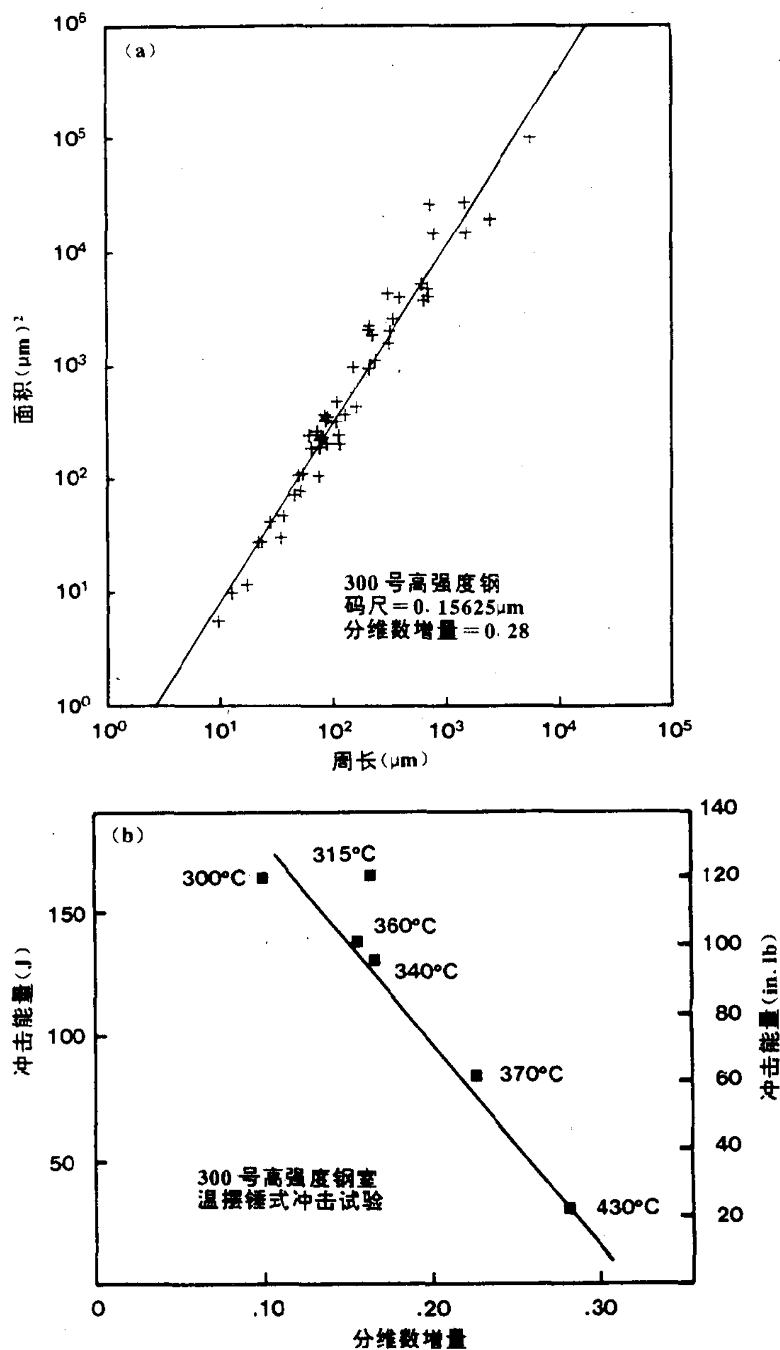


图 9.3 由 Passoja 及其合作者提供的一种真实断口的典型数据曲线。(a) 平行于断口的一系列截面上的面积—周长曲线；(b) 热处理钢材断裂的分维数与热处理温度的关系曲线

术的各个领域。例如，那些试图从热岩中开发能量的地质学家，先从地质表面钻井到热岩的主体中，然后引爆放入井底的炸药炸裂井底周围的岩石，接着，他们或是向井中泵入冷水而从附近的另一口井中取出热水，或是从该井中直接取出存在于多孔岩石中的热水，而这些热水正是经炸开的裂缝中流入井内的[13]。

同样，那些希望改善蕴藏在砂石中的天然气流动状态的工程师，有时侯采用一些方法使砂石产生更多裂缝以增加天然气的流速。显然上述两类地质工作者都想能够表征爆炸或其它方法产生的裂纹，他们可以利用从炮眼岩芯中得到的圆盘状试样来研究岩石在

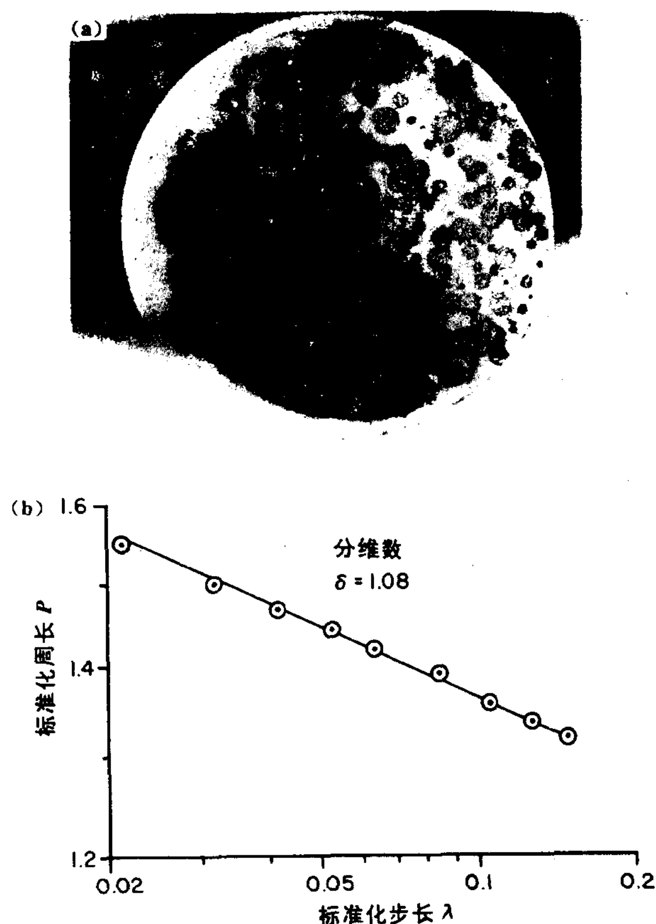


图 9.4 断口截面上小岛边界的分维数也可以用 Dapple 图象分析仪测得。(a)镶嵌在树脂中的 Norite 岩芯断口的抛光截面；(b)用 Dapple 图象分析仪测得的小岛边界的 Richardson 曲线

炸药爆炸时如何开裂。

建筑工程师开始运用分维数来描述混凝土中的裂纹特征[11,15,16]。陶瓷工程师则对描述裂纹结构和裂纹扩展的动力学过程十分感兴趣[17,18]。

我曾经参与的分维数在食品科学中的一个应用是描述合乎消费者口味的甜饼（饼干）的破碎特征。那些习惯于一定类型甜饼的顾客喜欢甜饼碎开时的方式不但始终如一，而且与他们曾见到的某种特定甜饼的碎裂方式彼此相似。而甜饼的碎裂类型可用分维数和图象分析法定量描述。没准将来哪一天，俗话所说的“That’s the way the cookie crumbles（字面直译为：饼是那么的碎）”中要加上一个分维数值，以精确表示饼碎裂的程度！

9.2 从分形角度描述断裂过程

当裂纹在物体内不断扩展形成一组交错的断裂面时，物体便裂成了碎片[19]。在物体全部破碎前的较长时间里，常常只能看到物体表面的裂纹。我们经常认为裂纹是一组线，而实际上它是一个曲折的面，但在 2 维平面上，我们看到的裂纹就成了线。因此，杯子外面的裂纹只是杯壁内部断裂的表面现象。顺便说一下，值得注意的是那些由表面裂纹延伸到杯内的孔隙是有害细菌滋生的场所。在这些孔隙中，细菌得以繁殖并污染杯中的饮料。在另一种情况下，当杯子的釉面损坏时，暴露的釉面就会受到酸性饮料的（如桔

汁和柠檬饮料）的浸蚀，这常造成杯体或釉面中铅化合物的溶出，从而引起铅中毒的危险。(参见第 6 章中有关细菌在分形空间内随机游动的讨论，那是一个分形参数影响微生物处理矿石效率的一个例子。)

显然对任何断裂过程的研究都必须先考察裂纹在物体内的传播方式，此时专家们面临的一个主要问题是找到合适的方法来描述裂纹的结构。例如，陶瓷学家常对陶瓷产品在外物撞击下的抗碎能力感兴趣。瓷砖生产者为检验浴室和厨房的装饰瓷砖的断裂行为所采用的方法之一，是让一个钢球从指定的高度落到一块瓷砖上。如果某位一向进行此项检验的工程师偶然看到了未加说明的 Whitten－Sander 分形结构图，他也许不会想到他看到的是一堆灰烬，相反，他可能认为这是他每日常见的瓷砖上裂纹的抽象图案，于是他会很快意识到分形几何可以用来描述他日常所见的裂纹。这位“瓷砖实验”工程师可能套用灰烬粉末长大的数学模型来模拟瓷砖中的裂纹。在他的改进过的模型中，裂纹的扩展将是沿现有裂纹的尖端向未开裂的地方随机进行的。

在这位陶瓷学家的模型能够描述真正的裂纹生长之前，他必须详细说明裂纹是如何从当前位置扩展到未裂区的。“裂纹怎样扩展？”这一貌似简单的问题实际上是材料科学中最复杂的问题之一。本书只对不同裂纹的扩展机制做简单的讨论。

为讨论的方便，有必要区分在应力作用下裂纹扩展的两种方式。为刻画这两种断裂方式的差别，请参看图 9.5 中的简单示意图。如果我们将一块岩石放在台钳的钳口上，然后施加压力，当压力达到一定大小时，岩石中开始出现裂纹，进一步施压会使裂纹扩展直到岩石裂成许多碎片。用这种方式使岩石碎裂的力称为压应力（Compressive stress)。正是这种碎裂机制使建筑物的支柱或地下矿井的支柱发生断裂而导致整个系统的倒塌。同时，也是矿业中使用的腭式破碎机破碎矿石的基本原理。讨论压应力下裂纹在物体内如何扩展的确切机制已超出了本书的范围。没有材料科学背景知识但对此感兴趣的读者可参阅 J. E. Gordon 所写的一本书，那里您可读到有关材料科学中裂纹扩展的重要的论述，您会发现，这本书既使您一开眼界，又使您兴趣盎然。别忘了书名是“坚固材料的新科学——天花板为何不从天而降”[20]（The New Science Of Strong Materials, Or Why You Don't Fall Through The Floor)。

从事矿业破碎的工程师在实验中发现当矿业已碎到某一较小的尺寸时，只靠挤压作用使矿业继续破碎是困难的。这时侯，他们发现改用广泛使用的名为冲击研磨或冲击破碎（impact grinding or impact crushing）的方法更为经济。工程师们用于表示破碎岩石或生产其它工业用重要粉末的术语在各行业中各不相同。在本书中，我将用“冲击破碎”这一术语来表示在“冲击研磨中的断裂类型。图 9.6 表明了这种破碎过程。

如果用锤子敲击一块易碎的岩石，则当锤子一接触到岩石时，岩石就会碎成许多小块。在缺少其它任何信息的情况下，大多数人可能认为锤子敲击岩石所引起的断裂类型与腭式破碎机中的岩石断裂类型基本相同，只是断裂过程更快一些而已。然而，事实上捶子猛烈一击所引起的破碎却是冲击破碎的一个例子，它的破碎机制与腭式破碎机并不相同。

为了说明冲击破碎机制的力学基础，我们先考察一个在陶瓷科学领域中发现的奇妙事实。Gordon 博士告诉我们，在对方形瓷砖所做的检测试验中，检测者是在瓷砖的方形

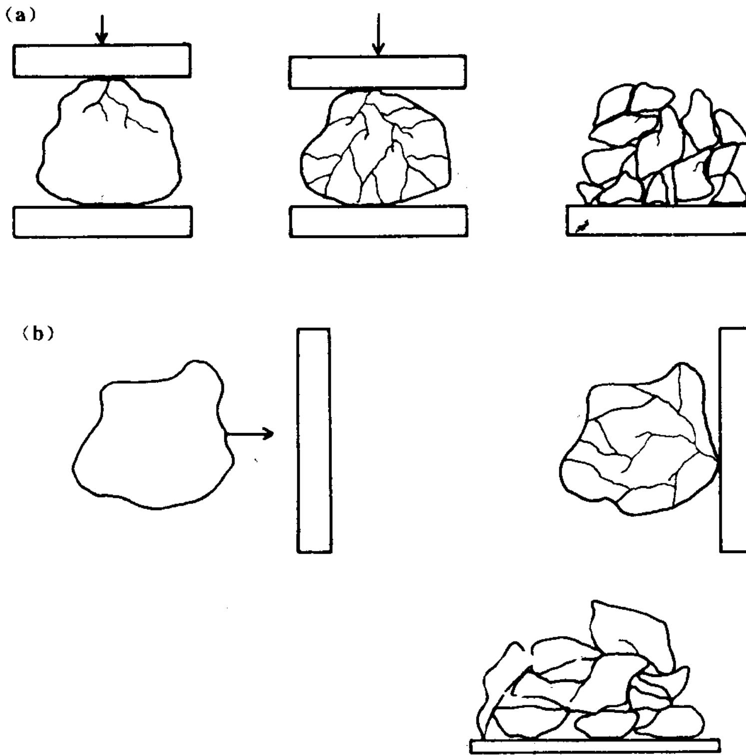


图 9.5 在研究岩石试样断裂时，可以看出压缩断裂和冲击断裂之间有意义的差别。(a) 压力作用下的裂纹扩展动力学过程图解；(b) 冲击断裂过程中碰撞冲击波的多种反射引起物体的破碎

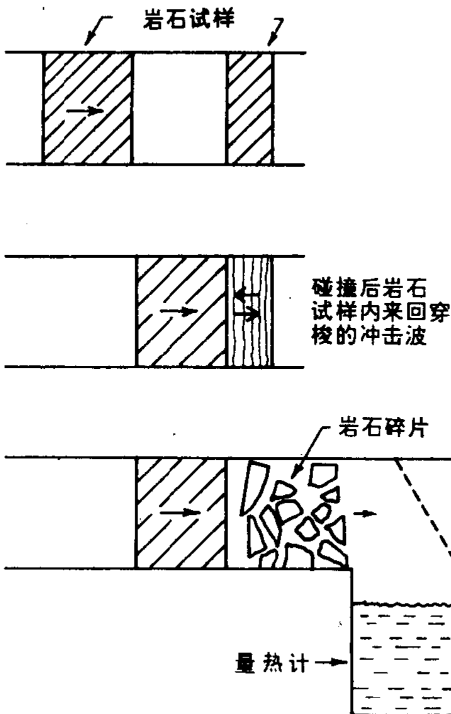


图 9.6 用于研究岩石冲击破碎的冲击筒。当碎片落入量热计时，由于吸收动能引起的碎片温度升高可以被测量出来

表面中心施以猛烈的一击。在描述这一过程时，Gordon 博士写道：

"在许多情况下，瓷砖的破裂并不是由于中间裂纹向四周扩展所致，而是敲击中心时瓷砖的四周直接断开。"

无疑，当第一个观察到这一奇怪结果的工程师拿起这种瓷砖碎片时，他一定会感到困惑。为理解中心受击后瓷砖上发生的物理过程，我们考察一下图 9.6 所示的冲击筒（ballistic cannon，一种用于研究岩石受冲击而碎裂的装置）中发生的一系列现象。这个装置在 Laurentian 大学正用于研究冲击作用下引起岩石碎裂的作用力类型，它是由用于研究坦克陶瓷护层（这种防弹层在坦克被导弹击中后可保护乘员免受伤害）强度的设备改装而成的。

为在冲击筒里进行冲击试验，需从矿石上切下两个圆柱形矿块，其中一个的高度是另一个的两倍。将两个矿块放置在光滑的圆柱形孔中，抽去两块岩石间的空气，用小型爆炸的方法推动较大的石块撞击到较小的石块上。在撞击的一瞬间，当第二个石块尚未发生明显移动时，冲击波就已在该石块内传播了。在讨论这个冲击波时，Gordon 博士告诉我们：

“应力在任何物质中传播的最高速度通常是这种物质中的声速。事实上，声音本身就是以自然速度在物质中传播的一个或一系列应力波。可以证明声音在钢、铝和玻璃中传播的速度大约是 5 000m/s。这比任何锤子敲击的速度都快，也比子弹的速度快得多。”

在我们的冲击筒中，由两块岩石碰撞引起的冲击波在柱形矿块内来回多次反射，在矿石内的某些地方形成张力区。

多数材料在张力下比在压力下易碎，因为压力使结构中的裂纹闭合，而张力则使裂纹增大。

在上述冲击筒内所研究的岩石试样的断裂是由于冲击后的张力而不是压力。当我们用锤子敲击岩石时，实际上是在石块受击时产生了一系列冲击波。用 Gordon 博士的话说，就是：

“当我们用锤子敲击固体物料时，全部应力波从被击部位辐射开来并传入材料内部。它们在万分之一秒到十万分之一秒的时间内传到固体的另一边，并以回声的方式反射回来，而几乎不损失能量。接着发生的事情则取决于很多因素，如固体的形状，敲击的确切部位等。反射回来的应力波与发生的应力波在某些驻点反复相遇引起应力叠加直到发生断裂。”

Gordon 博士在解释关于瓷砖掉角的情况时指出，它是由于从受击点发出的冲击波被反射回来并集中到角上而引起的。

图 9.7 中由 Lee A. Cross 博士拍摄的两张照片戏剧性地显示了玻璃板受冲击而破裂的若干阶段[21,22]。在 Cross 博士的试验中，一个直径为 4.5mm 的钢球射到一个 6.35mm 厚，5cm 见方的玻璃板上，球击到玻璃时的速度为 200m/s。图 9.7（a）是在冲击后 20μs 拍摄的（$1\mu s=10^{-6}s$）。离冲击球很近的区域因为玻璃上有许多裂纹而显黑色。冲击发生 20μs 后，玻璃上的冲击波已经穿过玻璃板并被反射回来，直接和反射的冲击波交互作用引起玻璃板正面和后部出现裂纹。Gordon 博士告诉我们，玻璃中裂纹的传播和扩展速度等于该物质中声速的 30%。因此，图 9.7 中所示的裂纹扩展速度大约 1 700m/s。Gordon 博士写道：

“这个应力波以声速在材料中的各个方向传播，并被新的和旧的表面反射回来，因而我们最后得到的极可能是很多裂纹而不是一个。换句话说，材料已经破碎了。”

图 9.7（b）中的照片是冲击后 70μs 拍摄的。这时，裂纹已穿透整个玻璃板。Cross 博士在他出版的论文中已描述了他的高速摄影技术，并展示了比图 9.7 晚 7μs 拍摄的照片。在那张照片中，图 9.7 中被标记为 A 的碎片是开始与玻璃板母体分离的第一个碎片。如果能拍摄到一系列与图 9.7 相似的，不同形状的各种试样在不同冲击物作用后的断裂图象，并描述出裂纹扩展的分维数，那将是一项非常有趣的工作。

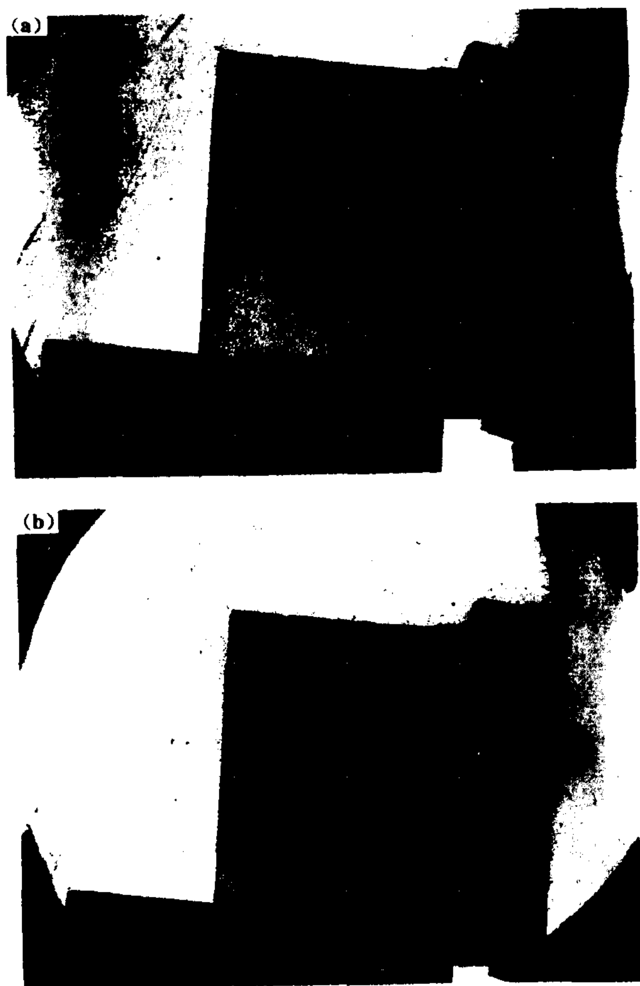


图 9.7 被快速运动的钢球碰击而破裂的玻璃板的高速摄影照片，描述了冲击断裂的各个阶段[21]。(a) 碰撞后 20μs 玻璃板上出现的裂纹；(b) 碰撞后 70μs 玻璃板上出现的裂纹

图 9.7（a）左上角的裂纹看起来很象 Mandelbrot 博士书中的分支分形结构（见图 9.8）。当我看到 Cross 博士的照片，并想起图 9.8 中 Mandelbrot 博士的树状结构时，我的 Rorschach 反应（Rorschach 是一种测验的名字，该测验以 10 张墨水点画测验人的个性——译者注）告诉我，用树状分形结构理论建立起一个裂纹生长模型应该是可以的。旨在用此方法表征裂纹扩展的研究正在 Laurentian 大学进行。

从图 9.7 的裂纹扩展过程可见，扩展中的裂纹具有明显的随机分支并突然改变方向，这使得建立一个真正可以描述这种冲击破碎的模型非常困难。我们期望矿业工程师开始着手用不同尺寸的岩石，在不同的速度下进行冲击破碎试验，并用尽可能的高速摄影技术拍下冲击破碎过程。用分维数表征断裂表面和碎片表面的结构更有助于工程师们了解粉碎过程中材料破裂的方式。（参见 9.4 节中有关粉碎（Pulverization）过程中能量守恒

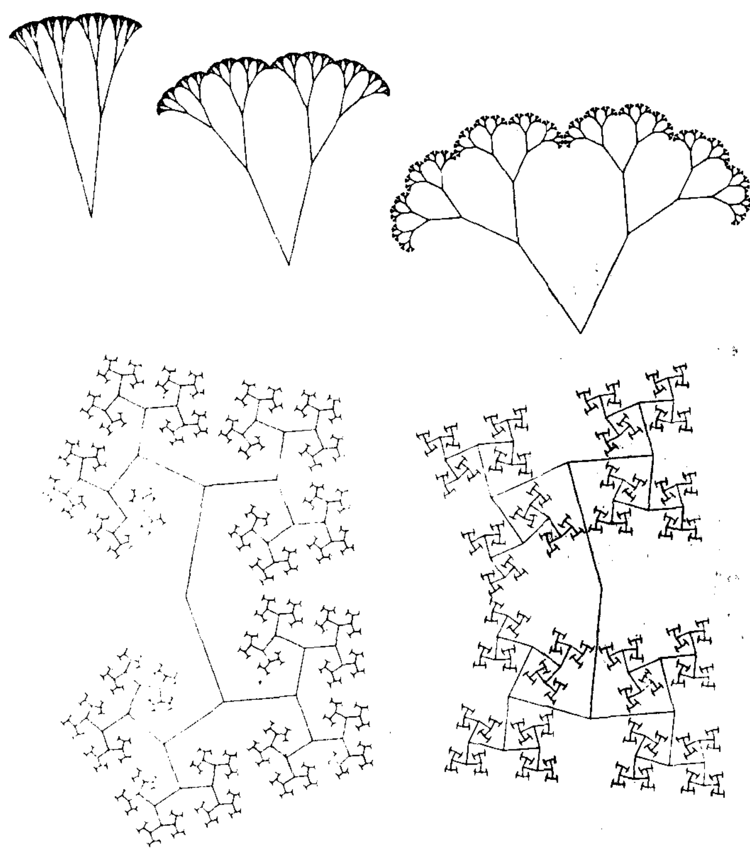


图 9.8　由 Mandelbrot 模拟的分支分形结构，看起来象正在扩展的不同类型的裂纹

的讨论。Pulverize 这个词来自拉丁语字 Pulver，意思是变成粉末。本书中粉碎处理用于描述任何尺寸减小的处理过程，如破碎或研磨处理。）

在球磨机中，当球落在需要粉碎的材料上时，在球和矿石之间传输以进行粉碎过程的大部分能量可能都用于冲击作用，而不是挤压作用。众所周知，在磨矿过程中，粉碎效率趋于降低，因为碎成的微粒在球磨机中不但起缓冲作用，减缓了球的落下速度，而且还降低了大块碎片间的碰撞冲击效率。

至于受压物体内的裂纹扩展方式，我们可用第 5 章和第 6 章的渗滤理论予以模拟[23]。为简单起见，有关用渗滤理论建立碎裂模型的讨论，在本书中将主要限制在 2 维空间的情况。在一个能模拟受压物体内裂纹扩展的模型中，我们可以假定裂纹是在物体内的随机位置处随机生长的。这样，我们可以想象如果以一个随机数表表示 2 维空间的岩石模型，我们可让表中所有数值为 5 的地方代表裂纹的起始点，然后再让每一个裂纹在 2 维平面上从起始点处向随机方向扩展。用这样的模型，当从这些起始点发出的裂纹经随机扩展而连通时，整个物体就破碎了。有关这类模拟方法的全部讨论已超出本书的范围，但为说明方便起见，让我们考虑图 9.9（a）所示的模型。在该模型中假定渗滤过程一直进行到画面中 60%的象素点已经连通为止。在这样的裂纹扩展模型中，被占据的象素点不再代表有效体积，它们只表示裂纹可以经过该点。对这类模型，对角相接的象素点可能构成一条可行的路径。应该注意的是，该模型没有给出象素点内部裂纹位置的信息。

为对上述模型产生的碎片有某种认识，图 9.9（c）中给出了由完全贯通的裂纹产生

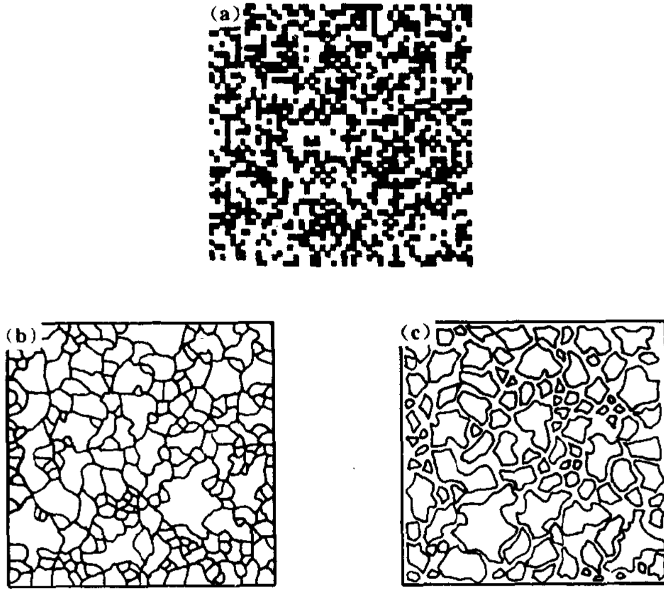


图 9.9 在一个简单的渗滤模型中，可认为断裂是由未受力的物体上原来随机分布的裂纹向外扩展而引起的。(a) 裂纹藉以扩展的随机分布的原始裂纹（令随机数表中的数值 5 表示裂纹中心）；(b) 一种裂纹扩展模型产生的完整的裂纹图案，该模型允许裂纹从每个初始位置向外扩展；(c) 由 (b) 中的破裂模型得到的碎片

的碎片，可看出它们是彼此分离的。（边缘规则的碎片在图 9.9 (b) 中没有给出，因为我们无法知道该岩石模型以外区域裂纹的扩展情况，从而不能确定这种碎片的真实尺寸）。一些研究工作者已提出各种模型模拟裂纹的扩展情况，这些模型都运用了渗滤理论并考虑了不同的材料强度参数，对此感兴趣的读者可在参考文献[23~28]中发现更多的信息。一个分形断裂模型可包括不同的复杂因素。例如在图 9.10 中我们看到的是有一个更先进的断裂模型和应变模型产生得出的结构，它是由 Louis 等人在计算机上实现的[27]。Mandelbrot 博士建议使用另一个他称之为“曲折系统”(Squig System) 的分形系统作为预测破碎动力学过程的模型。图 9.11 中（见本书前边彩图 7）所示的就是一个典型的“曲折系统”结构，它与布满裂纹物体的相似之处是显而易见的。有兴趣的读者不妨在断裂空间“曲折”走一回，以发掘“曲折系统”在断裂动力学研究中的潜力[29,30]。

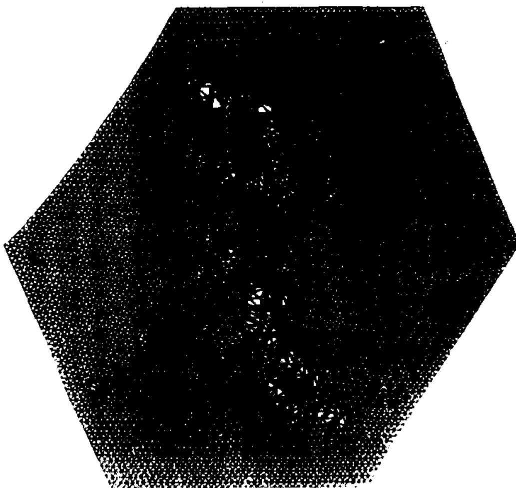


图 9.10 根据分形几何进行断裂动力学空间的高级计算机模拟可产生一些很真实的碎裂模型[27]

9.3 碎裂分形——描述碎裂系统的一个新的分维数

图9.12所示是Cross博士拍摄的另一个高速摄影照片，它显示出不同类型的碎裂过程。这里，一个钢球射出并穿透一块小的酚醛塑料板，球击到塑料板时的速度是200m/s。拍摄时，钢球已穿透塑料板并前行了一段可测量的距离。钢球的直径是4.5mm，可清楚地看到它在板的左边。无论在图9.7或是在图9.12的碎裂过程中，工程师们关心的问题显然是碎片的尺寸分布。如果不注明的话，图9.12中的碎片轮廓很可能被误认为是一群小岛。这就提示我们，用来描述群岛结构的分形几何方法也可用以描述一片碎开的板的破裂状态。

地理学家常观察群岛的结构并试图用数据关系来描述小岛的尺寸分布。图9.13（a）所示是随机排列的一群岛屿——爱琴岛，英语中的“群岛”（archipelago）一词即源于此（注意 archipelago 一词的实际含意是“最重要的海”，原来是指岛屿周围的海而不是一串岛屿）。我们已经知道一个岛屿的海岸线的无限长的，但从研究过的Koch岛得知，岛屿的面积却是有限的。Mandelbrot 指出小岛的表面积本身就是一个分形结构并且是不确定的。而只有他所谓的岛屿的测绘面积（map area）或投影面积（projected area）才是确定的。1938年Korcak提出世界上的所有岛屿都可用一个数值关系式来描述[31]。他在实验中发现如果在双对数坐标下绘图，以横坐标表示岛屿的面积A，纵坐标为面积大于或等于A的小岛个数N，那么就会得到一条线性关系。图9.13(b)正是爱琴岛的这种关系曲线。Korcak 进一步指出，该曲线的斜率对所有岛屿来说都是0.5，写成数学关系式就是

$$N_R(A \geqslant a) = F'a^{-B}$$

这里A为给定尺寸小岛的面积；a为小岛的可分辨面积；

N为岛屿的个数；F'和B为常数。

Mandelbrot 告诉我们，当他第一次阅读Korcak的科学文献时，他发现“所有小岛的数据曲线的斜率是相同的”这一结论是难以让人信服的。在Mandelbrot的书中，他批评了Korcak的原始工作，并指出，有关数据曲线斜率的论断是没有根据的，事实上上述方程中的B值是随岛屿而变化的，而且始终大于0.5。Mandelbrot 随后从数学的角度证明，人们可以定义一个新型的分维数来描述一组碎片。由于随后将会看到的原因，我们称这个新的分维数为碎裂分维数（一组碎片尺寸分布的测量）。

为理解Mandelbrot在分散系统碎裂分形结构中运用的数学理论，我们可考查一下图9.14中的草图，从该图可以看到构造一系列小岛的方法。为构成一个简单的岛屿体系，我们从一个正方形（岛）开始，先把它的上边界8等分，再在离开海岸的地方加上一个周长与原始正方形边长相等的小正方形，如图9.14（a）。我们把这种构成方式叫做岛生成算法（Island generator algorithm）。如果在母岛周围按照这样的方法继续构造，我们就得到一个母岛及其周围的四个卫星小岛，如图9.14（a）所示。重复上述过程，则得到由主岛及其周围的四个大岛和48个小岛组成的群岛。这一过程可以无限次重复下去，而产生一个具有无穷多个小岛的群岛系统。对于这样一个系统来说，按Korcak关系式，在双对数坐标下绘出的大于或等于某一确定面积的小岛个数与小岛面积的关系曲线如图9.14

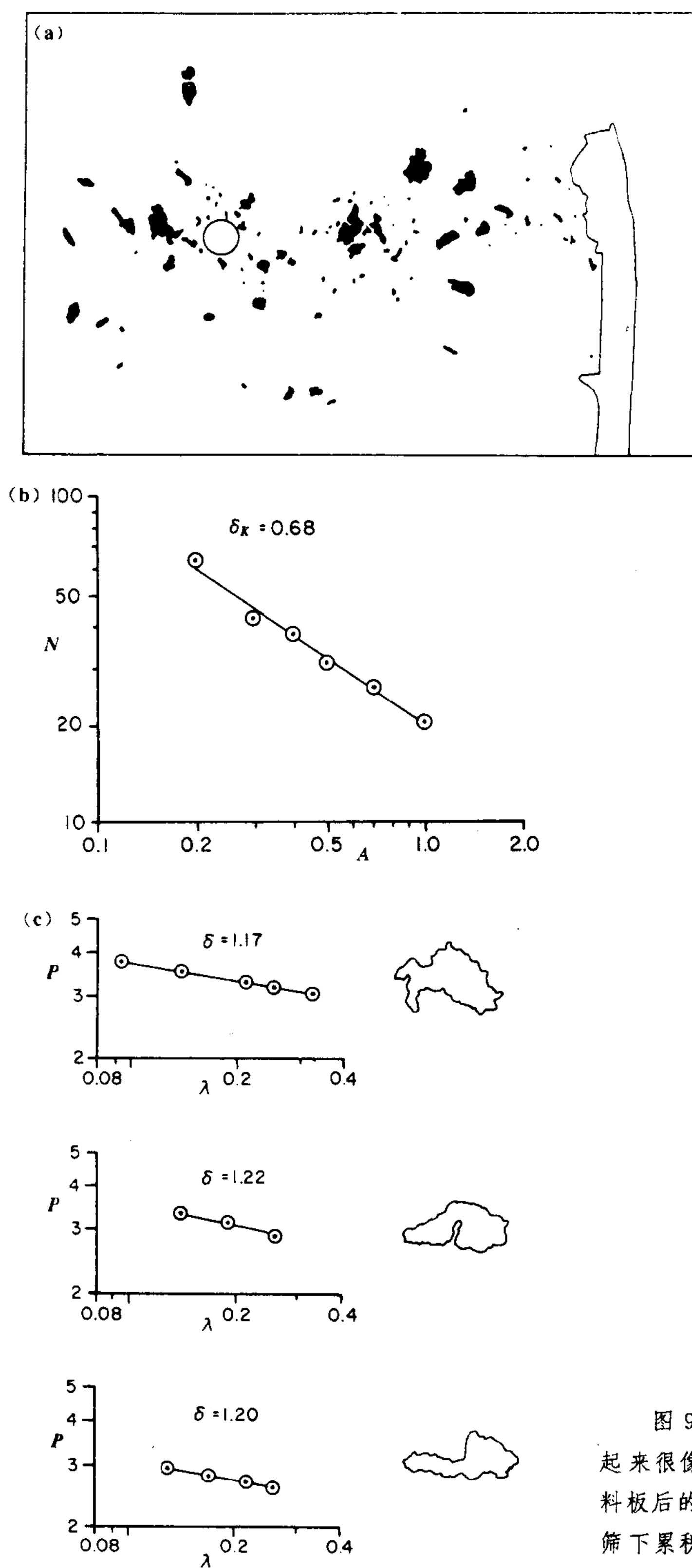


图 9.12 高速破碎过程产生的碎片看起来很像海中的岛屿。(a) 铜球穿透酚醛塑料板后的高速摄影照片；(b) 斜率为 0.68 的筛下累积粒度分布曲线；(c) 三个大碎片的分维数分别为 1.17，1.22 和 1.20

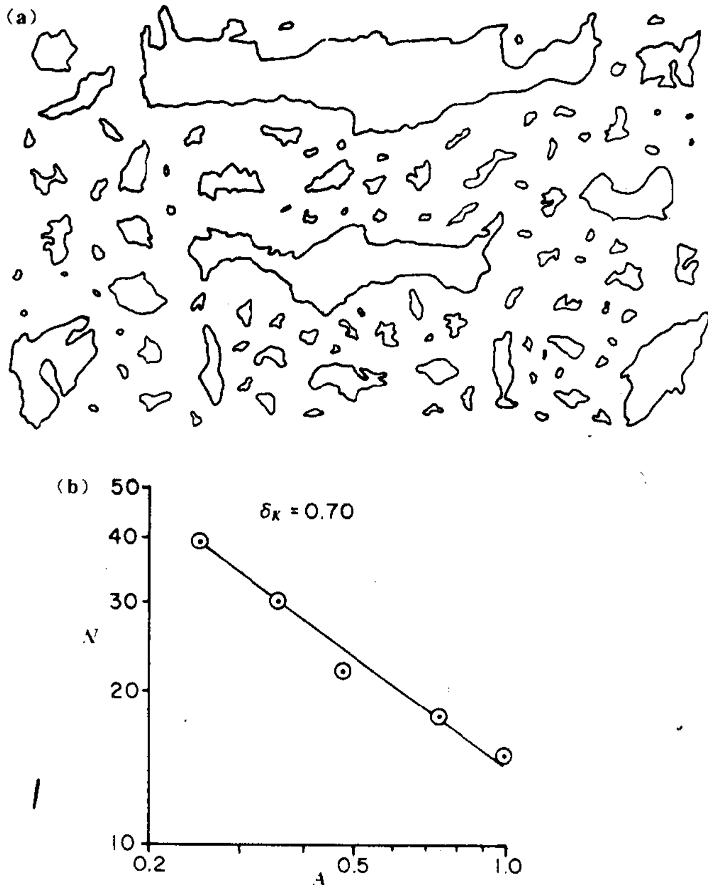


图 9.13　爱琴岛岛屿大小分布数据曲线与 Korcak 提出的分布模型类似。(a) 爱琴岛的随机岛屿阵列；(b) 岛屿大小分布的双对数曲线；N 为面积大于或等于 A 的小岛个数；A 为小岛的测绘面积（或小岛的投影面积）

(b) 所示。定义小岛大小的方法之一是将小岛的有效直径看成是面积平方根的某个常数因子。Mandelbrot 用符号 λ 表示小岛的长度或直径。

应该指出，我们可以用图 9.14 中的一系列小岛，在空间随机组合使之具有统计自相似性。这样岛的平均分布函数仍然符合同一关系式，因为 Korcak 曲线与群岛中单个岛屿的空间位置无关；而且当我们把这些小岛的形状改变为除分形结构以外的其它欧几里得形状，或任何不规则的形状时，它们仍然应该满足同一 Korcak 关系式。从图 9.14 提供的信息中可以看出，Korcak 关系式告诉我们的信息只与碎片有关，而不包括单个岛屿位置及结构。所绘出的数据曲线的斜率依赖于采用什么样的数学生成方法把原始图形变为一系列小岛。在 Mandelbrot 那本书的第 2 版中，曾给出了通过修改这些数学生成方法而产生的一些不同的岛屿系统。

Mandelbrot 证明，群岛中有效直径大于或等于 λ 的岛的数目 $N_R(\Lambda \geqslant \lambda)$ 与 λ 的关系满足下面的简单方程

$$N_R(\Lambda \geqslant \lambda) = F\lambda^{-\delta}$$

这里 δ 是小岛轮廓的分维数；F 为常数。Mandelbrot 进而证明，该方程中的指数 δ 和较前提到的关于面积尺寸分布方程中的指数 B 满足关系式 $B = \delta/2$。Mandelbrot 告诉我们从测量结果可知，地球上岛屿轮廓的平均分维数大概是 1.2 左右。他还指出如果我们能画出整个地球上的全部岛屿的面积分布，那么将求得 B 的值大概是 0.6 左右，因此地

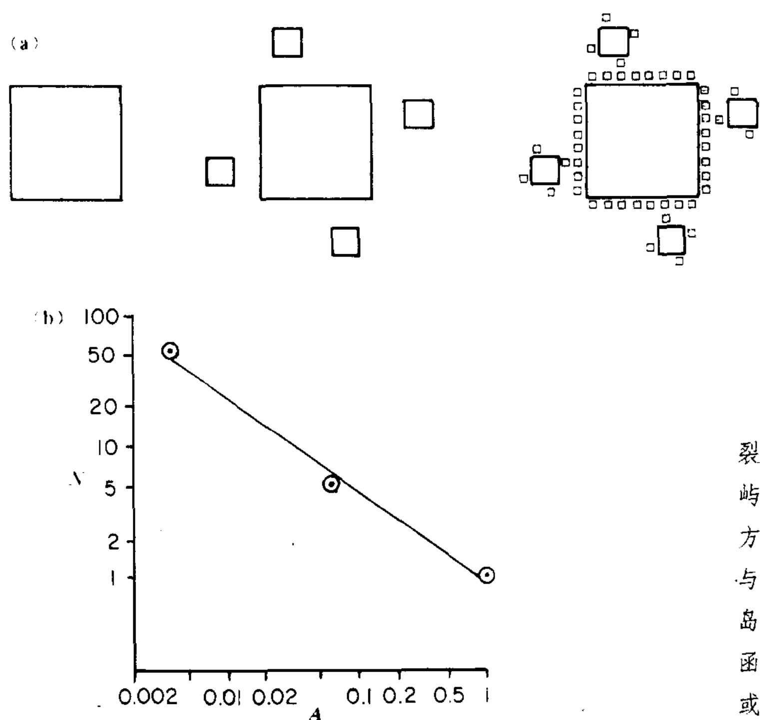


图 9.14 构造碎裂分维数为 4/3 的岛屿系统的 Mandelbrot 方法。(a) 一级、二级与三级岛屿系统；(b) 岛屿系统的大小分布函数；N 为面积大于或等于 A 的小岛个数；A 为小岛的面积

球上的岛屿确实适合 $B=\delta/2$ 的关系。Mandelbrot 还讨论了海岸线——岛屿生成程序的

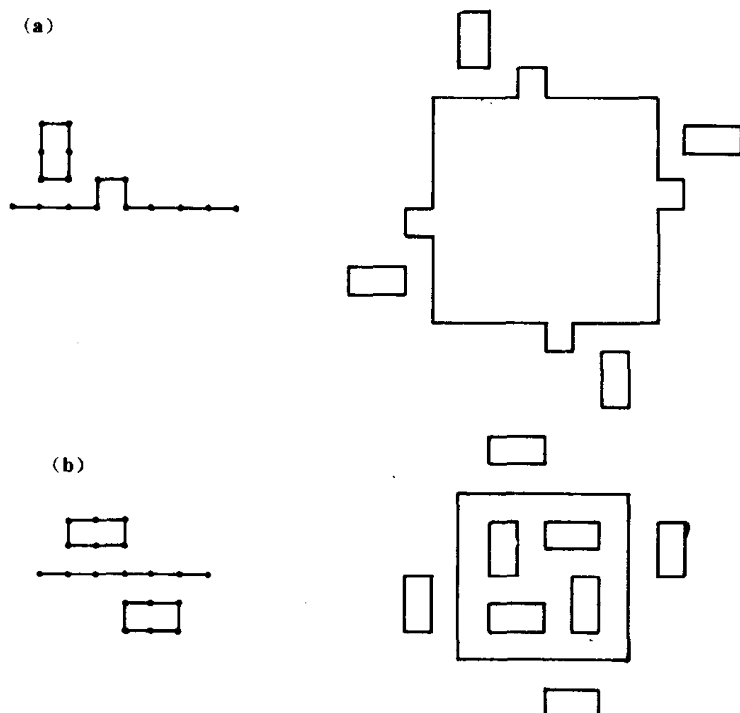


图 9.15 构造具有分形边界且岛中有湖的岛屿系统的 Mandelbrot 方法。(a) 具有分形边界的岛屿系统的构造方法以及该法所生成的第一级岛屿系统；(b) Mandelbrot 提出的一个可生成含湖岛屿的典型结构，基本构造方法及生成的第一级含湖岛屿系统

作用，这里小岛本身要求具有分形结构。图 9.15 所示为Mandelbrot 讨论过的一种碎裂分形的生成程序以及可生成含湖小岛的构成方法。应该强调的是，海岸线的分维数表现的是单个小岛的特性（轮廓的曲折程度——译者注）。而从 Korcak 曲线得到的碎裂分维数表现的是一群小岛的性质（群岛的尺寸分布特征——译者注）。

从上述讨论中可知，有关群岛测绘面积分布的实验研究可提供有关岛屿特征结构的信息并可能揭示小岛的形成机制。

现在我们可以作一次有趣的跳跃，从一个技术领域转移到另一个技术领域中来。看来有理由假定，一般情况下有关小岛数量分布的推论同样也适合于岩石碎片的数量分布。这种“跳跃”从直观上来说是受图 9.12 和图 9.13 的启发。因此由一系列碎片在适当的尺寸参数下绘出的 Korcak 曲线的斜率也可用来描述岩石粉碎的方式。由碎片尺寸分布得出的分维数称作 Korcak 分维数或碎裂分维数。在描述几何图形时，我使用 Korcak 分维数这一术语，但在观察碎片时，我将使用碎裂分维数。图 9.12 (b) 所示是钢球穿过酚醛树脂板产生的碎片的尺寸分布，可以看出尺寸分布函数是一条斜率为 -0.68 的直线。实际上没有足够的数据让我们得以考查斜率是否为 $\delta/2$(这里 δ 是碎片曲折边界的分维数)，但有趣的是我们注意到了图中三个表现出分形结构的较大碎片的“海岸线”分维数分别是 1.22、1.20、1.17。如果读者原谅我使用双关语，那么上述这些碎片似的事实(作者意指事实尚不充分——译者注)暗示我们值得去进一步研究存在于碎片轮廓的曲折程度与一组碎片碎裂分维数间的关系，而这些碎片尺寸的数据曲线可用一个定标函数(scaling function) 来描述。

北卡罗来纳州立大学的 Russ 博士在其私人信件中指出，如果将碎片镶嵌到树脂中再进行剖切所得到的剖面轮廓线的分形结构会变得明显起来，因为在提取碎片的剖面轮廓时，它的形貌特征会相互重叠。正是这种剖面轮廓的分维数可能把碎片分布的 Korcak 分维数和微粒碎片分维数(作者这里所指的可能是象图 9.12 所示的那种碎片最大轮廓线的分维数，由于最大轮廓线上没有轮廓特征的重叠现象，故其分维数可能较小——译者注) 有机地联系起来。基于这些考虑，我们所研究过的那三个碎片的分维数值 1.22 可能小于由剖面轮廓线所求得的边界分维数。这暗示我们图 9.12 中的部分证据很可能表明在轮廓线的分维数和碎片尺寸分布之间确实存在某种关系。

从事矿物处理的研究人员已花费很大力气建立数学关系式以表征在粉碎过程中产生的碎片的粒度分布[32]。这些数学关系式中，有些是关于累积粒度分布数据的双对数曲线的，这种曲线与图 9.12 和图 9.13 所给出的极为相似。

有时侯，由于实验中缺少准确的数据，以及（或者）由于绘函数曲线时所用的数据标度不够敏感，因而区分分布函数十分困难。一些在粉碎过程中测得的分布函数的实验数据可能需要重新解释，而 Korcak 曲线则可用于估算碎裂分维数，该分维数可描述任何特定粉碎设备里的粉碎过程。如果在一个粉碎过程中碎片边界的分维数和粒度分布满足所建议的数学关系，我们就会看到一种有趣的可能性，那就是粉碎过程中产生的碎片其投影轮廓线的分维数可能直接地与通过 Korcak 曲线所得的碎裂分维数联系起来。这一可能性本身将使人们可根据碎片投影轮廓现的分维数推测矿石的碎裂行为，或者可以使工程技术人员根据测得的分布函数估算碎片表面的分形结构。很明显，要使这种解释粉碎研究时所得的粒度分布数据的革命性方法建立在可靠的基础上，需要我们深入研究许多单块矿石的碎裂行为。研究类似的矿石在压力或冲击力作用下碎裂后的粒度分布函数也是十分有趣的。考虑到一道在矿石中扩展的裂纹产生某一特定的碎片边界这一事实、再考虑到全部碎裂过程包含具有相同动力学结构的大量裂纹的交互作用，如果认为矿石破

碎时的碎裂类型与单个碎片的分形边界结构有关，则不大可能是没有根据的。换句话说，碎片的形貌和粒度分布两者都明显地反映出整体结构破裂时裂纹扩展的动力学过程，而且两者本身也是相互关联的。

Sierpinski 分形和碎裂分形是描述基质中分散粒子系统的两种互补的方法。Sierpinski 分形侧重表现微粒充填有效空间的方式，而碎裂分形或 Korcak 分形则集中表现分散系统中各元素的结构。

9.4 分形几何和矿业中的新观念

9.4.1 粉尘爆炸

许多矿山所遇到的一个重要问题是来自工作区的粉尘和气体引起的爆炸。粉尘爆炸在许多不同工业中是一个实际危害。当我在芝加哥工作时，我曾参与解决两个有关爆炸危险的问题，即为什么糖厂和馅饼厂会发生灾难性的爆炸。我的同事和我发现糖厂的事故是由于一个工人错误地用钗车卸下糖粉，钗车产生的火花诱发了糖粉粉尘的爆炸。那家馅饼厂的情况则是当工人们把奶酪粉从生产地点用鼓风机吹向另一地方以喷洒在馅饼上时，传送装置上静电荷产生的火花诱发了工厂的爆炸。无独有偶，在我的家乡英格兰 Hull 城，一次最大的工业爆炸发生在一个可可加工厂，这次爆炸把工厂的一堵墙完全炸踢了。我认为奶酪粉和可可碎片的分形结构在考察这些粉尘的爆炸所产生的危险时一定是重要的因素。尽管我们的讨论只是从分形几何的角度理解矿业中粉末结构的物理性质，但这里提供的许多信息对更好地阐明粮食、食品及许多其它工业中的爆炸危险也有意义。

为弄清粉尘爆炸的机制，我们考察图 9.16 所示的一个微粒阵列。这些微粒可以是煤粉、面粉或是奶酪粉。粉尘爆炸的一个前提是来自粉尘中第一个热源的辐射热必须把它周围的微粒加热到它们的燃点。许多人对一个物体燃烧前需变得很热缺乏认识，例如他们不清楚点燃其它物体的火柴的火焰具有很高的温度。火柴之所以能点燃物体，是因为火焰的热量使被点燃物体的局部温度达到了燃点。由于人们可以用湿手指掐灭火柴，因此普通人认为火柴的火焰温度不高，其实，他们把一个物体放出的热量和它的温度混淆了。

同样的情况也发生在电致危害的评价中。一个人在干冷的天气里在一个建筑物周围走动时产生的电压大约是 30kV，正是这个电压使人走近金属书架取书时会产生火花。此时电压很高而电量很少，因此，虽然火花可能会吓人一跳，但这种特殊的高压源通常对人无害。然而要注意带有高电压的外科医生通过手术刀产生的火花会引起患者的一些不良反应。另一方面，一个低电压放出的强电流所具有的能量却会致人于死地。正在冷凝的气体可引起严重的烧伤，但它不是由温度引起的，而是由冷凝成水时所放出的大量的热量造成的。而燃烧的火柴虽然温度很高但放出的热量却很少。

现在让我们回到雾状粉尘上来。我们假定粉尘烟雾的中心有一个正在燃烧的煤粒，它正向周围的粉尘微粒辐射热量。如果这些粉尘粒子是表面光滑的，那么由于反射的缘故它们只吸收有限的能量。辐射出的能量在周围的粒子之间反射并向外扩散，如图 9.16 所示的那样。工程技术人员降低煤尘爆炸危险的方法之一是沿着矿井的运煤路线喷射石块

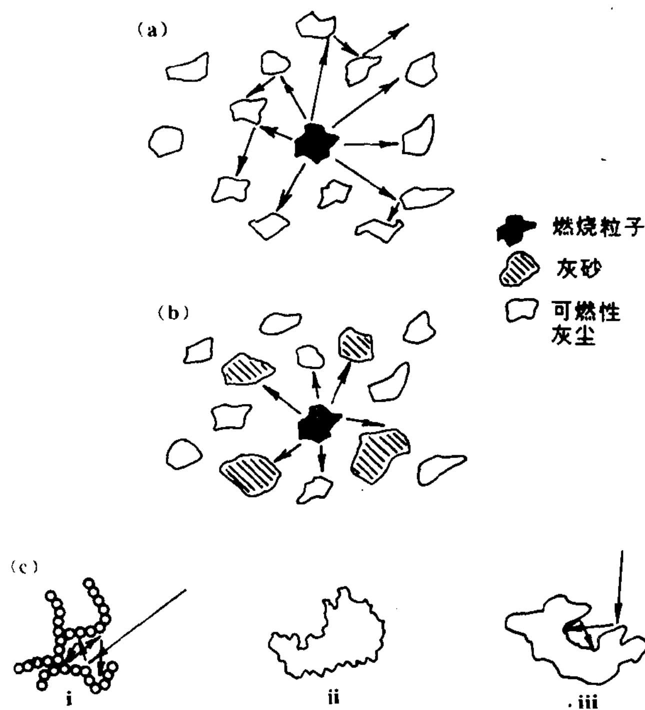


图 9.16 在估计爆炸粉尘的危险性时，爆炸粉尘中的辐射能量吸收率是一个重要因素。(a) 当来自燃烧粒子的辐射能量把相邻的微粒加热到燃点时会发生引起爆炸的链式反应；(b) 降低爆炸粉尘危险性的一种方法是在这种爆炸粉尘中散布石块粉尘，这些石块粉尘吸收辐射出的能量可阻止有爆炸危险的粉尘整体温度的升高；(c) 可燃物料中具有分形结构的粉尘很可能是粉尘爆炸的触发器，因为它能更有效地吸收辐射能。因此，具有小质量、大表面积的油烟粒子（其结构可吸收大量辐射热量）受到热辐射时会迅速升温

粉尘。这些粉尘需细小到足以由运动的矿车使它们悬浮到空气中，但又不能太小以免导致矿工的吸入伤害。当这些石块粉尘与煤尘混合悬浮在空气中时（如图 9.16 (b) 所示），一些辐射能量将被这些相对较大的、不燃烧的石块粉粒所吸收。这就“抢走”了煤尘粒子的能量，从而使周围的煤尘无法达到燃烧温度。

如果悬浮在烟雾中的潜在的爆炸粉尘具有分形结构，那么一个这样的粒子吸收的辐射能量将远远高于具有平滑表面的粉尘粒子。这样，假若一些烟灰微粒偶然混入普通的煤尘中，那么从一个着火的微粒发出的能量就会被这些烟灰有效地吸收。吸收了能量的烟灰则会很快燃烧并辐射出热量从而导致一系列灾难性的爆炸。粉尘的粗糙表面的分维数或整个粉尘的结构分形将决定辐射能量的吸收率。任何有关可爆炸粉尘（这些粉尘具有分形结构）潜在危害的研究，都应描述微粒结构和织构上的分形特征。过去，与粉尘结构和织构有关的爆炸危险系数很难定量给出；而今，联系粉尘物理结构和辐射能量吸收率的分维数这一参数的出现，为危险粉尘的定量表征带来了希望。

9.4.2 粉碎过程中的能量效率

致力于粉末生产的工程师，尤其是矿业工程师们显然对输入到粉碎装置中的能量的效率感兴趣。测量粉碎装置能量效率的最基本方法是考察大块岩石被粉碎成碎片时产生并储存于新形成表面中的能量。近年来，不同的研究人员提出了一些通过测量碎片表面积估算粉碎过程中能量效率的理论。在图 9.17 中，根据 Kelly 和 Spottiswood 提供的数据，用图示法总结了关于输入能量和新形成表面间的各种数学关系[19]，这些关系式常常是有争论的。例如破碎和磨矿领域的专家 Austin 在关于破碎领域最新进展的评述中指出：

“粒度减小过程损耗的能量与新形成的表面积成比例关系这一 Rittinger 法则没有任

何正确的理论基础”[32]。

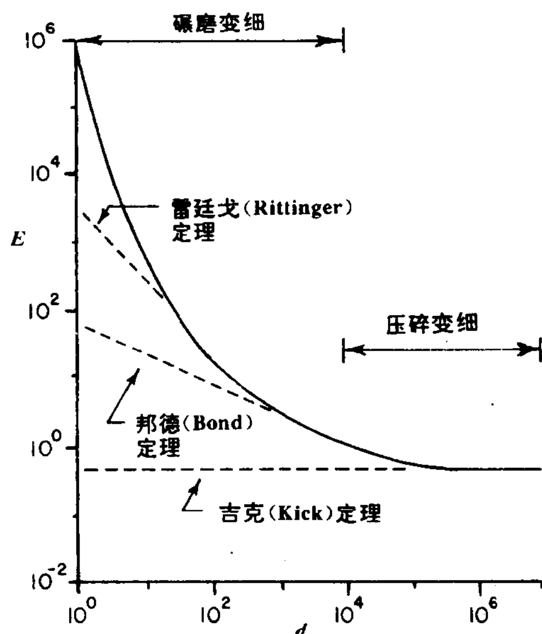


图 9.17　50 年来，研究粉碎过程的专家提出了一些关于粉碎过程中输入的能量与生成碎片的平均尺寸的可能关系[19]

当向那些不熟悉矿业中的减粒过程的科学家介绍能量效率时，他们常常吃惊地发现总体上来说破碎过程的能量利用率是很低的。在此，让我们再次引用 Austin 的评论：

“在球磨机中的实验表明，输入到球磨机中的电能只有很少一部分（小于 1%）用于直接磨碎样品，这一比例甚至小于实验中的检验误差。”

矿业工程师已经意识到，在建立输入能量与新形成表面能之间关系式时所面临的基本问题之一，是准确地测量粉碎过程所产生的粉末的微细程度。在估算能量转化率时遇到的另一问题是，并非全部转化的能量都存在于新产生的表面之中。而常常是碎片本身内部的裂纹和扭曲的晶体结构吸收了大量的能量，这些能量在粒子老化时才能放出来(新产生的粉末往往比老化的粉末具有高得多的化学活性，因为前者储存有应变能)。

然而，有关粉碎装置中输入能量与生成表面能之间不同关系的争论，实质上是关于表征碎片表面积时所产生的随机误差和系统误差的争论。大多数表征碎片表面积的方法都得不到绝对准确的数据，因此多数基于给定粉碎机和岩石类型以及特定表面测量装置的研究所得到的数据只具有相对意义。

尽管在表征表面积的测量方法上以及新表面组成的确切定义上存在不确定性，从而给定量表示粉碎装置的能量效率带来了严峻的困难，但本章中从分形几何的角度对有关粉碎过程的讨论表明，从粉碎过程生成的表面出发定量研究粉碎装置的能量效率时，所遇到的一个更为严峻的问题将是碎片粗糙表面的不确定性。从本质上来说，具有分形结构的碎片表面积是无穷大的，因此人们就会得出所有在粉碎过程中输入的能量是一定的，粉碎机的效率也是无穷大的这一结论。作为对实际现象的描述，这一结论显然是荒谬的。与此相似的是物理学中曾出现的黑洞危机，当物理学家们从可信的准确理论出发研究黑体辐射时，确得出了奇怪的结论，即所有可辐射能量的热源应该瞬间辐射出无穷的能量(黑体辐射体是现存最有效的辐射能量的吸收体和发射体，参见第 10 章的讨论)。当时的

物理学家对这个荒谬的结论非常困惑。起初，他们不愿承认这是由于他们未能理解能量世界的基本结构而带来的问题。由于不能预测来自黑体的能量辐射，物理学家们只好重新定义了能量的基本性质。他们不情愿地得出了这样的结论，即能量并不是无限可分的，而是存在某一个基本单位，这就是所谓的“量子”。由于这次关于能量结构和性质的重新定义，物理学家才得以在物理学中开辟了一个现在称之为“量子理论”的新领域。这种哲学意义上的僵局最终变成了通向新机遇的大门。与此相同，矿业工程师可能也会不情愿地发现，由于忽略了这类哲学问题，而使他们根据表面能测量粉碎机械能量效率的努力走进了死胡同。从分形几何的角度来看，这些矿业工程师们正在追逐分形中的“幻影”，因为在这里“表面积”这一概念已经被证实为不确定的了。但是，从长远来看或许对粉末表面积不确定性的认识将把矿业工程师的注意力重新集中到这方面的研究上来，以使他们在下一个十年中取得丰硕成果，就像量子物理学家所起的作用那样。

通过考察 Mandelbrot 有关描述群岛结构的 Korcak 关系的讨论，我们也许可以揭示将来粉碎研究的方向。当谈到群岛中岛屿的数目时，在“一次乏味的消遣”(“an innocuous diversion”，见 Mandelbrot 书的第 2 版，119 页）的标题下，Mandelbrot 非正式地指出，从实际应用的角度来看，任何群岛的岛屿数目总是无限的。当我读完这段特殊的陈述后，我重新审视了一下 Laurentian 大学所在处 Ramsey 湖中的岛屿。从我办公室的窗户望去，可以看到湖湾中的一些大岛；当我走向湖边时，能看见更多的小岛；来到湖岸线，则很难确定远方那些露出水面的圆石是不是岛屿。在我所站的湖岸线附近我数到了一百多个这种不确定的“岛屿”，我发现即使是在一个湖中，小岛的数目也是无限的。同时，对 Ramsey 湖的关察使我认识到小岛数目的无限性是和“小岛”的定义有关的。除非人们对小岛的组成有了确切的定义，否则“Ramsey 湖包含多少岛屿?”这一看似明确的问题不会有明确的答案。Mandelbrot 继续指出，从群岛中总有无数岛屿存在这一事实来看，整个群岛的海岸线长度也是无限的，因此最大岛屿的海岸线和无数小岛的海岸线相比是微不足道的。我们只要把 Mandelbrot 书中的“岛屿”一词改为“碎片”，那么，Mandelbrot 的陈述对矿业工程师来说也是恰当的。因此，从分形几何的角度来说，岩石碎片投影出的周长和表面积是无限的，这样全部碎片的表面积也是无限的。可测量的较大碎片的表面积与全部碎片的表面积相比是可以忽略的。

在 Laurentian 大学，我们最近完成了一项有关岩芯在压力下碎裂的研究。当我阅读 Mandelbrot 关于小岛海岸线不确定性的评述文章时，我回想起在我们的实验中，当岩石在压力下断裂时，有一种像一团烟的东西从粉碎的岩石中逸出。尽管我们很仔细地收集了破碎的岩石碎片以研究其破碎过程，但从我们的实验中跑出的那些很细的粉尘带走的表面积可能比收集到的碎片的表面积还要大。无法收集到这种很细小的粉尘，是从表面积推测粉碎机能量效率研究中的一个普遍情况。工程师收集到的那些用于研究的碎片表面积可能只是从他们的实验中产生的所有表面积中可忽略的一部分。

Mandelbrot 提出的用于描述群岛的关系式暗示矿业工程师们应注意考察用 Korcak 曲线，也就是碎裂分形，去表征给定过程中获得的碎片。从分形几何的观点来看，显而易见，如果工程师希望估算出粉碎过程中所消耗的能量，那么他必须直接测量出工作时没有用于产生碎片的那部分能量。例如，在图 9.6 简要讨论的冲击筒实验中，如果人们

测量出冲击前瞬间射体的初始速度（这可让射体截断两束激光来测得），即可计算出射体的动能。我们可以让破碎过程中产生的全部碎片沿柱筒运动并撞击在一个屏上而落入液体筒中，然后确定碎片的温度比冲击前高出多少。通过这些计算，我们可以知道有多少能量用于破碎，而另有多少能量变成了热能。在这种装置中温度的升高可能是相当明显的。据说，用标准的高尔夫球棍击球时，由于击打时的能量不会完全转化为球的动能，因此球的温度将升高 1°F。

在岩石碎裂过程中，释放出一些声能，甚至还会放出由碰撞产生的光能，总的来说，射体所带的大部分能量将在碰撞过程中或者变为储存在碎片表面的表面能，或者转化为热能。随着时间的推移，我们可以期待，进行粉碎过程研究时，人们会把精力集中到在射体（其携带能量使物体破碎）和被破碎物体之间配置更好的能量转换器上来。

破碎分形很可能对粉碎后产物的测量十分有用，因为工程师常常对生成新表面并不特别关注，而是对获得的有用碎片十分感兴趣。例如，如果粉碎矿物是进行微生物浸出处理的第一步过程，那么工程师们希望能够把矿业粉碎成粒度相对接近的碎片，这些碎片有足够的裂隙使细菌进入其内部而最终浸出有价矿物。对微生物采矿感兴趣的工程师肯定不希望得到带有很多粉尘的较大碎片，因为较大的碎片内部含有很多细菌不能接近的物质，而很细的粉尘又容易被细菌吞噬，从而破碎时所消耗的能量无以补偿。Englman 等曾讨论过从事以色列南部油页岩研究的工程师们所希望的一类破碎过程[26]。他们指出，工程师们即不喜欢大块的岩石，因为它们难于处理，也不喜欢太细小的岩石，因为它们不利于提油设备从页岩中提取石油的正常工作。Englman 等描述了一组以色列工人是如何把目标放在设计一种新型的岩石爆破方法上的，这种方法产生的岩石更容易进行后续的破碎处理。这种有目的的岩石破碎方法将是一个潜在的重要领域。

9.5　关于分形结构和复合材料断裂阻力的创造性构想

起初，粉末加入塑料中是为了降低产品成本，因为粉末（碳酸钙粉末）比塑料便宜，但不久就发现加入碳酸钙增加了塑料的强度。我们现在已经知道，这种强度上的增加来自于这样一个事实：当一个要穿透塑料的裂纹碰到粉末粒子时，能量将受到消散，因为粉末粒子可以使裂纹的方向发生转移。在石灰石与塑料的界面开裂时，裂纹能量消散的过程示于图 9.18。关于坚固材料的新科学一书中，Gordon 博士回顾了向不结实材料中填加纤维以增加断裂阻力和有效强度的发展史[20]。这篇综述以讨论古埃及人为何向泥砖（这种泥砖靠阳光晒干）中加入稻草作为开头。他也回顾了 1906 年由 Backeland 博士发明的第一个成功的商品塑料——Bakelite 材料的历史。Gordon 博士告诉我们，当 Backeland 注意到在硬化处理前向树脂原料中加入木纤维可以增加强度和硬度时，Bakelite 材料商业化开发转折点才得以出现。Gordon 博士没有告诉我们 Backeland 为什么要考察往塑料中加木头屑（碾碎的锯末）的作用。很可能，发明者想用这种充填剂来降低产品的成本。Backeland 博士机敏地注意到，加入的木屑在降低了成本的同时也改善了该材料的机械性能。Gordon 博士告诉我们，开始时用户对这种“加入木纤维”的 Bakelite 材料有抵触情绪。他列举了人们提到 Bakelite 材料时是如何评论的，这些人说向材料里加木屑只是为

了便宜。接着，Gordon 博士告诉我们他是怎样向这些发牢骚的消费者解释，如果没有这些木屑，塑料的机械性能就会变差。

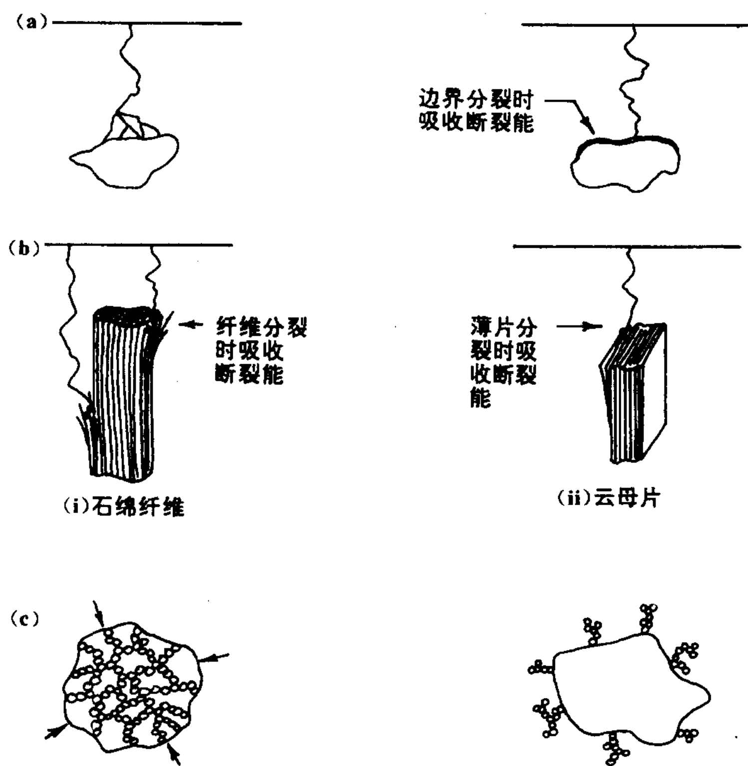


图 9.18 当裂纹在复合材料中扩展时，添加剂的分形结构可能在吸收裂纹能量方面起重要作用。(a) 当裂纹遇到复合材料中的添加剂微粒时，如果基质和添加剂微粒交界处因开裂而吸收能量，则裂纹被遏制；(b) 复合材料的添加剂，如石棉纤维和云母片可以有效地阻止裂纹，因为添加剂遇到裂纹时，其次级结构将发生散裂；(c) 被混到塑料中的具有分形结构的碎片内部可能会残留一些空气，这样会使添加剂具有一定的压缩弹性，再加上其巨大的表面积，从而使得添加剂能更有效地吸收裂纹的能量。

通过在粉碎后的石灰石类添加剂表面涂上一层具有分形结构的硅胶流动剂，可增强这种添加剂的性能，因为它可以弱化塑料和添加剂间的键结合力并且靠它自身的分形表面吸收可观的裂纹能量

在谈到充填剂纤维（如玻璃纤维）如何增强复合材料的强度时，Gordon 博士写道：

“假设某一裂纹在树脂中扩展，那么它将很快地遇到一根纤维。如果这个材料是由合适的方法制得的，也就是说基质和纤维间的结合力既不太大也不太小，那么该点的纤维将不会折断，但在纤维和基质的界面上会产生裂纹，该裂纹将沿着纤维扩展以至使纤维与基质离开一段不容忽视的距离。

当树脂中的裂纹遇到纤维时，它很容易分叉，以致树脂中的裂纹数目成倍增长。当玻璃纤维物品遭受突然一击时，我们很容易看到这个过程。虽然被击区域的材料没有断裂但常常会变白，这是由从很多内部裂纹表面反射回来的光线引起的。尽管这时材料已经吸收了很多能量而形成了许多内部裂纹，但它的强度并不比以前减弱许多。”

如果读者弯一下廉价塑料制品上的某一片塑料（这种塑料很可能含有颜料粉末和象

石灰石粉末这样的填加剂)，你会注意到当你反复弯曲塑料片后，塑料片的弯曲处就会变白，这是因为裂纹能量的吸收使填加剂粒子与塑料之间开裂了。

一些权威人士建议，用玻璃纤维树脂复合材料或其它粉末填加材料制造的安全帽，在经过严重冲击后不应再第二次使用，因为该复合材料已耗尽了吸收裂纹能量的能力。当然，复合材料的结构设计和物理性质随时在变化，那些想调查玻璃纤维安全帽使用情况的人应注意参考由制造商提供的有关信息。

从上面的叙述明显可见，有关塑料和微粒填加剂界面附近裂纹的分形结构研究将是一项十分有趣的工作，它可以推测界面对能量的吸收能力（这种吸收能力与界面对裂纹能量的消耗能力有关），进而防止裂纹在材料中的进一步扩展。

Gordon 博士告诉我们，石棉纤维和云母（一种鳞状材料）作为塑料的填加剂能有效增强塑料强度的原因之一，是当裂纹遇到这种填加剂粒子时，不只是塑料和纤维的界面可以消散裂纹的能量，而且还因为石棉纤维易于分裂为子纤维，这些子纤维的相对分离也将吸收正在扩展的裂纹的能量。同样道理，塑料中的云母鳞片也会互相开裂而吸收裂纹的能量。

读完 Gordon 博士有关纤维填加剂如何作用的评述，我想到每个石棉纤维都是潜在的分形纤维，因此人们可以不断地将它分成亚纤维以至无穷，从而导致一个看似矛盾的结论，即任何个别纤维都是有无限的表面积且有一个自我包含的（Self－contained）分形系统组成。确实，在石棉纤维的加工过程中，它对健康的危害会更严重，因为它已变成了细而再细的亚纤维了。纤维加工得越细，对人体健康的危害就越大。这就是为什么生产石棉绝缘材料的工人所受的危害大于最初采得石棉纤维的矿工，而那些从失事船只上卸下石棉纤维的人和纺织工人受得危害又大于石棉绝缘材料生产者的缘故。云母片同样也是个体分形系统，因为人们可以不断地撕裂它直到产生一堆具有自相似性的鳞片粉末，理论上这堆碎末是由无数个具有无穷表面积且无限薄的碎片组成。象石棉纤维和云母片这样的分形填加剂具有极好的能量吸收能力［见图 9.18 (b)］。从这一点出发，当我推敲理想的塑料填加剂时，我的想象进入了一种创造性的思维模式（Brainstoring mode，亦称胡思乱想式--译者注)，用这种方式，我考虑了人们为什么想到用具有分形结构的填加剂加入塑料中而获得某些优越性的问题。

创造性构想（Brainstorming mode）是我 1963 年初到美国时接触的一种主意形成过程。当时，若政府就某一新领域的研究合同征求意见时，有关部门的头头就召集一帮人对该合同的标价出谋划策。这些人围坐在摆满咖啡和坚果的桌子旁开始胡思乱想。此时，人们所想到的任何事情都可以提出并进行讨论，哪怕是愚蠢的主意也是如此。集中注意力否定坏主意常常象酝酿灵感产生好主意一样富有成效。在这种会上，有时讨论开始得很缓慢，但随着各种想法的交流，讨论会逐渐热烈起来，而当产生出好主意时气氛则变得令人激动。有时由于缺少讨论的话题，有些人会提出一些不着边际的想法，这些想法在正常情况下很难引起注意。但这种被称作“九霄云外”（原文为 blue sky，译为“九霄云外”，以示其不着边际——译者注）式的想法往往能诱导出一些很有创造性的主意。下面就是几个这种“九霄云外”式的想法，这些想法是我沉迷于复合材料中加入分形填加剂的“胡思乱想”时从天而降的。

当我写这一章时，我回忆起我在工作中使用碳酸钙的情况。我发现用沉积的碳酸钙粉末填加剂加强材料的强度要好于使用磨碎的石灰石粉末。我还从在多伦多听到的一次演讲中得知，当把普通的石灰石粉末放入一种典型的塑料中时，在塑料冷却后这些粉末将处于明显的受力状态，因为塑料的扩张系数比石灰石粉末的扩张系数要大得多。塑料冷却时由于收缩而紧紧包住填加的粉末粒子，就像木匠把加热的金属圈套在做好的木头轮子上使木轮被箍紧一样。塑料中的石灰石填加剂粒子所受的压力要比大气压力大 22 倍。这样大的压力使得塑料和石灰石粒子之间的边界很是坚固，因此当边界开裂时粒子也同样会碎裂。也许由沉积形成的碳酸钙具有与碳黑相似的分形结构，从而导致下述两种物理现象。首先，当把具有分形结构的微粒掺入塑料中时，成团的填加剂粒子内部的空气不可能被完全排除掉，这使得最终复合材料内的单个微粒多少象弹簧一样吸收由于塑料冷却而产生的压力（参见图 9.18（c））。这也意味着由于结团中残存的气体而使填加剂结团与塑料的边界结合得较弱（记得 Gordon 博士曾告诉我们在玻璃纤维复合材料中纤维与树脂之间的结合力不应太大才能制得较好的复合材料）。这个不着边界的想法继而引申出一个新主意。在向铸模中加料时，人们可以在原料中加入少量的硅流动剂以加强普通石灰石粉填加剂的增强效果。硅流动剂包在石灰石粒子外面而形成一个可压缩的界面，通过弱化界面键合力而增大复合材料的强度。这比全部使用具有分形结构的硅石粉末作为塑料的填加剂要便宜（参见图 9.18（c））。

其次，即使这些想法被证明都不正确，那么几乎可以肯定的说，采用第 1 章中简要讨论过的碳黑和镍粉作填加剂会比采用简单球体作填加剂能更有效地阻止裂纹扩展，这主要是因为前者具有大得多的表面积。

研究复合材料的工程师们大概会发现，当他们试图制造未来的复合材料时，分形几何是一个强有力的工具；而且他们还会找到一些新的分形填加剂。

参考文献

[1] B.B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature," Freeman, San Francisco, 1983.

[2] E.E. Underwood and K. Banerji, "Fractals in Fractography," *Mater. Sci. Engin.*, 80 (1986) 1-14.

[3] J.J. Mecholsky and S. R. Powell, "Fractography of Ceramic and Metal Failures," ASTM Special Technical Publication, No. STP 827, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1984.

[4] J.L. Chermant and M. Coster, "Fractal Objects in Image Analysis," in "Proceedings of the International Symposium on Quantitative Metallography, Florence, 1978," pp. 125-137.

[5] B.B. Mandelbrot, D.E. Passoja, and A.J. Paullay, "Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals," Nature (London), 308 (1984) 721-722.

[6] D.E. Passoja and J.A. Pasioja, "Fourier Transform Techniques in Fracture and Fatigue," in (Eds.) L.N. Gilbertson and R.D. Zipp "Fractography and Material Science," ASTM Special Technical Publication, No. STP 733, American Society for Testing and Materials, Philadelphia,1981, pp. 355 -386.

[7] B.B. Mandelbrot, D.E. Passoja and A.J. Paullay, "Fractal Character of Fracture Surfaces of Metals," in B.B. Mandlebrot and D.E. Passoja (Eds.), "Extended Abstracts of the Meeting on Fractal Aspects of Materials: Metal and Catalyst Surfaces, Powders and Aggregates," Materials Research Society, Pittsburgh, (1984) pp. 7-9.

[8] K.S. Feinberg, "Establishment of Fractal Dimensions for Brittle Fracture Sur-faces," Senior Thesis, Pennsylvania State University, 1985.
[9] J.J. Mecholsky, T.J. Macken and D.E. Passoja, "Self-Similar Crack Propagation in Brittle Materials in Fractography of Glasses and Ceramics," American Ceramic Society, 1987, in press.
[10] J.J. Mecholsky, D.E. Passoja and K.S. Feinberg, "Quantitative Analysis of Brittle Fracture Surfaces Using Fractal Geometry," *J. Am. Ceram. Soc.* (1987) in press.
[11] An international conference on "Fragmentation, Form and Flow in Fractured Media" was held at Neve Ilan, Israel, 6-9th January, 1986. The proceedings of this conference, edited by R. Engleman and Z. Jaeger, have been published as Volume 8 of the *Annals of the Israel Physical Society,* 1986, available from the Israel Physical Society, P.O. 16105, Jerusalem 91160, Israel. There are several papers in this publication relevant to the modelling of fracture and the study of the fragmentation.
[12] B.H. Kaye, "Fractal Geometry and the Characterization of Rock Fragments," in R. Engleman and Z. Jaeger (Eds.), "Fragmentation, Form and Flow in Fractured Media," Proceddings of conference held at Neve Ilan, Israel, 6-9th January, 1986, *Ann. Isr. Phys. Soc.*, 8 (1986) 490-516.
[13] See, for example, news item, "Britain's Geothermal Energy Resources," *New Sci.*. 1st May (1966) 30; this is a review of the book by R.A. Downing and D.A. Gray, Geothermal Energy, the potential in the United Kingdom," published by H.M. Stationery Office, England.
[14] J.W. Dougill, "Structural and Continuum Aspects of Fracture in Brittle Matrix Composites," paper presented at the symposium "Structure and Crack Propagation in Brittle Matrix Composite Materials," held in Warsaw, November 12-15, 1985.
[15] See also D.C. Spooner, C.D. Pomeroy and J.A. Dougill, "Damage and Energy Dissipation in Cement Paste in Compression," *Conc. Res.*, 28, No. 94 (1976) 21-29.
[16] G.C. Sih and A.D. Tommasi, (Eds.), "Fractal Mechanics of Concrete Structural Application and Numerical Calculations," Martinus Nijhoff, Boston, 1985, 276 pp.
[17] See, for example, the review article by B. Johnstone, "Ceramics Faces Its Big Test," *New Sci.,* 12th September (1985) 41-43.
[18] B.H. Kaye, R. Trottier and T.A. Wheat, "Quantitative Characterization of Ceramics by Fractal Geometry," paper presented at the Canadian Ceramic Society Meeting Toronto, February 23-25, 1986, *J. Can. Ceram. Soc.* 55 (1986) 57-66.
[19] A clear and comprehensive introduction to the science of crushing and grinding equipment used in the mineral processing industry is to be found in the book by E.G. Kelly and D.J. Spottswood, "Introduction to Mineral Processing," Wiley, New York, 1982.
[20] J.E. Gordon, "The New Science of Strong Materials, or Why You Don't Fall Through the Floor," 2nd ed., Penguin Books, 1976. In the United States this book (1984) is available as a Princeton University Paperback, Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, NJ, 08540.
[21] The photographs used in this section were provided by Dr. Lee A. Cross, Vice President, Special Illumination Systems Inc., P.O. Box 501, Dayton, OH 45409-0501, and are used with his permission.
[22] L.A. Cross, "Pulsed Semi-Conductor Lasers Find Use in High Speed Photography," *Laser Focus Electro-optics,* August (1985).
[23] A. Ahrony, A. Levi, R. Englman and Z. Jaeger, "Percolation Model Calculation of Fragment Properties," preprint provided by Dr. A. Ahrony, School of Physics and Astronomy, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel; R. Englman, Z. Jaeger and A. Levi, "Percolation Theoretical Treatment of Two Dimensional Fragmentation in Solids," *Philos. Mag.* 50 (1984) 2307-2315.
[24] Y. Gur, Z. Jaeger and R. Englman, "Fragmentation of Rock by Geometrical Simulation of Crack Motion, 1," *Engi. Fracture Mech.*, 20, (1984) 783-800.
[25] Z. Jaeger, R. Englman and Y. Gur, "Internal Damage of Fragments," *J. Mater. Sci.*, (1985).
[26] R. Englman, Y. Gur, and Z. Jaeger, "Fluid Flow Through a Crack Network in Rocks," *J. Appl. Mech.*, 5 (1983) 707-711.
[27] E. Louis, F. Guinea and F. Flores, "The Fractal Nature of Fracture," in L. Petronero and E. Posati (Eds.), "Fractals in Physics," Elsevier, Amsterdam, 1986.

[28] Y. Termonia and P. Meakin, "The Formation of Fractal Cracks in a Kinetic Fracture Model," preprint provided by Dr. P. Meakin.

[29] B.B. Mandelbrot, "Squig Sheets and Other Squig Fractal Considerations," *J. Stat. Phys.*, 36 (1984) 519-539.

[30] The suggestion that Squig Fractal systems might be useful in fracture dynamics was made by Dr. Mandelbrot during a lecture on Fractal Systems given at the Boston meeting on Fractals in Material Science, 1985.

[31] J. Korcak, "Deux Types, Fondamentaux, de Distribution Stastitique," *Bull. Inst. Int. Stat.*, 3 (1938) 294-299.

[32] L.T. Austin, "Size Reduction of Solids, Crushing and Grinding Equipment," in M.E. Fayed and L. Otten (Eds.), "Handbook of Powder Science and Technology," Van Nostrand Reinhold, New York, (1984), 562-606.

10 继续在分形空间漫步的路标

路标 1 概略的漫步

今晨我结束了本书的第 9 章，我发现自己已经超过了出版商给建议我的页数。在我把注意力集中到分形空间中所有我们可能去探究的途径时（当然，前提是我们有这样的时间和精力），我觉得自己正像图 10.1.1 这个人。尽管知道是结束这本分形漫步的时候了，不过，看到计划备忘录中还有另外几章的初步框架，我又禁不住有几分失落感。我不忍完全放弃对这几章的构思，我想可以在这最后一章中勾勒出其中某些设想的轮廓，这些设想可能把我们带入下一本书中继续漫步。我甚至已经为这本书起好了书名，就叫“续分形漫步探索”（在我的字典里“漫步”的意思是：为了某种乐趣随意游逛，或者是不连贯的松散行为。我在选择本章的标题时，脑海里浮现的正是随意游逛这一种定义）。

图 10.1.1 中的路标，很像人们在令人愉悦的英国乡村小路尽头看到的那些木手指，在你休息的片刻，它们会邀请你走上另一条更具魅力的道路。图中的路标将把你邀请到分形世界去体验，你会发现从路标开始的各条分岔路有这样一个共性：无论你选择哪条路径，不久都会发现自己在无穷无尽的可能性中迷了路。

本章中标有路标 2 字样（路标 3 等等）的各节，显然不是普通的路标概念。这里的路标更像旅行社提供的那些旅游小册子，诱惑你在异国的土地上作各种各样的旅行。对于本章中由各路标指引的，关于在分形领域可能的旅行的简短讨论只想达到两个目的：第一，在最初设计本书时我曾从各门学科的科学家那里搜集了大量资料，并打算把它们用于前面已写的各章中，然而，我对自己无法把如此丰富的资料全都用上感到有些惭愧，因为这些资料是很多活跃在分形领域的科学家们慷慨提供给我的，至少为了感谢他们的帮助，同时也为了给有这方面专业兴趣的读者进入分形科学的高级领域以一定的指导，我在各路标部分的参考文献中一一列出了这些论文；第二，由于新的科学文献出版迅速，我发现自己在写书的时候处于这样一种境地，我来不及把某一领域科学工作最新进展的细节收入我已写好的该领域的章节中去。开始时，一旦我发现与我已写完的章节内容有关的新资料，我便回头把新内容加进去，把这部分重写一遍。不过，要在有限的空间和有

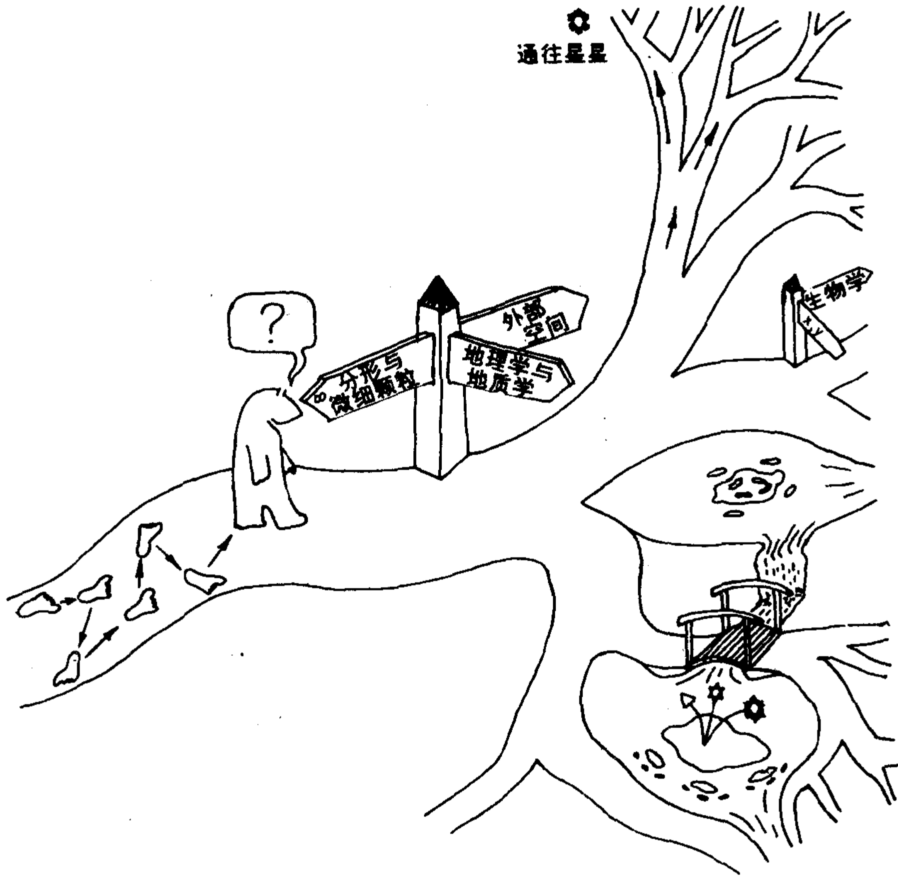


图 10.1.1 继续分形漫步的可能性看来无止无尽

限的时间完成一本书，这种办法显然是行不通的。于是，我想最好的办法是在路标部分中简略阐述一下与前面章节内容有关的最新进展，于是，甚至在出版商日程允许的最后一分钟里，我仍在每个“路标”的参考文献中不断增添新的资料。由于本章的目的就是指南，是为有志进一步研究应用分形的读者提供本书以外的更多的专业文献，所以它的文献是按照各路标的标题分别列出而不是连续列出的，哪部分合适，就在哪部分加进未纳入正文的注释和附加文献，以期给读者提供更多的信息。其实，每一个“路标”对明天的“漫游者”来说无异于新的一章。

我希望，在这些路标段落里，能为读者提供一些广泛感兴趣的分形资料。期刊中的某些分形文章对一般读者来说并不容易找到，为此，我同时给出了作者所在的地址。例如 J. J. Mecholsky 教授的一篇分形文章发表于宾州大学的地球和矿物学院出版的杂志[1]。在这篇文章中 Mecholsky 教授从五花八门的应用科学中，列举了相似分形系统的有趣的直观比较。在他列出的图例中，有一幅一边是高温分解的石墨（一种特殊的碳）表面，另一边是菜花表面，如果不看图示，就难以确定其中哪一个是何者的分形系统。Mecholsky 在文章中还并排放了两张照片，一张是金属表面的裂缝，另一张是卫星拍摄的红海（地壳上的裂缝），这两张图竟是惊人的相似。为使读者得以追溯关于孪生分形系统的精彩的直观比较，我在相应的文献中附上了 Mecholsky 教授的地址。

分形几何的概念从一个领域走向另一个领域本身就是一个十分有趣的故事。在俄亥俄州的 Goodrich 橡胶公司研究总部开设的员工培训班上，我曾做过关于分形几何的报告。在这次报告中，我切身地感受到分形的概念从一个科学领域到另一个科学领域的令人惊奇的移植。报告的内容是关于乳胶小球团聚的分形结构。与会的科学家中有一位 J. A. Davidson 博士，他不仅是显微照相的专家，还参与科教片的制作，他很快就发现分形几何可以用于图象分析清晰度表征的研究。一幅高质量的摄影作品给观众的印象是图中各部分的轮廓之间有清晰的边界；而在显微镜下就会发现，轮廓是由银晶体组成的，而要确定一张照片图象边界的准确界限，就好像是要确定一朵云从哪儿开始在哪结束。此后，Davidson 博士就和他的同事 Denis Keller 在科学刊物上讨论关于确定摄影图象中边界清晰度的分形维数特征问题。他们对边界清晰度问题的讨论涉及可定量的锯条锐利度，直至摄影胶片的边界。用彩色视觉摄象机和计算机数据系统分析卫星图片来确定摄影胶片边界的准确位置是个十分重要的问题，因此，Davidson 博士先进行了应用于空间科学的科教片影像质量的研究工作，后来又开展了确定医疗中 X 射线图象边界位置的工作。在 Davidson 和 Keller 合写的文章附录中就介绍了三分 Koch 岛的数学问题，由此可见他们对分形的热情[2]。

1985 年末，J. Davidson 博士从俄亥俄州打电话告诉我说，他在一本科幻小说中发现了分形想象，这本书是艾伦·福斯特著的《判决棱镜》[3]（福斯特先生的另一部作品《黑洞》还曾被改编成同名电影）。《判决棱镜》一书写的是埃文·奥吉列到一个行星上旅行，这个行星上有很多以硅为基础的各种生命形式。在这颗叫做棱镜的行星上有些景物是由分形系统构成的。小说第 5 页有下面一段内容：

“有什么东西正逼近他（埃文），这个东西虽然似乎并不大，但终归还是对他产生了严重的伤害，使他处与无救的半昏迷状态。因为安在飞行帽护面罩上的具有特殊功能的护目镜失灵了，所以他无法看清走向他的物体。护目镜本是不可少的，因为棱镜行星上的大多数生命形式都不是一般的几何结构，而是按照分形结构形成的，如果你长时间盯着他们看，他们就会变得模糊一片，就象你的眼睛看到了并不存在的花纹和结构那样。分形存在于 1 维与 2 维或者 2 维与 3 维之间，即使是数学家也无法确定它究竟在哪儿。”

当然，小说的读者最后会发现，分形存在于所有维数之间而不只是某给定二者之间。小说的情节又如下发展：

“要是你通过 Hausdorf 透镜观看就不会有问题，透镜安装在埃文飞行服护面罩上的的护目镜上，而护目镜已经坏了，所以，通过没有调好透光度的透镜看去，分形体就不对劲了。”

如果你能从头至尾地读完这本科幻小说，就会发现分形概念不时出现在小说的故事进展中。1986 年秋，曼德勃罗特博士访问 Laurentian 大学时，该校物理系的学生曾把这本书的复印本送给他。曼德勃罗特先生得知他的理论影响所及甚至连科幻小说的艺术风格和名词都在所难免，感到十分有趣。

不过，如果我事先读了这本书的手稿的话，就一定会向《判决棱镜》的作者建议，他应该给那位空间旅行者安上“曼德勃罗特透镜”，而不是 Hausdorf 护目镜，这样才能看出分形的真实性。Harsdorf 是一位数学家，尽管他确实探究了数学的维数理论，不过只有

通过曼德勃罗特的视角，世界才能呈现出分形几何的美丽和功用。有时，在应用分形几何的科学文献中，人们把分形维数描述成 Hausdorf 或 Besicovitch 维数，我认为最好用分维数去描述不规则空间，而不是冠以 Hausdorf 或者 Besivovitch 这些探索者的名字，因为他们并非分形几何的发明人。

参考文献

Specific References

[1] J.J. Mecholsky, "Fractals Fact or Fiction in Earth and Mineral Sciences," *News Magazine of the College of Earth and Mineral Sciences*, University Park, Pennsylvania, 55 (3), (1986) 29-33.

[2] J.A. Davidson and D.J. Keller, *Soc. Motion Picture Television Eng.*, August (1985) 802 - 809.

[3] A.S. Foster, "Sentenced to Prism," Ballantine Books, New York, 1985.

References of General Interest

[1] D.J. Albers and G.L. Alexander (Eds.), "Mathematical People; Profiles and Interviews." Birkhauser, Boston, Basle, Stuttgart, p. 207 - 225; this is a record of a conversation between Benoit Mandelbrot and Anthony Barcellos.

[2] P. Bak, "Doing Physics with Micro Computers," *Phys. Today*, December (1983) 25-28. This article contains several pictures of computer-generated Monte Carlo simulations of Ising models of interest to the solid-state physicist. There pictures of solid-state systems look exactly like simulated powder mixtures to fineparticle specialists. The computer programs discussed in the article can be used to simulate powder mixtures structures.

[3] P. Bak, "The Devil's Staircase," *Phys. Today*, December (1986) 38-45. This article discusses how the range of massive frequencies of a driven oscillator can be related to the infinite possibility of steps on a devil's staircase. In this article the use of Cantorian sets and fractal dimensions is applied to the range of frequencies manifested by various systems of interest to physicists.

[4] M. Batty, "Fractals Between Dimensions," *New Sci.*, April 4 (1985) 31-35.

[5] P.W. Carlson, "IBM Fractal Graphics," *Compute*, March (1986) 78-80.

[6] C. Davis and D. Knuth, "Number Representation and Dragon Curves," *J. Recreational Math.*, 3 (1985), 66-81 and 33-149.

[7] A.K. Dewdney, "Computer Recreations - Exploring the Mandelbrot Set," Sci. Am., August (1985) 16-24; "Computer Recreations, Beauty and Profundity," *Sci. Am.*, November (1987) 140-145.

[8] R. Dixon, "Geometry Comes Up To Date," *New Sci.*, May 5 (1983) 302-305.

[9] E. Edelson, "The Ubiquity of Nonlinearity," *Mosaic*, 17, No. 3 (1986) 10-17.

[10] A colleague, Dr. Derek Wilkinson, browsing through a bookstore in Toronto, discovered a delightful, but small book which, although it does not mention fractals, has a great deal of information on fractal systems disguised under the title "Physics and Geometry of Disorder Percolation Theory," by A.L. Efros, translated from Russian by V.L Kisin, Mir, Moscow, 1986. (Mir Publishers, 2 Pervy Rizhsky Pereulk I-110, GSP, Moscow 129820, USSR).

[11] K.J. Falconer, "The Geometry of Fractal Sets," Cambridge University Press, Cambridge, 1985, 162; this is a book on the mathematics of fractal sets for specialist scientific readers.

[12] M. Gardener, "Mathematical Games in which Monster Curves Force Redefinition of the Word Curve," *Sci. Am.*, December (1976) 124-133.

[13] Fractal generating algorithms are outlined in J. Holbrook and J. Weiner, "A Fractal Workbook," Mathematics and Statistics Department University of Guelph, Ontario, Canada, N1G 2W1, 1983.

[14] R. Jullien and R. Botet, "Aggregation and Fractal Aggregates," World Scientific Publishing Co., Farrer Rd., P.O. 128, Singapore 9128, 1987, 144 p. In North America this book can be ordered from Princeton University, Princeton, NJ.

[15] M. Kac, "More on Randomness," *Am. Sci.*, 72(3) (1984) 282-283.
[16] The reader without a mathematical background may find a copy of an essay by B.H. Kaye, "From Euclid to Mandelbrot, a History of the Evolving Vocabulary of Fractal Geometry," to be a useful semantic survival kit to keep by their elbow as they venture into fractal geometry. Copies are available from the author at Laurentian University, Sudbury, Ontario, at a price of $15 Canadian to cover printing and handling costs.
[17] D. Malmberg "Fractals and Other Diabolical Designs," *Commodore Power Play*, June-July (1986) 88-92.
[18] B.B. Mandelbrot, "Getting Snowflakes Into Shape," *New Sci.*, June 22 (1978) 808-810.
[19] Interview with Benoit B. Mandelbrot, *Omni*, September (1984).
[20] J. McDermott, "Geometrical Forms Known as Fractals Find Sense in Chaos" *Smithsonian* (a journal published by the Smithsonian Institute, Washington D. C.), 12, No. 9, December (1983).
[21] K. McKean, "The Orderly Pursuit of Pure Disorder," *Discover*, January (1987) 72-81. This article discusses the problem of generating random numbers and of applying random numbers theory to the generation of secret codes for protecting bank records and secret messages sent over telephones. The article is written at an introductory level and has some excellent graphics.
[22] A.K. Mon, "Self-Similarity and Fractal Dimension of a Roughening Interface" by Monte Carlo Simulations," *Phys. Rev. Lett.*, 57, (1986) 866-868. The author points that fractal dimensions are involved in interfaces in such different areas of applied physics as adsorption, diffusion, surface crystal growth, wetting and pore structures of rocks. The references listed enable the working scientist to begin an in-depth study of the fractals in various areas of applied physics.
[23] A. Norton, "Generation and Display of 3-D," *Computer Graphics*, 16(3) (1982) 61-66.
[24] M.M. Novack, "Advanced Graphics with the Commodore 128," MacMillan, New York, 1986.
[25] M.M. Novack and J. Weber, "Fractal Sets," *P.C.W.*, December (1986) 196-199.
[26] L.N. Sander, "Fractal Growths," *Sci. Am.*, January (1987) 94-100.
[27] B. Schechter, "A New Geometry of Nature," *Discover*, June (1982) 66-68.
[28] Sorensen, "Fractals," *Byte*, September (1984) 157-172 (This contains instructions on how to generate fractal geometric shapes.
[29] L.A. Steen, "Fractals, A World of Non-Integral Dimensions," *Sci. News*, August 20 (1977).
[30] K. Stein, "The Fractal Cosmo," *Omni*, February (1983) 62-71, 115.
[31] To find algorithms for generating fractal geometric patterns on an Apple computer, see Thornberg, "Discovering Apple Logo, an Invitation to the Art and Pattern of Nature," Addison-Wesley, New York, 1983, Ch. 11.
[32] S.M. Thorpe, "Mandelbrot Graphics for the Commodore," *Compute*, July (1986) 98-101.
[33] J.B. Tucker, "Computer Graphics Achieve New Realms," *High Technol.*, June (1984) 40-53.
[34] R. Williams, "The Electronic Chalkboard Fractals," *Intell. Instrum. Comput.*, 13, February-March (1985) 2.
[35] T.A. Witten and M.E. Cates, "Tenuous Structures from Disorderly Growth Processes," *Science*, 232, (1986) 1607-1602.
[36] D. York, "Rough Edge of Math Leads to Scenery by Computer," *Appl. Math Notes*, June (1983) 35-38.
[37] P.W. Carlson "IBM Fractal Graphics," *Compute*, March (1986) 78-80.

路标 2　分形景观与视觉艺术

图 10.2.1（见书前彩图 8）是一幅运用分形几何理论创造的复杂的旋转图形[1]。曼德勃罗特先生著作中的原图以及其他许多文章、著作中的插图[2]，都是一些极具视觉美感的奇异分形图，这种视觉美感不知使多少人为之着迷。1986 年，曼德勃罗特博士在给 Laurentian 大学的报告中就曾提到他本人在观察分形图形的形成过程时的喜悦心情，那些图形是由计算机根据给定的算法绘出的。显然，一般而言，数学家们只能预料到应用分形几何理论应该产生的图形；而有些时候却会因为某些完全始料不及的错误，使计算机屏幕上出现无法再生的图形。所以曼德勃罗特博士在他所做的有关分形几何的报告中也涉及了图 10.2.2，他对这幅图是这样评价的[3]：

“这幅图的产生要有一部分归功于计算机的程序错误，“bug”（计算机科学家用于指出程序中的错误的词）只能在输出记录后才能被立即识别并纠正。在某个关键的地方出现单个微小的“bug”而产生的变化，正是我们所期望的。显而易见，图 10.2.2 的设计有相当严格的指令，而且，在此，该指令是隐含着的，也没有其它任何可见的指令。至少乍一看来这幅画可被视为上乘艺术品并非偶然，其中的因由已在其它地方粗略解释过，而且近期我还会对此加以全面论述”。

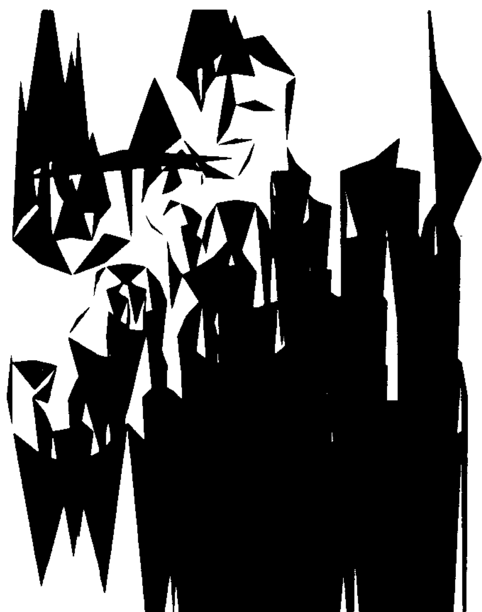


图 10.2.2　曼德勃罗特告诉我们这幅画并非是一位艺术家技艺的结果。画的结构产生于分形算法中的某个“错误干扰”

毫无疑问，在将来，针对分形图形专家创造的视觉图案，会从艺术理论的角度提出对其含义的研究，并对不同的设计做出美学价值的分析。

在听到曼德勃罗特博士有关“出错”在产生如图 10.2.2 这样“富于创造性的高水平的艺术”中的作用时，我想起我在什么地方读过一篇文章，谈到计算机科学家试图设计一种生产波斯地毯的自动装置，该装置的织机是由计算机控制的。从几何角度上看，这种地毯的图案是完美无缺的，但没有“异彩”。于是，计算机专家们在各个子图案的配置

程序里引进了一些小错误，以使生产出的地毯具有“异彩”。显然，图案中的小缺陷，使眼睛对图案一扫而过时感到迷惑，从而使图案产生出一种几何构型的光彩。我记得在其他什么地方也读到过东方地毯制造商们的事。他们在制作地毯时故意在几何图案中添加一些小错，他们这样做恐怕是基于宗教背景的考虑，因为他们坚信人类做事不应该十全十美，只有上帝才能或者应该做完美的事。这种迷信也许是古代纺织者的经验之谈，这些纺织者发现，人类的视觉对于地毯的色彩鲜明与否的判断取决于图案中那些随机的细小偏差。

关于分形几何的哲学含义及宇宙的结构问题早已有了一些讨论，曼德勃罗特博士发现的一本名为“圣经道义”的古手稿中的一幅插图就是一例。这本手稿是公元1220－1250年间用法国东部的Champage方言写成的。那张插图描绘的是上帝正在用欧几里得几何学和分形的形状建造宇宙的情景[4]。也许，分形几何是一种比现代人们的猜测更为久远的古代艺术。



“我们的房间充满了分形。”

图 10.2.4　可以预料，分形设计的视觉效果可使分形装饰布和分形壁纸成为可能。不过，卡通画家哈里斯先生用分形装饰的这间屋子未免让人喘不过气来！

分形图形的错综和美丽唤起了科学世界的想象力，几家重要科学杂志的封面都纷纷用分形图案装点门面，即是佐证。《美国科学家》、《科学》、《自然》、《今日物理》、《研究与发展》以及《科学美国人》等杂志的封面都出现过分形图案[5]。科学家们利用分形图案验证计算机图形的分辨能力（结果）及图象配置系统。例如，图 10.2.3（见书前彩图9）摘自图象分析系统制造商编写的商业文献[6]，第一次看到这幅图时，我还以为它是一张神经细胞的真实照片。一些科学家认为分形几何有助于他们理解被观察的正常活细胞的结构和组成癌组织的病细胞的结构。所以，通过建立与健康的或患病的组织相像的分形生长模型，科学家们也许能够了解存在于基因密码的控制生长的信息，以及如果这种

生成结构的信息被破坏时，癌组织是如何发展的。

记得我第一次看到图 10.2.1 这样的“分形羽轴”时，就曾想到过出售各种分形设计品的可能性，其中之一是有分形图案的墙壁纸。不过，要是室内装饰真搞得像图 10.2.4 那样就未免会有压抑感了！1986 年底，分形明信片和分形广告在市场上首次推出，分形年历的出现也不会落后。一位搞地理的同事收到一张两面印有分形图案的贺年片（图 10.2.5（a）和（b），见书前彩图 10）恰如其分地祝福他“新年无限快乐”。图 10.2.5（c）是另一张美妙的分形（fractalicious，是意为美妙的分形的一个新词）艺术品，是一个分形爱好者（fractophilic）寄给我的分形海贝的明信片（fractophilic 是意为分形爱好者的一个新名词）。

Lucas 电影在应用分形逻辑创造出与众不同的景观方面已做了一些开拓性工作，这可以体现于影片“Jedi 的轮回”的剧情中。曼德勃罗特先生著作的中间彩页部分有些就是应用分形几何的算法创造出的美丽景观。图 10.2.6（见书前彩色插图 11）是由计算机模拟制作的山峰，它已被 IBM 公司广泛地应用于宣传广告中。这些图是由理查德·沃斯制作的，也许以后我会写一篇“穿越沃斯山峰的漫步”，那将会别有情趣。

参考文献

[1] Alan Flook tells me that he generated the artistic pattern in Figure 10.2.1 when testing the quality of various colour printers he was considering purchasing.
[2] For a very comprehensive book full of beautiful computer-generated fractal graphics, see H.O. Peitgen and P.H. Richter, “The Beauty of Fractals,” Springer-Verlag, Berlin., 1986.
[3] Dr. Mandelbrot has given some of his views on the relationship between fractal geometry and art in B.B. Mandelbrot, “Scalebound or Scaling Shapes. A Useful Distinction in the Visual Arts and in the Natural Sciences,” *Leonardo*, 14 (1981) 45-47.
[4] See B.B. Mandelbrot, “Fractal Geometry of Nature,” Freeman, San Francisco, 1983, p. 276.
[5] See the front covers of *Scientific American*, October 1985; *Physics Today*, Febru-ary 1986; *American Scientist*, January-February 1986 and the cover of Science, February 1986.
[6] Reproduced and taken from the commercial literature (by permission) of Tracor Northern, 2251 West Belt Line, Highway, Middleton Wisconsin, 53562-2697, USA.
[7] A.K. Dewdeney, “Fractal Mountains, Graftal Plants and Other Computer Graphics,” *Sci. Am.*, December (1986) 14-20.
[8] Pictures from the greeting card used by permission of ACDS Graphics Systems Inc., 100 Edmonton St., Hull (Quebec), Canada, J84 6N2.
[9] Fractal design decorated postcards and other fractal graphics are available from Art Matrix, Post Office Box 880, Ithaca, New York 14851, USA. Picture used with permission.
[10] H.O. Petigen (Ed.), “The Science of Fractals, A Computer Graphical Introduction,” Springer-Verlag, Berlin (1987).
[11] B. Schechter, “Fractal Fairy Tales,” *Omni*, October (1987) 86-92.

路标 3 “分形赌徒”

对于报纸财政专栏中证券市场起伏的锯齿状记录，如果我们去考查它就会想到去做分形分析。想通过证券发财的的数学家经常想方设法把信号处理过程应用于证券市场的行情记录，他们想看看能否把记录分解成多元结构，以及对预测证券市场行情走势是否有用。所以，傅里叶分析已经被应用于证券市场记录，其应用的前提是记录包含一定的周期现象。其实，即使没有富里哀分析，美国证券市场所呈现的四年一个循环也是显而易见的，这种循环与美国四年一次的总统大选密切相关。不过，值得注意的是，证券市场的四年经济循环与实际的大选日期大约有一年的滞后，这种滞后的发生是由于现政府为重新当选而作的刺激经济的允诺，这些允诺到了选举后的一年当然可以违背了。

把证券市场的记录分成连续的几部分，并比较各个不同阶段波动的分形维数是一件非常有意思的工作。我们可以回顾一下贯串本书的基本思想，就是要说明这样一种现象，即分形结构可能是许多原因相互作用的结果，而这些相互作用又是随机的、无法预测的。证券市场记录的鲜明的分形本质似乎是强调了这样一点，即多种随机原因的相互作用正是左右证券市场的基本内在动力。这就是说，靠证券市场发财的人不必是位天才，十有八九只不过是偶然机遇的宠儿。一位金融专家成为赢家，靠的也不过是运气而已（记住，胜利者是失败过的英雄）。在你听取经纪人的劝告时，你要知道，他的建议一般来说并不比鸡骨巫医的话更可靠（这种巫医靠查看扔在地上的鸡骨图案而给人看病）。如果经纪人确实擅长预测证券走势的话，他自己早已该是百万富翁，而不必像现在这样靠建议您如何花您自己的钱来维持生计了。不过，对于那些研究证券市场和其它经济体系的分形维数的人，可以参阅曼德勃罗特先生的著作，书中有整整一章用来探讨经济体系中的分形结构问题。

路标 4 湖泊、岛屿以及其它的地理分形

我们在第 1 章中谈到，曼德勃罗特先生的分形研究遇到的第一个问题就是英国海岸线的无限性。读者随便翻阅任何一本地理或地质的书都会发现，每一幅图都可表示为分形维数。我曾计划用整整一章讨论分形几何在地理和地质上的应用，不过在这部分只能给读者指出几个有意思的方向。对分形几何及分形地理感兴趣的读者，可以在 Goodchild 博士与他的合作者们撰写的著作中，找到大量的该方面的资料[1,2]。

分形几何在地理上的应用速度之快是值得重视的。早在 1984 年，纽约州立大学的马克博士就整理了三页关于分形几何应用于地理学和绘图学[3]的文献目录（绘图学是一门研究绘制地图的理论和技术的学科）。在 Laurentian 大学开设的分形几何课上，学生们测量了许多分形海岸线，并用分形维数定量表示。例如，曾测得新大陆的大西洋沿岸与西部沿岸的区别以及挪威犬牙交错的海岸线和 Manitoulin 岛构造的分形维数。图 10.4.1 即是 Manitoulin 该岛的轮廓图，该岛是世界上最大的淡水湖岛屿。我们可以看出，岛屿两岸不同的侵蚀力使两岸海岸线的弯曲形状大不相同。图 10.4.1 (b) 是从一位研究海岸

线分形结构的学生提供的一套数据而绘制的。

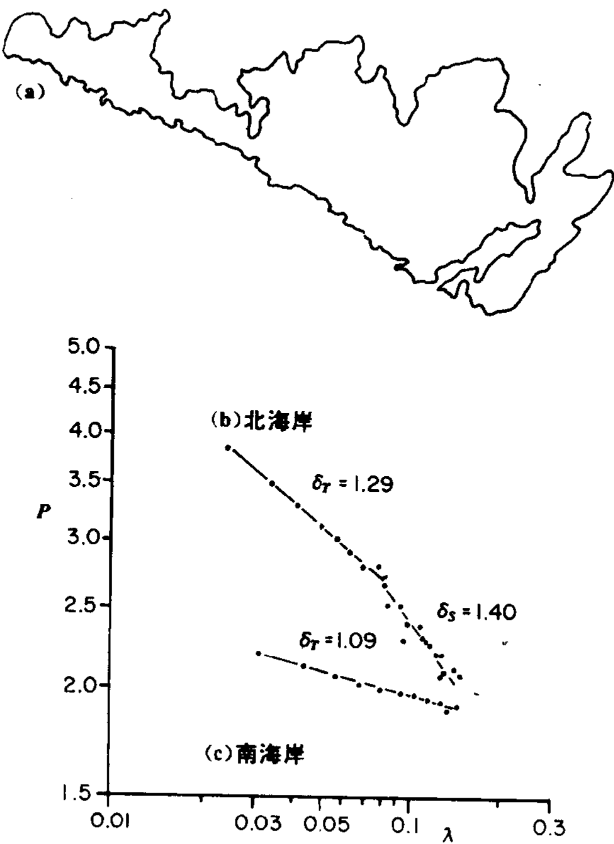


图 10.4.1 Manitoulin 岛的海岸线结构表明，经受不同浸蚀力的南北两岸的分形维数显示了完全不同的分形边界。这说明，曲折的海岸线可能与所受的浸蚀力有关。(a) Manitoulin 岛的轮廓；(b) 该岛北岸的理查德森图；(c) 该岛南岸的理查德森图，本图表明，在低分辨率下，海岸线实质上显示出欧几里得曲线的性质（即λ较大时，理查德森图趋于水平——译者注）

一些地理工作者已经开始把分形几何应用于岩石结构的研究，特别是砂岩，看来它是具有分形结构的多孔体的最好典型。

图 10.4.2 (a) 即是通常所说的阿波洛尼奥衬垫（Apollonian gasket）是一个著名的数学图形（阿波洛尼奥是公元前 200 年古希腊致力于亚力山大帝国城市几何问题研究的数学家）。曼德勃罗特先生曾在他的著作[4]中讨论过阿波洛尼奥衬垫的分形结构，并谈到在衬垫中的圆就是阿波洛尼奥填料的一个实例。记得我第一次翻阅曼德勃罗特博士的这本著作时，就在其中一篇文章的前面看见过这幅图，那篇文章是关于破碎和研磨问题的。显然，对于化学工程师来说，阿波洛尼奥衬垫代表的是一种粉碎过程，大的球压挤较小的球，生成越来越小的碎片。不过，这幅图又使我想起核反应堆设计时遇到的问题：工程师们在建造核反应堆时总是力图制造出具有最大密度的混凝土保护墙，因为原子系统在发生核裂变时，要从原子中产生许多辐射碎片，而包围在系统周围的高密度混凝土墙则有最大的阻挡辐射能力。制作高密度混凝土的最好方法就是首先将大块碎石堆到一起，然后将小一些的石块（这些较小的石块可能把大石块间的空隙都填满）充填到大石堆中。第二步是将更细的砂渗入先前的大石块和较小石块的空隙中[5]，在渗砂之后，振动这些干燥的被充填的球状物，使各成分都能进到结构中。最后，要加入此结构中去的是稀的水泥浆，水泥浆中已事先加入有助于润湿过程的表面活性剂，这种稀浆倒入料堆后，将整个体系结成一个整体。

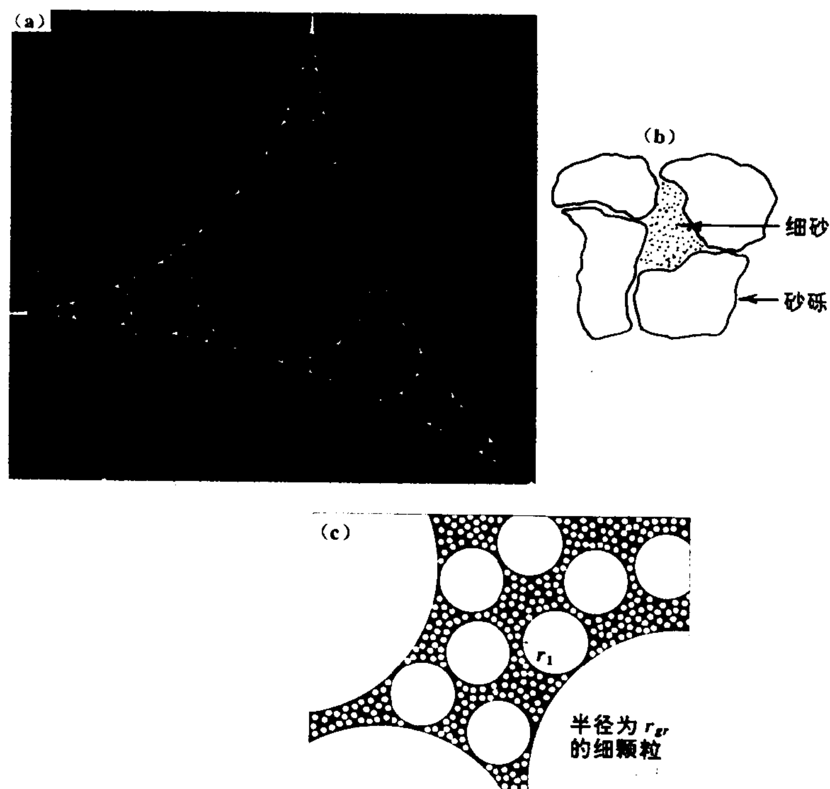


图 10.4.2 可以用阿波洛尼奥(Apollonian)衬垫分形描述的几种显然不同的体系。(a) 数学意义上完美的阿波洛尼奥衬垫；(b) 本图转自一篇论述混凝土结构的技术性论文[6]；(c) 本图转自一篇关于砂岩的分形结构的科研论文[7]

写这部分路标时，正好赶上我要买一栋新房子。建造者准备把房子建筑在岩石地基上。首先，他清除了地上的泥土，再用大约有 0.57m³ 的每块平均尺寸约为 20cm 的爆破碎石填满峡沟，然后，又把平均尺寸约为 2～3cm 的压碎的炉灰渣填进碎石块的缝隙中，最后，又把细砂炉渣的缝隙里并加入水使细砂粒能充分地渗进缝隙中去。如此这般，我可以对我的学生们说，我的新房子是建立在阿波洛尼奥衬垫的基础上的，是一种多层次的分形体系！当然，可以肯定，建筑地基的工人并不知道何为阿波洛尼奥衬垫，不过，就象在很多应用科学领域中一样，他们在反复试验和纠正错误的过程中，找到了制作坚固石料的最好方法，就是使用一级比一级更细的物料渗透到空隙中去。

即便对于普通的混凝土结构，在选择混凝土混合料中的各组份（即压碎的砂砾、细砂与水泥）的颗粒大小比例时，也要使得浇注成模时，砂子能够填满碎块间的空隙，水泥则能填满砂粒间的空隙。图 10.4.2 (b)[6]引自一篇讨论混凝土结构的科学论文，该图是一个统计自相似的阿波洛尼奥衬垫。

如果认真观察理论的阿波洛尼奥图形，我们会看到每个较大的圆盘形成的空穴里面都有无数个越来越小的圆盘。考察一个阿波洛尼奥衬垫的所有结构，是无法说出其放大倍数的，因为无论怎样看它的整个体系都是自相似的，也就是说，充填衬垫的不同的圆盘的尺寸分布是一个分形体系。根据图 10.4.2 (a) 与 (b) 的相似性要求，混凝土各组份的尺寸分布也应是像阿波洛尼奥衬垫那样的分形体系。当然，在实际应用中，也许有必要与理论的尺寸分布函数有一定偏差，以确保各种组份能渗进各种内部空隙，也就是

连续地渗到越来越小的颗粒结构中去。

实际上，与其使用连续分布的组份，倒不如有一定的梯级比；而且，在实际的混凝土技术中，能够制造出并且能够渗入整个混凝土结构的最小颗粒的尺寸显然是有限度的。关于粉末体系充填的书已有很多，现已明确，具有不同性能的各种混凝土，许多由经验确定的粒度分布都是分形体系。一些科学家正致力于研制高密度混凝土或合金，这种混凝土或合金虽然具有不同的性能，但都是同一类型的系列组合，这些组合是由各种大小颗粒依次渗入到充填容器中的。因此，陶瓷和粉末冶金专家可以用分形几何的概念去研究粉体的混合物，用这些混合物来制作不同性能的材料。

50 年代后期，那些研究高密度混凝土制备的科学家们，取得了修建小构筑物（如花园的混凝土小路）工艺的专利。修建这种小路用到了各种成份的干式混合物。先把要修的通道挖成凹形，把碎石作为混凝土混合物的最粗部分铺入坑内，再将碎石间的空隙填满砂子，最后浇注上加了洗涤剂的水泥浆。显然，这种工序难以受欢迎，很难说服建筑工人这种制造混凝土的作法是如何有效，因为他们早已习惯于推着装满现成的混凝土的独轮车到处走。也许这种新工艺与传统的强有力的建筑工人的形象不符，他们通常都是在前往工作地点的路上手工配制湿的混凝土原料。

图 10.4.2 (c) 显示了应用分形技术的又一模式，它是 Pape 博士和 Schopper 教授及其同事研制的砂岩结构模型[7]，他们是对油岩十分感兴趣的地球物理学家和数学家。他们研制模型的目的是为了描述砂岩内部的曲折通道和内表面积，因为油在这些通道中流动，而油岩的内表面积不仅决定砂岩的蓄油能力，而且决定了石油流过时砂岩对油的阻力。他们的论文中写道：

“3 维空间的分形维数理论，最初仅限于拓扑曲线、表面和体积，现在这一理论已扩展到物理性质，如比表面、曲折性、孔隙度及其形成因素。”

在论述砂岩模型的演变时，他们使用了“空穴模型”(Pigeon hole model) 这一概念。这里的空穴模型与我经常讲到的紧密型混凝土的阿波洛尼奥结构实际上是等同的。实际上，砂岩通常先是由单一尺寸的颗粒组成，它们从流动的水中沉积下来，而后又有越来越小的砂粒渗透下来，如此不断。于是，在一连串砂粒形成的“穴”中就有越来越小的颗粒沉积。所以，大自然已远远先于核工程师们解决了如何产生紧密混凝土结构的问题（参见文献[8,9]中对岩石分形结构的论述)。

Pape 博士和 Schopper 教授及他们的同事研制的砂岩模型，显然与第 8 章讨论的体系类型有关。在第 8 章中讨论石油的二次回采技术时，我们曾考虑将分形几何应用于这些遇到的问题上。由于似乎把不同工程技术领域的各种相关模型结合于一个图表更有助于理解，所以直到讨论了阿波洛尼奥衬垫的结构后，我们才提到它们的砂岩模型。

土壤是一种由大小不等的碎块组成的混合物，而这些碎块又是由大小不同的物质组成的。土壤内的孔眼和通道决定着诸如土壤的排水和作物根部的呼吸等重要作用。土壤科学家研制的土壤体系排水模型与 Pape 博士及其合作者们研制的砂岩模型是相似的。

读者可能会认为图 10.4.3（见书前彩图 12）是用与图 10.2.1 的分形图案相似的方法制作出来的。事实上，图 10.4.3 是摘自一篇有关贵重矿物勘探的文章，文章中的插图是一张经过“伪色”(false colour) 计算机处理的卫星照片，照片上由各种不同颜色表示

的几个区域的分形结构。这张卫星图片本身也许没有什么重要的意义，但是，从另一角度看，这种颜色表示法也许是鉴别这类图片的重要结构特征的方法之一。

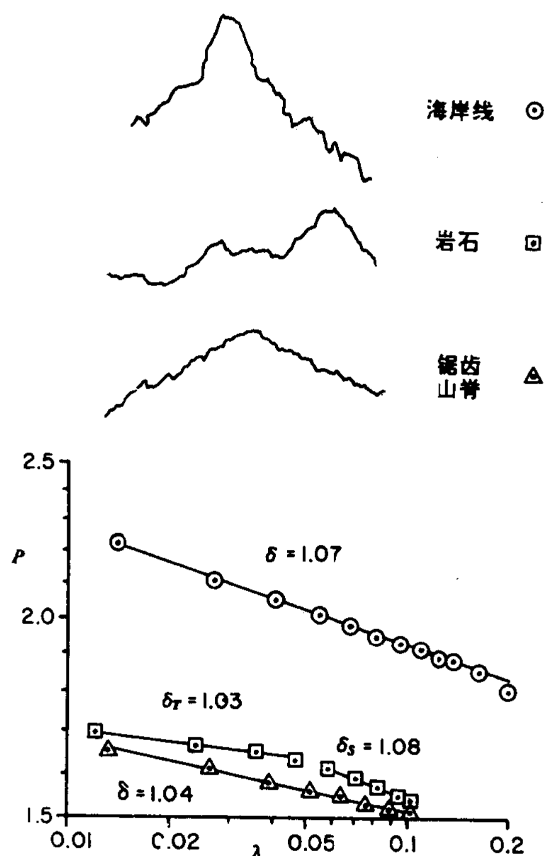


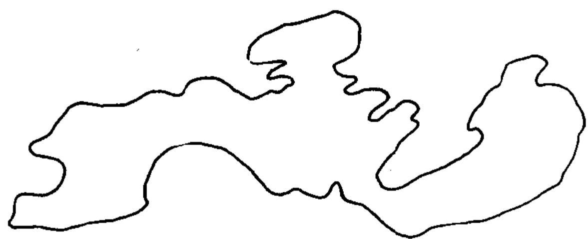
图 10.4.4 山峰的分形轮廓，可能与其形成动力及形成后所受的腐蚀力有关

山脉轮廓的照片能清楚地显示出其分形结构。将一张在地质学上认为是青壮年山脉的照片，如喜马拉雅山，与一张已进入老年的山脉，如顶端圆秃的南非山脉的照片比较会发现，从分形几何的角度上说，是浸蚀减少了山脉的分形维数。图 10.4.4 是几个不同山脉的轮廓图，还有经 Dapple 膨胀所得数据制作的理查德森图，后者可用来评估山峰轮廓分形结构[11]。

不仅高大的山脉轮廓呈现分形，地面的平面图（等高线）也呈现分形结构。图 10.4.5 是南非一座古老的山脉——Bornhardt 山的轮廓图和理查德森图，该图可以确定平面发育的分形维数。直觉告诉我们，这种地质构造的分形维数应该与形成 Bornhardt 山的地质力有关[12]。用分形维数概括一系列山脉地形轮廓等高线图可能是对山峰结构最方便的概述了。

穿断山岩的河流浸蚀可产生新的分形结构，且这种新结构的分形维数更大。超声波探测的湖底轮廓和在飞机上应用激光仪器估测的风景区轮廓都可用分形维数描述[13,14]。曼德勃罗特先生在他的著作中也曾论述了河流体系的分形结构。

令地理学家、地质学家和气象学家们感兴趣的还有云和闪电的分形体系。Lovejoy 和他的同事们已对云的分形结构做了大量的研究工作。由于运动和天气变化的研究与流体湍流的研究紧密相连，所以，我在路标 9 的末尾列出了 Lovejoy 和他的同事在云物理学研



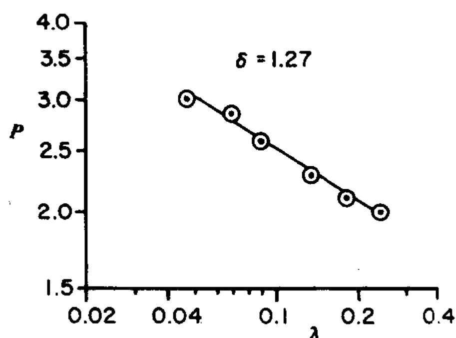


图 10.4.5 南美和澳洲部分地区独特的山脉的轮廓平面图。Bornhardt 山是以其发现者的名字命名的，Bornhardt 山脉的分形维数可能与形成它的地质力有关[12]

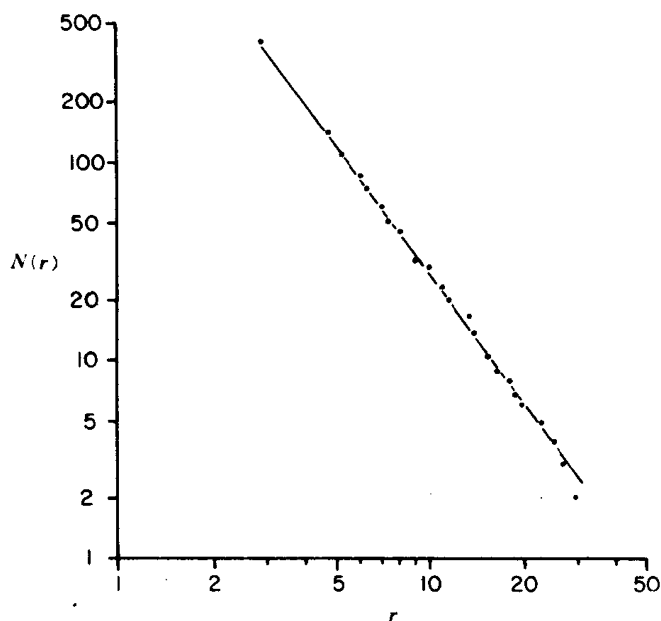


图 10.4.7 卫星摄影测量的浮冰尺寸分布遵守 Korcak 关系

究方面的出版书目。Miemeyer 和他的同事们则研究了与闪电相似的体系[15]。

有时，岩石形成的结晶过程会产生具有分形结构的水晶体。例如图 10.4.6（见书前彩图 13）是渥太华大学的福勒（Fowler）教授研究的形态像蕨类植物的分形水晶体。显然，这种手指状晶体的分形维数与结晶力有关[16]。

在第 9 章中，我们讨论了岛屿体系的 Koreak 分形。图 10.4.7 所示的似乎是具有分形尺寸分布的另一种“岛屿类型”，其实，在 Matsushita 的报告中是这从 Landsat 人造卫星观察到的飘浮冰块的尺寸分布[17]。如果读者不在意我的语意双关，那么这就是一则用

来结束本章对地质分形简短论述的最好例子。对于分形在地质、地理以及气象学中的应用这块巨大的“冰山”来说，我们的论述只不过是山顶上的一点。

参考文献

[1] M.F. Goodchild “Fractals and the Accuracy of Geographical Measures,” *Math. Geol.*, 10, No. 2 (1980) 85-98.

[2] M.F. Goodchild and D.M. Mark, “The Fractal Nature of Geographic Phenomenan,” in press. Dr. M.F. Goodchild, Department of Geography, University of Western Ontario, London, Ontario N6A 5C2, Canada. Dr. D.M. Marks, Department of Geography, State University of New York, Buffalo, New York, USA.

[3] Dr. D.M. Marks, Department of Geography, State University of New York, Buffalo, New York 14260, USA.

[4] B.B. Mandelbrot, “Fractal Geometry of Nature,” Freeman, San Francisco, 1983, p. 170.

[5] For a classic discussion of the technology involved achieving maximum density in a packed powder system, see C.C. Furnas, “Grading Aggregates Number 1, Mathematical Relations For Beds of Broken Solids of Maximum Density,” *Ind. Eng. Chem.*, 23 (1931) 1052-1058. (Note that in this paper aggregate refers to crushed gravel, not the type of aggregate grown by Meakin and other workers).

[6] D. Buslik, “The Validity and Usefulness of Buslik's Equation,” in “Proceedings of the Second European Symposium on the Mixing of Particulate Solids,” Symposium Volume No., 65, Institute of Chemical Engineers, Rugby, 1981.

[7] H. Pape, L. Riepe and J.R. Schopper, “The Role of Fractal Quantity as Specific Surfaces and Tortuosities for Physical Properties of Porous Media,” *Part. Character.* 1, 66-73 (1984).

[8] A.J. Katz and A.H. Thompson, “Fractal Sandstone Pores: Implications for Conductivity and Pore Formation,” *Phys. Rev. Lett.*, 54 (1985) 1325-1328.

[9] I. Balberg and N. Binenbaum, “Direct Determination of the Conductivity Exponent in Directed Percolation.” *Phys. Rev. B.*, 33, (1986) 2017-2019. This article contains a discussion of the electrical conductivity of porous rocks.

[10] G. Rochen, M. Rheault and P. St. Jullien, “La Prospection Miniere par Satellite,” *Geos*, No. 3 (1986) 1–4. Geos is published by Energy Mines and Resources, Booth St., Ottawa, Ontario, K1A E04, Canada.

[11] Profile data generated by Miss Christine Hrytsak a guest student at Laurentian University in the spring of 1986.

[12] C.R. Twidale, “The Evolution of Bornhardts,” *Am. Sci.*, 70, 268 – 276 (1982).

[13] See, for example the article “Laser Takes the Legwork Out of Mapping,” *New Sci.*, May 4 (1978) 293.

[14] N.P.A. Burrough “Fractal Dimensions of Landscapes and of Other Environmental Data,” *Nature* (London) 294 (1981) 240-242.

[15] L. Niemeyer, L. Peitronero and H.J. Weismann, “Fractal Dimension of Dielectric Breakdown,” *Phys. Rev. Lett.*, 52, (1984) 1033-1036.

[16] Picture provided by, and used by kind permission of Dr. T. Fowler, of Ottawa University.

[17] M. Matsushita, “Fractal Viewpoint of Fracture and Accretion,” J. Phys. Soc. Jpn., 54 No. 3 (1985) 857-860.

Other References of Interest to Geographers and Geologists

[18] A.C. Armstrong, “On the Fractal Dimensions of Some Transient Soil Properties,” *J. Soil Sci.*, 37 (1986) 641-651.

[19] P.A. Burrough, “Fractal Dimensions of Landscapes and Other Environmental Data,” *Nature* (London), 294 (1981) 240-242.

[20] P.A. Burrough, “Multi-Scale Sources of Spatial Variation in Soil: I. The Application of Fractal Concepts to Nested Levels of Soil Variation,” J. Soil Sci., 34 (1983) 577-598.

[21] P.A. Burrough, “Multi-Scale Sources of Spatial Variation in Soil: II. A Non-Brownian Fractal Model and its Application to Soil Surveys,” *J. Soil Sci.*, 34 (1983) 599-620.

[22] P.A. Burrough, "Fakes, Facsimiles and Facts: Fractal Models of Geophysical Phenomena," in S. Nash (Ed.), "Science and Uncertainty," Science Reviews, Middlesex, England, 1985.
[23] K.C. Clarke, "Computation of the Fractal Dimension of Topographic Surfaces Using the Triangular Prism Surface Area Method," *Comput. Geosci.*, 12 (1986) 713-722.
[24] K.C. Clarke, "Scale-Based Simulation of Topography," in "Proceedings, AUTOCARTO-8, Baltimore, Maryland, March 29-April 3, 1987," pp. 680-688.
[25] N.A. Dodd, "Texture Generation Using Fractal Concepts," in "Second International Conference on Image Processing and its Applications, London, England, June 24-26, 1986," pp. 251-257.
[26] G.J. Edwards, "Fractal Based Terrain Modelling", in "Conference on Computer Animation and Digital Effects, London, England, October 1984,"pp. 49-56.
[27] P. Fredericksen, O. Jacobi, and K. Kubik, "A Review of Current Trends in Terrain Modelling," ITC J., 2 (1985) 101-106.
[28] M.F. Goodchild, "The Fractional Brownian Process as a Terrain Simulation Model," "Proceedings of the Thirteenth Annual Pittsburgh Conference on Modelling and Simulation," (1982) 13 (3) pp. 1133-1137.
[29] M.F. Goodchild, "Lakes on Fractal Surfaces: a Null Hypothesis for Lake-Rich Landscapes," paper presented to the Annual Meeting of the Canadian Association of Geographers, Hamilton, Ontario, May, 1987.
[30] H.M. Hastings, R. Pekelney, R. Montcciolo, D. Vun Kannon and D. Del Monte, "Time Scales, Persistence and Patchiness," *Biosystems*, 15 (1982) 281-289.
[31] D.M. Aronson and P.B. Aronson, "Scale-Dependent Fractal Dimensions of Topographic Surfaces: an Empirical Investigation with Application in Geomorphology and Computer Mapping," *Math. Geol.*, 16 (1984) 671-683.
[32] A.P. Pentland, "Fractal-Based Description of Natural Scenes," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intelli.*, PAMI-6 (1984) 661-674.
[33] A.P. Pentland, "On Describing Complex Surfaces," *Image and Vision Comput.*, 3 (1985) 153-162.
[34] A.P. Pentland, A.P. 1986. "Perceptual Organization and the Representation of Natural Form," in "Artificial Intelligence, Austin, Texas, August 6-10, 1986," 1986, pp. 269-273.
[35] A.G. Roy, G. Gravel and C. Guathier, 1987. "Measuring the Dimension of Surfaces: a Review and Appraisal of Different Methods," "Proceedings, AUTOCARTO-8, Baltimore, Maryland, March 29-April 3, 1987," 1987, 68-77.
[36] M.C. Shelber, H. Moellering and N. Lam, "Measuring the Fractal Dimensions of Surfaces," "Proceedings, AUTOCARTO-6," 1983, pp. 319-328.
[37] J.C. Simon, and J. Quinqueton, "On the Use of a Peano Scanning in Image Processing," in R.M. Haralick and J.C. Simon (Eds.), "Issues in Digital Image Processing," Sijthoff and Noordhoff, Germantown, Maryland, 1980, pp. 357-366.
[38] C.C. Taylor and P.A. Burrough, "Multiscale Sources of Variation in Soil: III. Improved Methods for Fitting the Nested Model to One-Dimensional Semivariograms," *Math. Geol.*, 18 (1986) 811-821.
[39] M. Vandepanne, "3-D Fractals," *Creative Comput.*, II (1985) 78-82.
[40] R. Voss, "Random Fractal Fongeries: From Mountains to Music," in S. Nash (Ed.), "Science and Uncertainty," Science Reviews, Middlesex, 1985, pp. 69-85.
[41] C.A. Aviles, C.H. Scholz and J. Boatwright, "Fractal Analysis Applied to Characteristic Segments of the San Andreas Fault," *J. Geophys. Res.*, 92 (1987) 331-344.
[42] R.H. Bradbury and R.E. Reichelt, "Fractal Dimension of a Coral Reef at Ecological Scales," *Mar. Ecol. Prog., Ser.*, 10 (1983) 169-171.
[43] R. Curl, "Fractal Dimensions and Geometries of Caves," *Math. Geom.*, 18 (1986) 765-783.
[44] S.L. Demko, L. Hodges and B. Naylor, "Construction of Fractal Objects with Iterated Function Systems," *Comput. Graphics*, 19 (1985) 271-278.
[45] G.H. Dutton, "Fractal Enhancement of Cartographic Line Detail," *Am. Cartogra.*, 8 (1981) 23-40.
[46] F.S. Hill Jr., and S.E. Walker, Jr., "On the Use of Fractals for Efficient Map Generation," "Proceedings, Graphics Interface '82, May 17-21, 1982, Toronto, Ontario," 1982, pp. 283-289.
[47] S.K. Kennedy and W.H. Lin, "FRACT - a Fortran Subroutine to Calculate the Variables Necessary to Determine the Fractal Dimension of Closed Forms," *Comput. Geosci.*, 12 (1986) 705-112.

[48] E. Jakeman, "Scattering by Fractals," in L. Pietonero and E. Tosatti (Eds.), "Fractals in Physics," North-Holland, Amsterdam, New York, 1986, pp. 55-60.
[49] J.P. Muller, "Fractal Dimension and Inconsistencies in Cartographic Line Representations," *Cartogr. J*, 23 (1986) 123-130.
[50] P.G. Okubo and K. Aki, "Fractal Geometry in the San Andreas Fault System," *J. Geophys. Res.*, 92 (1987) 345-355.
[51] W.L. Power, T.E. Tullis, S.R. Brown, G.N. Boinott and C.H. Scholz, "Roughness of Natural Fault Surfaces," *Geophys. Res. Lett.*, 14 (1987) 29-32.
[52] F.S. Rys and A Waldvogel, "Analysis of the Fractal Shape of Severe Convective Clouds," in L. Pietronero and E. Tosatti (Eds.), "Fractals in Physics," North-Holland, Amsterdam, New York, 1986, pp. 461-464.
[53] P.Z. Wong, "Surface Roughening and the Fractal Nature of Rocks," *Phys. Rev. Lett.*, 57 (1986) 637-640.
[54] T. Jeffery, "Mimicking Mountains," *Byte*, December (1987) 337-344.

路标 5 树木、蟹、花椰菜与伪装

这个标题也是我在计划备忘录里草拟的一章的标题，想到用这样一个标题多半是受到早期的一本分形几何读物里出现的花椰菜和硬花球插图的启发。这些插图是用来说明结构像蕨类和树木这样的生物形态，都可以用分形几何的概念予以定量描述。于是，在讨论形状像冬季落叶树这一大分支体系的分形结构时，曼德勃罗特就创造了“分形伞盖”这样的一个词，用它来形容春天里枝叶复苏的树木的支撑体的分形表面。一个枝状体系的较为理想的图形可以是一枝花的骨架、一个肺结构的草图或者是一个河流的排水系统。曼德勃罗特将分形几何应用于所有这样的体系，对这方面感兴趣的读者，可以参阅曼德勃罗特著作中关于生物形态的论述以及尼克拉斯（Nicklas）[1]、韦斯特（West）和戈德伯杰（Goldberger）[2]的文章。多种树木的树冠从空中看去大多具有分形结构，这一事实可用于计算机处理空中摄影的照片，判断哪些树木在这张图上，而不需要再经熟练技术人员去解读所见的轮廓线。在树木和植物的另一端，我们可以发现另一个分形体系——根部体系。根部体系会因植物遭受某些疾病而产生变形，所以，健康的和患病的植物根部的分形维数可能为描述植物根部疾病的演变情况和治疗效果提供一种新的定量方法。

在第 3 章，我们简要地提到了分形维数可以用来描述一些癌细胞的结构，翻阅任何一本医学教课书会发现，很多生物细胞体系都可以用分形特征的概念描述。最近，我们对受血液中的异体活化的白细胞的分形结构进行了一些特征方面的研究；目前，我们正与西奥特兰大学的 D. 麦金维尔博士合作进行这项工作[4]。

60 所代初期，我开始涉及描述伪装设计中的特征图案问题。最初研究分形几何时，我以为伪装斑点的结构是可以表征的，这些伪装斑点是应用分形几何的整体设计的一部分。在任何给定的情况下，斑点的分形维数可能与它迷惑眼睛的能力有关。这样，虽然图案随背景而变化，不过，总的来说，图案的结构与之对眼睛的迷惑能力有关。Dr. Von H. Pape 的来信又提醒了我在这方面应用分形几何的可能性，他告诉我，他已将分形几何的概念用于描述混种狗毛的彩色斑点上[5]！可见，远在人类开始在丛林战斗中用分形斑点伪装自己的身影之前，动物身上的彩色斑点就代表了自然伪装的发展进化。

参考文献

[1] K.J. Nicklas, "Computer Simulated Plant Evolution," *Sci. Am.*, 54 (1986) 78-86.
[2] B.J. West and A.L. Goldberger, "Physiology in Fractal Dimensions," *Am. Sci.*, 75 (1987) 354-364.
[3] See, for example, the photographs on pp. 25 and 26 in V.G. Zsilinszky, "Photographic Interpretation of Tree Species in Ontario," Department of Lands and Forest, Ontario, 1966.
[4] D.J.L. McIver, B.J. Rogers, R. Trottier, B. MacFarlane and B.H. Kaye, "A Multifractal Analysis of Blood Cell Activation, paper presented at the Boston Conference, "Fractal Aspects of Disorder Materials," December, 1987, extended abstracts published as a booklet by the Materials Research Society, Pittsburgh.
[5] Personal communication from Dr. H. von Pape, Institute for Geophysics, Technical University of Clausthal, D-3392, Clausthal Zellerfeld, FRG.

路标 6　分形几何和催化剂的结构

对于第一年上化学课的学生来说，一个令人费解的问题就是催化剂在化学反应中的作用规则。在化学字典里，催化剂的定义是："为加速或促进化学反应而加入的一种物质，其本身在反应前后保持不变"。

催化剂的概念是由瑞典化学家柏济力阿斯（Jacob Berzelius 1779－1848）于 1835 年提出的。他的一个学生在继续他的催化剂研究时发现，催化剂的分子或原子常常会与反应的原子暂时连接。在反应的全过程中，会有一种中间化合物形成，包括催化剂化合物结构上的瞬时变化；接下来的二次反应把催化剂物质恢复到初始状态，并产生所需的新的化合物。一般来说，催化剂是弥散于表面载体上的一种颗粒极细的物质。我现在还清楚地记得，上高中时，用镀铂石棉做催化剂的一个催化有机反应实验。石棉是铂的载体，铂是一些分散的细粉末。之所以至今对这次实验记忆犹新，是因为实验中发生了爆炸。如果我那时知道石棉的危险性，我对横飞的玻璃碎片可能带来的危害的担心就会与对石棉纤维的恐惧交织在一起。当时，之所以用石棉做催化剂的载体，一是由于它的表面积很大，二是因为石棉的表面结构能够激活某些参加化学反应的分子。石棉的这种"激活"特性，对于职业卫生学的研究有重要意义。已经证明，香烟的烟雾和石棉纤维的混合物是极其危险而且有毒的吸入剂，这是因为吸附在石棉纤维表面的潜在致癌物，会因石棉的激活作用而增强其分子活性，吸入肺中的石棉纤维不仅携带了香烟中的化学物质，更严重的是它还起了催化破坏的作用。不过，尽管石棉会带来这些人们不愿看到的健康问题，石棉纤维的这些性质大体上都是理想催化剂的典型性质。

在设计催化剂体系时，我们总是希望催化剂体系具有很大表面积，以确保反应可以在较多的地方发生。催化剂必须以激活状态固定在催化剂载体表面，而且催化剂的载体必须允许在气态下形成的化学反应物较为容易地进出催化剂体系。由此对催化剂体系提出的三项要求是：

（1）大的表面积。

（2）催化剂本身是细小颗粒物质。

（3）催化剂载体对气体反应物有良好的渗透性。

由于以上三点物理性质现在都可以用分形几何的概念给予定量，所以催化剂科学家正潜心研究分形体系。

在开始触及分形几何在应用科学领域的应用时，我曾给南非的一些科学家做过一次报告。这些科学家中，许多是研究把煤气催化转变为合成汽油问题的专家。我谈到分形几何可能应用于催化剂体系的研究，比如，用 Pfeifer 和 Avnir 的技术测量有效表面积，这一技术就是用分形来解释气体的吸附；又如，催化剂的渗透受孔隙结构的控制，我们可以从分形角度重新解释水银浸入孔隙结构中的数据，从而可能用分形几何来描述孔隙结构。在场的催化剂专家们顿时兴奋起来，给我的印象是报告刚一结束，他们就纷纷回到实验室，开始把分形几何用于他们的研究了。

目前，研究的着眼点在于增进对催化剂体系结构的了解。专家们意识到一个重要问

题的答案就要水落石出了，即“原子聚团是在什么时候由聚团状变成小晶体的?”答案可能是：在聚团内部有700个原子时，原子聚团便会转变为小晶体[1-5]。同时，有现象表明，每个聚团内部的原子个数少于700的聚团在空间的排布结构，可以用分形几何描述。我们可以通过建立原子聚团模型来模拟活跃的催化体系，这个模型的外形与我们在第5、6章讨论的内燃机排放的煤烟模型完全一样。原子聚团的这种分形结构模型，有助于我们理解结构在催化机制中的作用。科学家们正致力于研究，某些具有分形结构的原子聚团是否比那些内部原子数目相同但分形维数不同的原子聚团有更大的催化活力。

为了得到能形成适当尺度原子聚团的微细粒状的催化剂物质，需要对催化剂载体的蒸汽凝结动力学过程予以适当调节，以使在蒸汽相中原子经紊动碰撞而长大成为既定尺寸聚团的概率，恰好能产生预计尺寸及分形结构的聚团。可以用气溶胶的单一尺寸的乳胶小球模拟获得不同类型聚团的碰撞概率模型（见第6章中关于微粒聚团的讨论）。可以用气溶胶的单一尺寸的乳胶小球来做。感兴趣的读者可以在参考文献[6-11]中找到更多有关分形应用于催化科学的一般性资料以及有关粗糙表面的性质的资料。

参考文献

[1] T.H. Maugh, “When is a Metal Not a Metal?,” *Science*, 219 (1983) 1413-1415.
[2] T.H. Maugh, “Clusters Provide Unusual Chemistry,” *Science*, 220 (1983) 592-595.
[3] W.D. Knight, “Development of Extended Solids from Micro Clusters,” Paper H-1-1, American Physical Society, Detroit, 1984. Dr. W.D. Knight, Department of Physics, University of California-Berkeley, Berkeley, California 94720, USA.
[4] T.H. Maugh, “Catalysts, no Longer a Black Art,” *Science*, 219 (1983) 474-477.
[5] T.H. Maugh, “A New Picture of Catalysts Begins to Emerge,” *Science*, 219, (1983) 944-947.
[6] S.H. Ng, C. Fairbridge and B. H. Kaye, “Fractal Description of the Surface Structure of Coke Particles,” *Langmuir*, May/June (1987) 340-345.
[7] D.L. Jordon, R.C. Hollins and E. Jakeman, “Measurement and Characterization of Multiscale Surfaces,” *Wear*, 109 (1986) 1-4.
[8] R.L.C. Flammer and N.N. Clark, “Computer Based Algorithms for Fractal Analysis for Surfaces,” Rosemont International Conference on Powder Technology, Rosemont, May, 1987. Preprints provided by authors. Particle Analysis Centre, White Hall, Morgantown, WV 26506, USA.
[9] J.J. Gagnepan and C. Roques-Carmes, “Fractal Approach to Two-Dimensional and Three-Dimensional Surface Roughness,” *Wear*, 109 (1986) 119-126.
[10] D. Romeu, A. Gomes, J.G. Perespamires, R. Silver, O.L. Perez, A.E. Gonzales and M. Jose-Yacamen, “Surface Fractal Dimension of Small Metallic Particles,” *Phys. Rev. Lett.*, 57 (1986) 2552-2555.
[11] J.C. Russ and John C. Russ, “SEM Interpretation of Fractal Surfaces,” Preprint provided by the author, Material Science Department, North Carolina State University, Raleigh, NC, USA.

路标 7 固态物理学

正如在本书中多次提到的，固体物理学和统计物理学工作者举双手欢迎分形几何，是因为分形几何使他们可以有效地描述具有随机性结构的系统。这两门物理学中的分形应用文献，正以惊人的速度增多。本路标的目的，一是想告诉读者，固体系统内的分形活动最近已被拍摄成电影，二是为专业读者列出一些新近的参考文献。

在第 4 章中，我们曾提到由 Sapoval 和他的同事所做的关于原子在横穿两种金属界面时的分布情况的开创性工作。在写完这章时，我收到 Sapoval 博士的几篇生动有趣的论文。Sapoval 及其同事将分布模型生成的原子分布模型演示图，制作成电影胶片。他们说：

“以时间动态特性为基础的影片，让我们直接观察到关于固体分布的一个新的令人吃惊的特征——大规模的无规则震动”。

可以认为这部 12 分钟的电影（也有录像带）与图 10.7.1（见书前彩图 14）中翻印的那幅静物镜头一样引人入胜。[1]

参考文献

[1] B. Sapoval, M. Rosso, G.F. Gouyet and J.F. Colonna, "Fractal Structure of a Diffusion Front Duration," movie and video cassette versions available from Imagiciel, 91128 Palaiseau Cedex, France.

[2] B. Sapoval, M. Rosso, J.F. Gouyet and J.F. Colonna, "Dynamics of the Creation of Fractal Object by Diffusion and 1/f Noise," *Solid State Ionics*, 18 and 19 (1986) 21-30.

[3] J.F. Gouyet, M. Rosso and B. Sapoval, "Percolation in a Concentration Gradient," L. Pietronero, E. Tosatti (Eds.), in "Fractals in Physics," Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 137-140.

[4] M. Rosso, J.F. Gouyet and B. Sapoval, "Determination of Percolation Probability from the Use of Concentration Gradients," *Phys. Rev. B.*, 32 (1985) 6053-6054.

[5] B. Sapoval, M. Rosso and J.F. Gouyet, "Simulation of Fractal Objects obtained by Intercalation in Layered Compounds," *Solid State Ionics*, 18 and 19 (1986) 232-235.

[6] B. Sapoval, M. Rosso and J.F. Gouyet, "The Fractal Nature of a Diffusion Front and the Relation to Percolation," *J. Physi. (Paris) Lett.*, 46 (1985) L-149-146.

[7] J.Y. Onoda and J. Toner, "Deterministic, Fractal Defects Structures in Close Packings of Hard Disks," *Phys. Rev. Lett.*, 57 (1986) 1340-1343.

[8] This paper discusses the fractal dimensions of defect structures in crystalline structures. I found this paper particularly interesting because it referred back to the old classical work of Nowick and Mader which we discussed at length in Chapters 4 and 8.

[9] See book of Extended Abstracts for the meeting "Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems," Boston, December 1-4, 1984, Editors A. J. Hurd, D. A. Weitz and B.B. Mandelbrot, Materials Research Society, Suite 327, 98000 McKnight Road, Pittsburgh Pennsylvania 15237, USA.

路标 8　伊甸园中的蝴蝶、蚂蚁和毛毛虫

这一标题中的蝴蝶、蚂蚁和毛毛虫是直接引自 Alla Margolina 博士的一篇有趣的题为“运动散步产生圆周增长：蝴蝶、蚂蚁和毛毛虫”的文章[1]。我觉得若是不引用这么有意思的标题，我简直无法结束这本关于分形几何的书。尽管对于那些偏爱技术信息含量大的标题的科学家，我本可以给这一路标起名为：“流行病学及病理性发作研究中的分形几何”；不过，不得不承认这后标题不如让我们猜测何为分形臭虫和蝴蝶的前一种标题更能刺激人们的想象力。而且，后者这样明显针对医务专家而且学术味道过浓的标题，可能会使普通读者望而生畏，以致于干脆跳过这部分。在本书的第 5 章中，当我们用随机生成的象素来填充 2 维空间时，把正在增大的聚团称为“分形动物”和“分形昆虫”，自从把分形几何应用于研究癌在活组织中的扩散的科学家们用了“分形动物”这一术语后，“分形动物”已成为分形几何学中的新语汇了。

第一位应用现代计算机仿真技术研究癌扩散问题的科学家是伊甸博士（这方面值得一读的论述是文献[2,3]）。在我第一次听到的关于癌扩散的分形模型的报告中，报告者就提到了根据伊甸模型的分形动物的生长。或许是因为当时我初涉分形领域，或许是因为我不仅是一个物理学家还是一个受过训练的神学家，我的想象中呈现了一幅分形动物正在纷纷探访伊甸园中的亚当和夏娃的情景。甚而，我想圣经故事中的蛇或许也是分形动物，它用无数的方式去勾引男人。当然，我很快就发现，原来伊甸模型与亚当和夏娃毫无关系，它只不过是以研制者的名字命名的罢了。尽管伊甸模型最初是为研究癌组织的扩散问题研制的，但这一数学模型也可用于研究人类流行病或诸如森林这样的系统中的疾病。

我发现，Margolina 博士文章开头的标题“蚂蚁、毛毛虫和蝴蝶”，实际上指的是计算机模型中流行病和癌细胞扩散的几种不同的可能性。蚂蚁只能围绕一个数学迷宫，从一个位置爬到另一个邻近的位置；毛毛虫则能克服爬行道路中的障碍；而蝴蝶模型可用于研究由于传播者蝴蝶式地到处乱飞而引起的疾病的远距离扩散。蝴蝶模型还可用于研究中间阶段，因为蝴蝶有毛毛虫这个后代，毛毛虫先是到处爬行，变为蝴蝶后再鼓翼飞行，将疾病扩散至尚未被传染的遥远区域。在第 6 章中，我们简短地提到伪 Levy 飞行数学，其中，位移概率中的变量通常包含两个跃迁水平：一是高概率的局部位移，另一个是距局部位移很远的低概率的有限跃迁。在第 6 章，我们也曾指出，粉末颗粒在其它粉末中扩散的移动，既包括局部的随机扩散运动，又包括相应于伪 Levy 飞行的远距离对流跃迁。用这一章的语言来说，在粉末混合物中的扩散就是蚂蚁和毛毛虫机理，而对流则是蝴蝶的飞跃。

也有偶然的情形，在局部扩散中加上一有限的远距离跃迁，也可以形成一个初次流行病的扩散图式，如图 10.8.1 所示，其轮廓看起来像个蝴蝶。不过，一般来说，用各种扩散概率模型构成的癌细胞或流行病的扩散结构，有如图 10.8.1 中另一单元所示的分形结构。而且有可能应用分形几何研究诸如机体中的爱滋病的扩散和癌症扩散这些不同的重要难题，也越来越明朗了。

图 10.8.1 复制于一篇题为：“扩散现象的通用分类：定点静止但连续可调的运动指

数的新模型”的文章[4]。标题提出的问题是现代科学领域存在的几大问题之一。研究癌症的普通医务科学家或熟悉云杉树花蕾的蠕虫传染扩散的森林管理人员，做梦也不会想到去翻一下这篇标题如此陌生的科技文章。然而，这篇论文摘要的第一句写道：

“已经设想出一种新型的并十分容易控制的，用于研究扩散现象的模型，伊甸模型和流行病模型都是其中的特例”。

文章第一行提出的问题是：

“疾病（或流体等）是如何通过随机的非均质的物料扩散的?”。

这个简单的问题涉及许多学科，一方面是从流行病学、肿瘤学（癌症）到心血管生理学，另一方面是机械学上的信号传播和网络。倘若这篇文章的标题中用了这些字眼，它也许早就吸引了它理当吸引的一大批读者。

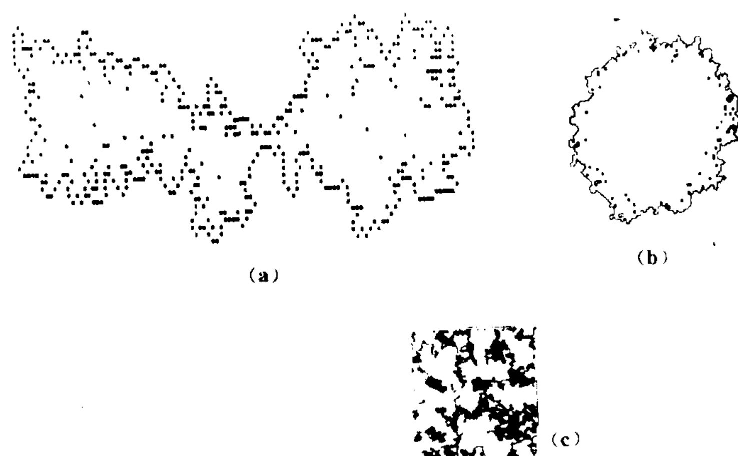


图 10.8.1 动物形象已用来描述某些分形体系复杂的图案[4]。(a) 流行病扩散的蝴蝶模型 (1)；(b) 癌肿瘤生长的蚂蚁模型 (2)；(c) 渗滤模型的 Mole 迷宫 (3)

如同我在其他地方详细论述过的那样，我认为科学文献必须首先从论文摘要中列出关键词，为计算机组织信息查词系统提供方便。并且提出，长字携带的信息量比短字多，把出现在一篇科学论文第 1 节中的长字列出来，作为一组关键词，会比从简洁的文章标题中抽出几个字更好，因为只有同行专家才可能对文章标题的含义一目了然。

参考文献

[1] A.E. Margolina, "Growth Perimeters Generated by a Kinetic Walk: Butterflies, Ants and Caterpillars" in H.E. Stanley and N. Ostrowsky (Eds.), "On Growth and Form," Martinus Nijhoff, Boston, (1986) 284-287.

[2] H.J. Herrmann, "Growth, An Introduction," in H.E. Stanley and N. Ostrowsky (Eds.), "On Growth and Form," Martinus Nijhoff, Boston, (1986), 3-20.

[3] H.J. Herrmann, "The Moles Labyrinth: a Growth Model," *J. Phys. A.*, 16 (1983) L611-L616.

[4] A. Bunde, H.J. Herrmann, A.E. Margolina and H.E. Stanely, "Universality Classes for Spreading Phenomena: A New Model for Fixed Static but Continuously Tunable Kinetic Exponents," *Phys. Rev. Lett.*, 55 (1985) 653-656.

路标 9 湍流与混沌

我们可以用向水流中注入染料的办法观察流体流过某物体的运动状况，如图 10.9.1 所示。这此体系中，染料形成的细线即是数学家们所说的流体中的流线。如果液体以较慢的速度流过某球体，我们称之为层流。在层流中，液体的运动伴随着界限清晰的平稳变化的流线，如图 10.9.1 (a)。如增加流体的流速，则球体附近水流的流线会变得较为复杂，在某一阶段，有一些稳定的漩涡流出，如图 10.9.1 (b) 所示。这些有规则地流过物体两侧的湍流漩涡，如同一股高速流动的风吹过旗杆，使旗帜迎风飘扬。通常情况下，我们无法清楚地区分湍流开始与层流结束之间的界限。图 10.9.1 (b) 中的一股漩涡即是著名的“卡门涡街”，卡门涡街是以著名的科学家冯·卡门的名字命名的，他是第一位研究这种液体流动的人。

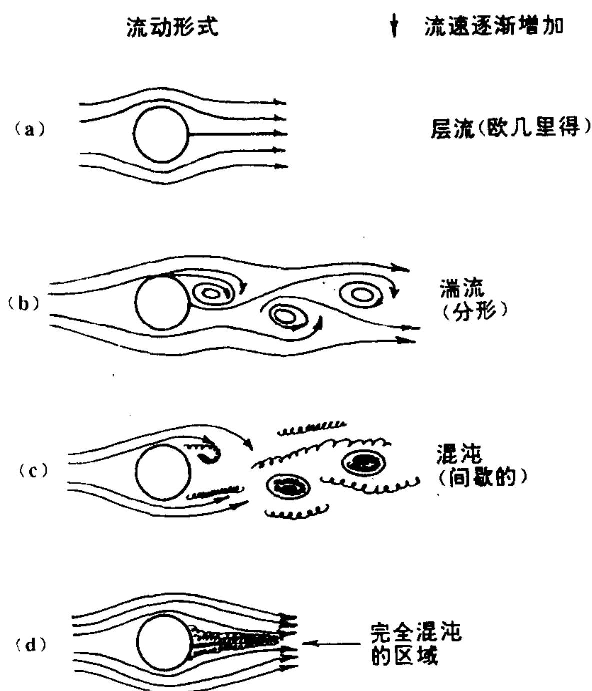


图 10.9.1 以不同流速流过球体的流体运动形成从欧几里得的形式，经过神秘的分形形式到完全混沌的情形

如果液体流过物体的速度增加超过卡门涡街形成的速度，或者若我们考虑到液体流过的物体是表面粗糙或形状复杂的情形，湍流就会变得更加无序。从曼德勃罗特的著作中可见，他本人对湍流现象的兴趣正是他提出分形几何的决定性原因之一。那本著作的第 10 章开始有这样一段话：

“对湍流问题的研究是物理学中最古老、最艰巨也是最令人失望的部分。湍流显然是与传统的物理学精神（在此，曼德勃罗特指的是分形之前的物理学）不相干的。传统物理学着重研究有确定尺度的现象——即使是包含湍流中的几何形体也是易于看到并要求作适当描述的。我推测湍流包含有很多分形性质，在这一章开始应该更多地以几何学的方式，运用分形的知识去研究湍流。不过，由于迄今还没有取得多少确定的结果，这种考虑尽管涉及众多方面，但每一方面都只能简单述及。”

正如曼德勃罗特先生所预言的那样，目前，有很多研究正致力于如何将分形几何的概念与湍流物理联系起来，不过，有关这方面的书大都生涩难懂。必须承认，虽然我在各种会议中听过有关湍流分形的报告，可是报告中的一些词语却只是象湍流旋涡一样在我的脑海中打转。不过，毫无疑问，尽管我听报告的时候，感到报告中的内容理解起来很困难，但是，只要能看一看有关液体湍流的评论性文章，就会发现其中的大多数插图都需要用分形解释。

在最初计划这章时，我仅想向对此感兴趣的读者论证分形几何可以应用于湍流现象，而把所有的数学解释留给更具备这种探索能力的人，或是愿意在液体湍流数学这样的密集丛林中冒险的读者。我在湍流这章的计划备忘录里贴了一张图 10.4.1 的复印件，在这张图上，经过旋涡我画了一些任意的线，如图 10.9.2 所示，借助这些线，人们可以证明一个由曼德勃罗特提出而他未能证明的概念，那就是穿过旋涡所画的线是一个康托集(Cantorian set)。用这种方法制作的各种康托尘示于图 10.9.2。改变通过旋涡的探索线位置可以改变康托集的结构，比较如图 10.9.2 所示的各种线的模式可以鉴别一这点。这些康托集就是湍流旋涡结构的一维探测。

图 10.9.2 是以 B. Freymuth 和他的同事写的评论文章[1]中的照片为基础绘制的，有兴趣的读者可以在这篇文章及 Lugt 的文章[2]中发现许多有趣的模式。图 10.9.2 的图形产生于风洞研究，表现出空气流经实验机翼叶片模型上侧时的状态，由于图形是用烟雾流体做出来的，所以相当直观。当空气开始流经机翼模型表面时，从流体出来的烟雾就被旋转气流捕获并形成可见涡流。

在 Lugt 的评论文章中，有一幅北太平洋上的两个相互环绕的台风旋流的卫星照片，我们可以通过旋涡图画不同的探查线，从而做出各种康托集。

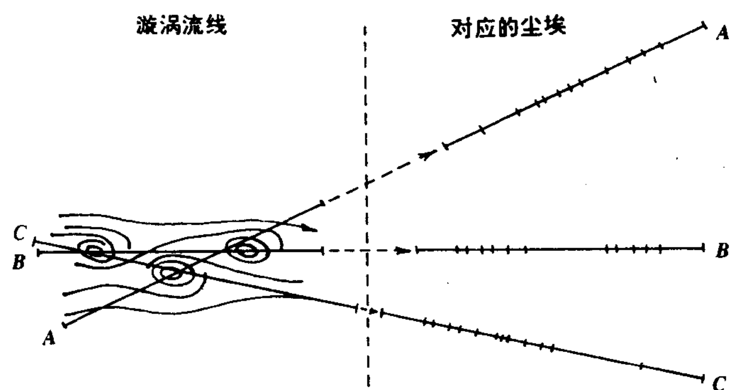


图 10.9.2　由穿过某类湍流产生的一组旋涡所画截线产生的康托集

任何一位乘坐飞行器经过雷雨云的人都能看见，在雷雨云生成的早期阶段，在透明空气与构成云（这些云是由上升的柱形湿空气形成的）的冷凝液滴间的边界上，有显而易见的波浪式湍流图式。从地面上观察云图可发现它们的分形结构，但看不太清楚在其形成过程中的湍流包卷。研究云层结构的科学家发现，小至几米大至数十万米的云层结构间具有惊人的相似性。在天气预报方面湍流具有十分重要的意义，所以分形几何正应用于气象系统的研究[4-11]。

只要从图 10.9.2 的旋涡图做点跳跃式的想象，就可以构造出外层空间的一个螺旋形的银河系（曼德勃罗特在他著作的某一章中考虑了外层空间银河系聚结的分形结构）。一次，一个学生在看一张银河系的照片时对我说："看上去好像是上帝把他的手指放在宇宙的汤中搅动，然后就赐予了我们这样一个银河系"。尽管这种充满想象的诗一般的语言，并不能吸引所有的读者，但它可以激发我们去想象，一杯搅动的咖啡与我们观察到的外层空间的星系结构相似，两者都可以用分形几何的新方法去描述。把读者带入物理学中的湍流领域这么远，我感到自己犹如一名向导，带着一个有目的的探险家穿过开阔的牧场，来到了一片危险的丛林边。在山脚下，向导给探险家指引了一条通向那个充满艰难而且险象环生的丛林之路。他说，丛林中有很多财宝有待开发，但探险家必须独自一人从这出发。限于篇幅，我要请读者独自去探索银河系的分形结构了，祝你们在穿过旋转的纳维－斯托克斯方程的湍流符号丛林和拉普拉斯变换的湍流符号丛林时一路平安[12,13]。

宇宙学是关于宇宙结构问题的学科。在希腊神话中，在上帝来到之前，宇宙完全是无序的。希腊人用"混沌 (chaos)"这个词描述无序的宇宙；而由上帝造出来的有序的万物，在希腊语里就是宇宙 (cosmos)。由此，宇宙学就是研究宇宙构造（秩序）的术语。有趣的是，化装品 (cosmetic) 这个字也来自同一个希腊字，它是一种创造新面目的创造性艺术，所以化装品是一种变"混沌初开"为"井然有序"的物质。混沌理论是近代物理学发展最快的领域之一[15]，它研究那些发生于显然是完全混沌的体系中的令人惊异的构造。

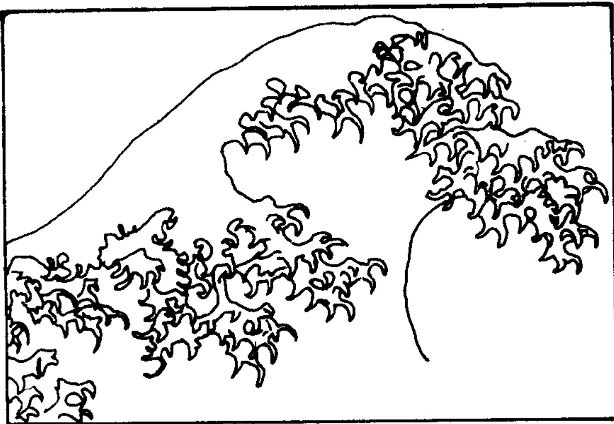


图 10.9.3 日本艺术家的一幅名画，预示出分形指 (Fractal fingering) 进犹如一个破裂的水浪变成了泡沫汹涌[9]

为了说明物理体系中各种行为的有序、无序水平，我们可以考虑流体流过球体时可能发生的各种流态。我们预先确定只讨论流速非常低的情况下的流动模式（见图 10.9.1 (a)），在这种层流流态下，任何一个流体质点均严格地沿欧几里得流线运动。我们已经讨论过，到某一阶段时，"卡门涡街"怎样随着流速的增加而产生，以及怎样应用分形几何去描述脱落到球后流体中的旋涡结构。若流速继续增加，而越过如图 10.9.1 (c)，(d) 所示的两个阶段，则我们就从可用分形几何描述的体系进入到混沌状态了。所以，从这个角度上看，分形几何就是流线运动的欧几里得几何学概念和描述物质世界中完全紊乱系统的混沌理论间的一座桥梁。本书已多次提到对一个系统的分形说明是对系统的律动

(rhythmic) 描述的补充，而后者是与各组分结构律动（这些律动则是完整的波动行为的可见图形的基础）的傅里哀分析分不开的。利用傅里哀分析描述流体流经球体时自层流到混沌各流态的变化，已发表于 Kadanoff 所著的一本有趣的著作“通向混沌”一书中[3]。

Kadanoff 和曼德勃罗特关于紊流的论述中都涉及到一幅有名的由一位日本艺术家画的画，表现的是一个翻滚波浪的泡沫的浪头。图 10. 9. 3 是这幅名画的主波顶部的轮廓，图案的抽象性表明艺术家预示稳定的波前初始崩溃成泡沫是由于分形指进引起的。这虽然只是艺术上的创造，但它确实显示了分形几何如何描述潜近海岸的平稳浪与完全混沌的冲击海岸的泡沫飞溅的浪头的中间状态，而海岸是可以用欧几里得几何描述的。勿庸置疑，许多应用分形几何去解释湍流模式乃至混沌系统结构的科学出版物，将会大量涌现于明天的科学文献中[16-18]。

参考文献

[1] P. Freymuth, W. Bank and M. Palmer, "Vortices around Air Foils," *Am. Sci.*, 72 (1984) 342-248.

[2] H.J. Lugt, "Vortices and Vorticity in Fluid Dynamics," *Am. Sci.*, 73 (1985) 162-166.

[3] L.T. Kadanoff, "Roads to Chaos," *Phys. Today,* December (1983) 46-53.

[4] S. Lovejoy, "Area Perimeter Relation for Rain and Cloud Areas," *Science*, 216 (1982), 185-187.

[5] L.J.S. Bradbury, F. Durst, B.E. Launder, F.W. Schmidt, J.H. Whitelaw Eds.), "Turbulent Shear Flows 4," Selected papers from the Fourth International Symposium on Turbulent Shear Flows, September 12-14, 1983, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[6] D. Schertzer and S. Lovejoy, "The Dimension of Atmospheric Motions," in T. Tatsumi, (ed.) "Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids," Elsevier North-Holland, Amsterdam, 1984 pp. 505-511.

[7] S. Lovejoy and B.B. Mandelbrot, "Fractal Properties of Rain, A Fractal Model," *Tellus*, 37a (1985) 209-232.

[8] S. Lovejoy, D. Schertzer and P. Ladoy, "Outlook Brighter on Weather Forecasts," *Nature* (London), 320 (1986) 401.

[9] S. Lovejoy and D. Schertzer, "Generalized Scale Invariance in the Atmosphere and Fractal Models of Rain," *Water Resour.*, 21 (1985), 1233-1250.

[10] B.B. Mandelbrot, "Fractal Geometry of Nature," Freeman, San Francisco, 1983, p. 16.

[11] S. Lovejoy and D. Schertzer, "Scale Invariance in Climatological Temperatures and the Local Spectral Plateaus," *Ann. Geophys.* B4, (1986) 401-410.

[12] S. Lovejoy and D. Schertzer, "Scale Invariance Symmetries Fractals and Stochastics Simulations of Atmospheric Phenomena," Bulletin of the *Am. Meteorol. Soc.*, 67 (1986) 21-32. This paper contains some very beautiful simulated cloud structures.

[13] H.G. Hentschel and I. Procaccia, "Intermittencey Exponent in Fractally Homogeneous Turbulence." Phys. Rev. Lett., 49 (1982) 1158-1161.

[14] H.G. Hentschel and I. Procaccia, "Fractal Nature of Turbulence as Manifested in Turbulent Diffusion," *Phys. Rev. A* (Rapid Commun.), (1983).

[15] J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, N.H. Packerd and R.S. Shore,"Chaos," *Sci. Am.*, December (1986) 46-57.

[16] "The Mathematics of Mayhem," *Economist*, September 8 (1984) 84-89.

[17] For some interesting chaotic patterns, see D. Avnir and M. Kagan, "Spatial Structures generated by Chemical Reactors at Interfaces," *Nature* (London) 307 (1984) 717-720. Students can generate the chaotic patterns created by Avnir and Kagan in their own laboratories using relatively simple equipment.

[18] D. Lees, "A Science called Chaos," *Maclean's* (a weekly Canadian news magazine) October 1 (1984), 76-79.

[19] B.F. Madore and W.L. Fredman, "Self Organizing Structures," *Am, Sci*, May-June (1987), 252-259.

路标 10　分形几何的哲学影响

我的分形几何报告的听众来自各行各业。我发现，许多年轻的学生特别感兴趣的是分形几何对他们关于“无限”的概念的挑战；而老一些的科学家则常会有相反的问题。在他们以往所受的教育和经历中，他们精通于他们认为是平稳变化的微积分的有序世界，一些人发现自己难于生活在这样的世界，在那里没有微分函数的曲线可以支配系统的性质。分形似乎以不止一种的方式提出许许多多的挑战。使老科学家们感到困惑的是，过去他们接受的许多东西都有确定的值，如密西西比河的长度，大不列颠海岸线的长度等，可现在，它们突然都变得不确定了。他们在理智上对分形几何的抵触，同本世纪 20 年代末海森堡的测不准原理给科学家们带来的问题很相似，当时，测不准原理似乎要摧毁因果之间的直接联系，而这种联系却是物质世界的基础。例如，爱因斯坦曾拒绝把世界看作是一大碗随机汤（one large stochastic bowl of soup），他说：“上帝不和世界玩掷骰子的游戏”。我曾希望在本书中加上“黑体，无限辐射与量子几何”一章，限于篇幅，这一章的雏型变成了一篇给物理教师的报告讲稿，在这篇讲稿中，我回顾了本世纪初理论物理学遇到的危机，那时经典物理学预言物体应放射出无限能量（物理教科书中称之为“紫或紫外灾难”问题)。在本世纪初，这种“无限辐射”的佯谬，是由这样的事实引起的，即还没有人对能量可分性问题提出质疑。在此之前，人们一惯认为，总可以把一定的能量分割开来直到无限，而普朗克却提出，如果我们重新假定能量不是无限可分的，而是存在着某一个特定的极小值，他把它称为量子（源于拉丁语，意为一节，是最小的能量单位)，那么当我们用这一新概念解释黑体辐射特性时，就可以得到一个符合测出的黑体辐射光谱的公式。

我们知道，当时普朗克并没有立即接受他自己的数学创新中的哲学含义，这一革新后来形成了现代的“量子物理”。在很长一段时间里，普朗克并没有想到他的量子观念是对宇宙结构的一次重要的重新估价，而只认为它是数学领域里的一种临时变革。最终，物理学家们承认，如果要描述他们所感受到的这个现实的世界，就必须接受能量不可无限细分这一事实。

许多开始学习几何集合理论和分形几何中的悖论（诸如所有的线段有着无穷多个点和所有的面积包含无穷多个点的事实）的学生激烈地反对这种与他们对现实世界的经验相矛盾的观念。实际上，如果某人确认一个点的大小不可能是无限小的，或者说一个几何点的尺寸有物理限度，那么他可以着手建立一门量子几何学（qunatum geometry），这种几何学不包含几何集合理论的悖论，并能限制分形边界的无限性，就象计算机绘图的分辨率或打印时所用的点限制了我们绘出或印出理想分形的能力一样。几何集合理论的悖论本质上来源于人们隐含地设定可以得到无限多小的点，而“量子几何世界观”以有限尺度的点为基础，从而可以解释围绕原子的量子化空间中的有限轨道：人们奇怪为什么数学家们没有从他们的几何悖论去作出量子几何学的创造，而物理学家们却从黑体辐射的理论和现实的失谐创立了量子物理学。也许，数学家们将会排斥量子几何学的观念，如同物理学家们在普朗克的创始性工作后的许多年仍继续排斥量子物理学的某些观念一

样。无论如何，必须指出，在现实世界中科学家们是用“象素”（pixel）工作的，在卫星图象的自动处理及电视图象的发生和传输过程中，他们已有了自己创造的扩展了的量子几何学，在这种量子化的几何学中，象素尺度起着普朗克常数在能量世界那样的作用。在本书中，当把有限扩散的团聚作等用模型化时，我们已经运用了量子几何学，其中的象素尺度在我们所研究的几何世界中是所能定义（原文误为不能定义——译者注）的最小质点。也许将来会有一本书有诸如“量子几何学世界中的象素结构”这样一章。

路标 11　分形逻辑的玩笑

对自己不那么过于认真的数学家常常会体会到，他们专业中的某些严密的逻辑会把人们引向不可思议的矛盾。例如，《爱丽丝奇遇记》就是由数学家写的。这本书中的许多幽默就是关于合乎逻辑的论据的非逻辑的应用的。[1]读过曼德勃罗特的书以后，我感到有必要为爱丽丝的奇遇增添新的一章，名字可以起为“拓扑学的爱丽丝”。人们可以想象，可怜的爱丽丝在 Menger 海绵中迷路时所遇到的无数奇事，想象她在试图除去 Sierprinski 地毯上的康托尘时遇到的困难，想象她怎样爬了无数级魔鬼的阶梯才到达了她的目的地。

曼德勃罗特先生很喜欢分形笑话和其中的逻辑。一次我在法国南部做报告，听众都是一些分形专家，我在报告中向曼德勃罗特先生指出，他忽略了英国的小孩子们喜欢的托儿所教的分形韵律诗，这激起了他的好奇心。显然，他从未听过这样一首诗：

“一个歪斜的人，
　　走过歪斜的一英里，
　　　　歪歪斜斜地
　　　　　　捡到了一枚歪斜的六便士。
买了一只歪斜的猫，
　　抓到了一只歪斜的老鼠。
歪斜的人，
　　歪斜的猫，
　　　　歪斜的老鼠，
　　　　　　都挤在歪斜的小屋里。”

我在报告中提到，既然世界上已有了分形几何，那么就可以用“分形”替代“歪斜”重写这首诗了。这个新的分形人（而不是原来那个歪斜的人了），按他的数学计划购买的分形房一定是要象 Menger 海绵那样有无数房间。唯一的问题是，分形人要花无限的时间才能走过分形英里到达他的分形新居。而且，由于有一种楼房的样式是楼梯越过栅栏的，所以魔鬼可能会造一种“分形式样”，而楼梯便会有无数级台阶。这样，分形人要爬过这种分形式样的楼梯就又要花上无限的时间。不过既然分形人要花无限久的时间才能完成他进家的旅行，按排他的家务，那么最终这首韵律诗也就无法确定下来了。

如果以拥有一幢有无数房间的房子的分形人打比方是有些牵强附会的话，那么读者必须认识到集合理论的解释者是用了这样一种概念：在外层空间，一个旅馆可以留宿一

位新到的客人，这个旅馆虽已满员，但却有无数个房间，因而只要在房间一览表上，把每个人简单地向上移一个房间就行了[3]。

你应该还会记得在"爱丽丝奇遇记"中，爱丽丝在吃了某些使她长大或缩小的东西后给自己带来的麻烦。如果"拓扑学的爱丽丝"吃了杏仁面包（曼德勃罗特先生的名字按字面翻译成英语就是杏仁面包的意思），那么她就会发现自己是在分形空间的不同层面上探险。或许，在她的新探险中，她会遇见曼德勃罗特博士，他会告诉爱丽丝，从分形上看，她是不存在的。在曼德勃罗特先生的有关分形体系的内在含义的论述中，曾指出，人体实际上是由两个分形分支体系缠绕而成的，这两个分形体系即是静脉和动脉。因此，他断言，人体是存在于两个无限分岔的脉管网络内的极少极少的一点肌肉，这是怎样一个充满分形的观点！

我们知道在爱丽丝奇遇记的姐妹作《爱丽丝镜中奇遇记》中，爱丽丝遇见了矮胖子，矮胖子是英国小孩在托儿所学的韵律诗中的人物：

"矮胖子坐在墙上，

矮胖子就要摔下，

国王的坐骑和全部勇士，

都不能把矮胖子复原。"

尽管韵律中并没有这么说，但是矮胖子几乎在所有的图画书中都是只穿着人的衣服的大蛋形象。他只在《爱丽丝镜中奇遇记》中出现过一次。他坐在一座高墙上，说起话来像一个不可捉摸的哲学家（唯其不可捉摸才能显得博学多才）。在"拓扑学的爱丽丝"中，矮胖子可以从墙上摔下来而变成分形。想把矮胖子重新扶到墙上的国王的全部骏马和勇士，会发现蛋壳碎片的尺寸分布遵守一个比例函数，而且该比例函数可以由碎片分维数来描述[4]。

另一部经典的数学童话是"扁平国"，这本书的修订本完稿于1884年，作者E. A. Abbott是一位小学校长，他的主要兴趣是在文学和神学[5]。

"扁平国"的基本情节是：一个球体去访问一个住在2维空间的正方形，对于2维正方形来说，3维的球象一个神秘出现又神秘消失的圆。球穿过正方形所在平面时，教给正方形如何想象比他自己大的维数。所有"扁平国"的居民都是欧几里得人。"扁平国"中最简单的形象是一群针形女人（进入扁平国探险的读者需要小心的是，本书的作者对妇女的观念似乎在妇女解放运动之前），等腰三角形是男警察和士兵，正方形是一群受人尊敬的商人。在"扁平国"里，谁的边数越多，谁就越趋于完美。所以，在"扁平国"中，圆是最完美的形状，因为圆是一个由无穷无限小的边构成的多边形。这样，圆就是"扁平国"中的哲学家和牧师。

一次在梦中，球把正方形带到了"点国"和"线国"。球教给正方形如何将梦中遇到的一连串的各种维数经历扩展为3维。正方形理解了何谓3维以后，祈祷他下一代的正方形能有更多的维数，而他的平面亲戚们却认为他精神错乱，把他关进了精神病院。

在"拓扑学的爱丽丝"中的"分形体验"一节中，把爱丽丝带到"扁平国"而让她经受一次分形瓦解是一件十分有意思的事[6]。在"扁平国"里，她会与正方形结为好朋友。他们将结伴去Koch岛旅行，他们有无穷无尽的时间可以在环岛无限长的海滩探索，他们



图 10.11.1 在“拓扑学的爱丽丝”中，爱丽丝在经受了维的瓦解之后，也许要学会怎样用 Minkowski 腊肠去对付分形龙

还将无比快乐地探索分形河流体系。也许，他们会遇见如图 10.11.1 中那样的分形龙。他们会发现这个分形龙实际上不过是一个有伪装的病理学曲线，扔给它一个 Minkowski 腊肠就能驯服它！（曼德勃罗特博士在他的著作中提到，早一代的数学家是如何将 Koch 三分岛这样的曲线考虑成病理或“病态”曲线的。Minkowski 腊肠即是早期试图用量子几何去驯化象 Koch 岛这样的病理学曲线的）。图 10.11.1 中的龙，是从许多关于分形的文章中复制的比较有名的曲线之一。曼德勃罗特的著作中的一幅彩色分形龙，曾在 1980 年末用于加拿大 Guelph 大学的招生海报上。有趣的是，贴在我校物理系走廊招示栏上的该图的复印件，仿佛在一夜之间神秘地消失了，而后又到处出现在学生们的房间里[7]。

再说爱丽丝和正方形，有一次他们在梦中二访“线国”，他们看到一个康托集的生命形式，正在无限但又有界的空间内前后躲闪。

有一天，当我正想着爱丽丝在“扁平国”可能经历的某些冒险时，我突然想到，她的历险之一可能是，她发现正方形居住的平面空间实际上是一个很大的 Mobius 环。Mobius 环是令数学家们感兴趣的一种数学形状。Mobius 是德国的一位数学家（1790－1868)，他被认为是拓扑学这一数学分支的创建者之一。你也可以自己制作一个 Mobius 环：用一条长纸带，如图 10.11.2 那样，在把两端粘在一起之前扭一下，就做成了。虽然对于你我来说，扭过的纸带环看起来似乎有两个面两个棱，而对数学家来说，却只有一个面和一个棱。我曾见过职业魔术师把 Mobius 环的令人意外的性质用于魔术表演。魔术师用 Mobius 环表演的一个小把戏是，他先做一个 Mobius 环，然后让观众中的一个小孩用蜡笔在绕环的外面画一条线。显然，我们最后会发现，这是无法做到的，因为如图 10.11.2 (a) 所示，如果想在 Mobius 环上，画一条连续的线，其结果总是画在纸的正反两面上。

如果哪位沿着图 10.11.2(a)所示的线连续剪下去，他无法将 Mobius 环剪成两个环，而只能是一个完整的环，如图 10.11.2 (b) 所示，更奇妙的结果是，如果从环边缘 1/3 处开始剪，这样一直剪下去，直到得到两个套在一起的环，小环的长度与原来的 Mobius

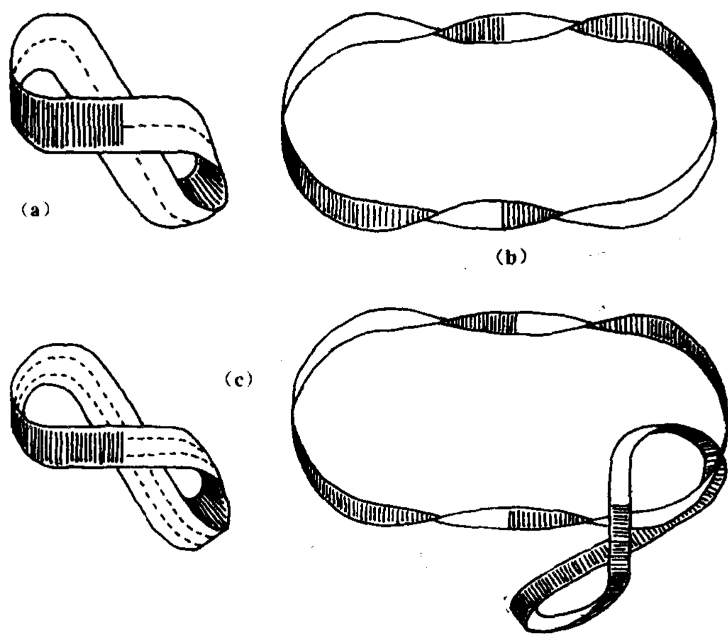


图 10.11.2 可通过有序剪切 Mobius 环，在一维空间产生分形体系。(a) Mobius 环是有一个边的一维空间，此图说明，从任一点画的一条线必和它自身相遇，因为这条线涉及到环的两面；(b) 把 Mobius 环从中间剪开，结果变成一个大环，而不是两个小环；(c) 把 Mobius 环沿边缘的1/3处剪下去，结果变成套在一起的两个环，其中较小的一个环自身又是一个 Mobius 环

环相等，只是稍窄一些，但仍然是一个 Mobius 环。

在前一节中，我提到我曾看过一个剪开 Mobius 环的魔术表演，观众的反应表明，表演的结果完全出乎人们的意料，而且与人们的常识相悖（爱因斯坦曾说，常识是我们在六岁之前接受的，由智力偏见组成的东西）。一天，我用 Mobius 环和剪刀自娱时发现，如果剪开第二个 Mobius 环，即是初始环从边缘 1/3 处剪开后产生的那个小环，那么，在理论上，就应形成一个周长无限的 Mobius 环联锁系统。除了最初的环之外，在产生各环的任一阶段，通过观察，你会发现，这个联锁系统是自相似的，因为你无法说出你正在观察哪一阶段的剪切。这个多次剪切的系统显然至少具有某些分形空间的性质。如果您某天下午没有什么特别的事要做，您可以用剪刀和纸带来验证一下 Mobius 环，尽管不同的分割方法会产生不同的分形体系，但它们无一不是周长趋于无限的。

从数学家的观点看，剪刀和纸带的自娱方式可能显得浅薄了些，但在课堂上演示 Mobius 环的形成过程，却的确引起了学生们极大的好奇心。我曾把演示 Mobius 的多层次环作为一种有效方法启发学生从拓扑和分形的角度思考问题。

在路标 2，我们讨论过未来应用分形几何制作墙纸的可能性。早在 1987 年，《新科学家》杂志上就发表了一个简短摘记，讨论用随机编织编织分形图案的毛衣，其图纹格外引人注目。也许，未来的编织法会是随机数字表，并附有这样的说明：织一针、绣一针、制造一次分形。

我想用图 10.11.3 中的两幅漫画结束这本分形漫步。图中的两位绅士正在玩分形拼字游戏，这说明分形逻辑和分形几何已经成为英国语言的一部分了，并且有迹象表明它们还会长时间存在下去。不过，许多受传统教育的科学家仍然对分形这种思维模式有所怀疑。他们有理由对于像我这样从传统研究的旁门左道走出来的人抱着观望的态度，他们不知道自己是否也应该投入一种分形方式的分析中去。毫无疑问，在开始把分形几何应用于自然体系时，需要一种理智上的超越，并努力强迫自己把每件事都变成分形逻辑

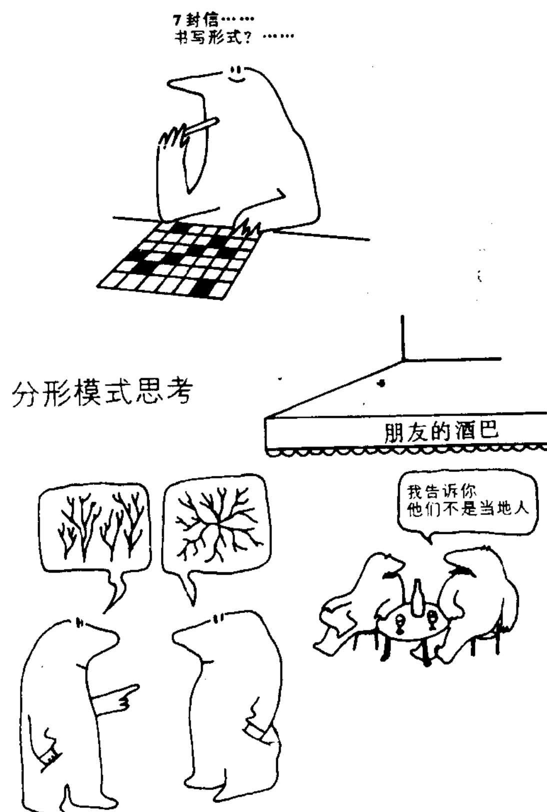


图 10.11.3 这几幅漫画是摘自 Martinus Nijhoff 出版商出版的 Eugene Stanley 和 Nicole Ostrowski 编辑的《生长和形成》一书的封面和封底的插图

的框架。有时，人们会发现把系统传统的描述转换成分形描述并没有本质的优越性。不过，在这种情况下，探索用另一种方式描述某一体系所引发的智力上的促进也是极为宝贵的经历，即使最终证明分形几何对于描述这一体系并没有太大的助益。抛开其他暂且不谈，这本书的目的之一就是要说明即使分形体系并不比 Mobius 环更为有用，然而从分形的角度去看待事物是充满乐趣的。

在与我的学生们一起探索分形概念在物理学中的应用的十年间（1977－1987），对于有待进一步发现的细颗粒体系领域的各种分形模型，我们曾开展过多次令人兴奋的讨论。

我衷心希望，这本书中的资料，能够给那些探索他们周围的物质世界的人们所用的方法和技艺中增添一点分形思维。我还希望，读者们在分形空间的漫步中，能像我写这本关于我早期在分形领域漫步的书时那样，拥有由衷的快乐与喜悦。

参考文献

[1] There are many editions of “Alice In Wonderland” and its companion “Alice Through the Looking Glass” by Lewis Carroll [the penname of Ludwig Dodgson, an Anglican (Episcopalian) Minister and Professor of Mathematics at the University of Oxford. The well worn copy of these two books that I have on my desk is the combined issue, Companion Library Edition, published by Grosset and Dunlop, New York, 1965.

[2] B.H. Kaye, “Topological Alice – a New Dimension in Mathematical Nonsense,” in preparation; part of a planned series of essays on “Fractalicious Thinking and Fun”).

[3] For a discussion of this extraordinary hotel located in galactic space, and the development of the ideas of set theory, see N. Ya, Vilenkin, "Stories About Sets," Academic Press, New York, 1968, p. 40.

[4] Physicists might like to note that when Humpty Dumpty becomes a fractal, not only is he now describable by a Korcak fractal, but also his entropy has increased. Putting Humpty Dumpty back together is an exercise in lowering the entropy of the fragments, akin to the lowering of entropy when water freezes to form ice.

[5] E.A. Abbott, "Flatland," a romance of many dimensions with illustrations by the author – a "Square;" 6th ed. revised with Introduction by B. Hoffman, Dover, New York, 1952.

[6] I am exploring Alice's possible adventures in Flatland in a planned chapter for "Topological Alice" which would be called, "Flat Alice Goes Exploring With A Square" (see reference 2).

[7] The beautifully coloured fractal dragon used on the poster is shown in B.B. Mandelbrot "Fractal Geometry of Nature," Freeman, San Francisco, 1981, p. C4.